Cornel MARIN **Florin POPA**

REZISTENȚA MATERIALELOR

PROBLEME DE EXAMEN

EDITURA MACARIE

TÂRGOVIŞTE 2001

dr. ing. Cornel MARIN **dr. ing. Florin POPA**

REZISTENȚA MATERIALELOR

PROBLEME DE EXAMEN

Recenzia ştiinţifică:

Prof. dr. ing. Horia GHEORGHIU

Conf. dr. ing. Anton HADAR

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României

MARIN, CORNEL

Rezistenţa materialelor. Probleme de examen /

Cornel Marin, Florin Popa - Târgovişte : Editura Macarie, 2001

310 p; 25cm - (Universitaria)

Bibliogr.

ISBN 973 - 8135 - 62 - 1

I. Popa, Florin

539.4 (076)

Tehnoredactare computerizată:

Cornel MARIN & Florin POPA

©2001 - Toate drepturile sunt rezervate autorilor

CUPRINS

PREFAȚĂ

MODELUL 1a ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE ÎN CONSOLĂ

MODELUL 1b ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE FĂRĂ CONSOLE, SITUATĂ PE DOUĂ REAZEME PUNCTUALE RIGIDE

MODELUL 1c ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE CU CONSOLE, SITUATĂ PE DOUĂ REAZEME PUNCTUALE RIGIDE

MODELUL 2a GRINDA CONTINUĂ PE TREI REAZEME PUNCTUALE RIGIDE SITUATE LA ACELAŞI NIVEL

MODELUL 2aD GRINDA CONTINUĂ PE TREI REAZEME PUNCTUALE RIGIDE DENIVELATE

MODELUL 2aE GRINDA CONTINUĂ PE TREI REAZEME PUNCTUALE RIGIDE ŞI ELASTICE SITUATE LA ACELAŞI NIVEL

MODELUL 2b GRINDA CONTINUĂ PE 4 REAZEME PUNCTUALE RIGIDE LA ACELAŞI NIVEL, CU CONSOLE (4R)

MODEL 2c BARA DREAPTĂ ÎNCASTRATĂ LA UN CAPĂT SITUATĂ PE UN REAZEM PUNCTUAL, CU CONSOLĂ (I+R)

MODEL 2d BARA DREAPTĂ ÎNCASTRATĂ LA UN CAPĂT PE DOUĂ REAZEME PUNCTUALE CU CONSOLĂ (I+2R)

MODELUL 2e ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE ÎNCASTRATĂ LA AMBELE CAPETE (2I)

MODELUL 2f ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE ÎNCASTRATĂ LA CAPETE CU UN REAZEM INTERMEDIAR PUNCTUAL(2I+R)

MODELUL 3a SISTEM PLAN FORMAT DIN DOUĂ BARE DREPTE SUDATE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINAT

MODELUL 3b SISTEM PLAN FORMAT DIN DOUĂ BARE DREPTE SUDATE DE TREI ORI STATIC NEDETERMINAT

MODELUL 3b SISTEM PLAN FORMAT DIN TREI BARE DREPTE SUDATE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINAT

MODELUL 3c SISTEM PLAN FORMAT DIN TREI BARE DREPTE SUDATE DE TREI ORI STATIC NEDETERMINAT

MODELUL 4 FLAMBAJUL DE COMRESIUNE AXIALĂ A BAREI DREPTE

MODELUL 5 BARA CURBĂ PLANĂ CU AXA GEOMETRICĂ UN ARC DE CERC

ANEXE CU TABELE EXCEL

ANEXA 1a ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE ÎN CONSOLĂ

ANEXA 1b ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE FĂRĂ CONSOLE SITUATĂ PE DOUĂ REAZEME PUNCTUALE RIGIDE

ANEXA 1c ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE CU CONSOLE SITUATĂ PE DOUĂ REAZEME PUNCTUALE RIGIDE

ANEXA 2a GRINDA CONTINUĂ PE TREI REAZEME PUNCTUALE RIGIDE SITUATE LA ACELAŞI NIVEL

ANEXA 3a SISTEM PLAN FORMAT DIN DOUĂ BARE DREPTE SUDATE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINAT

ANEXA 3b SISTEM PLAN FORMAT DIN DOUĂ BARE DREPTE SUDATE DE TREI ORI STATIC NEDETERMINAT

ANEXA 3b SISTEM PLAN FORMAT DIN TREI BARE DREPTE SUDATE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINAT

ANEXA 3c SISTEM PLAN FORMAT DIN TREI BARE DREPTE SUDATE DE TREI ORI STATIC NEDETERMINAT

ANEXA 5 BARA CURBĂ PLANĂ CU AXA GEOMETRICĂ UN ARC DE CERC

PREFAȚĂ

Această lucrare este rezultatul experienței acumulată în activitatea de curs şi seminar la disciplina *Rezistența materialelor,* activitate desfăşurată de autori cu studenții Facultăților de Ştiința şi Ingineria Materialelor, Inginerie Electrică şi Colegiului Universitar Tehnic din cadrul *Universității "Valahia" Târgovişte* în perioada 1992-2002.

Lucrarea cuprinde 5 capitole într-o formă de prezentare mai puțin obişnuită, sub forma unor **Modele** (matrițe) rezolvate, însoțite de rezultate pentru un număr de cazuri particulare, de tipul celor propuse pentru examen. S-au prezentat de asemenea, la fiecare capitol, algoritmii corespunzători de rezolvare cu ajutorul programului Microsoft EXCEL, cu cîte un set de rezultate pentru fiecare caz. Forma de prezentare este clară, fiecare **Model** fiind bine fundamentat şi uşor de asimilat.

Autorii speră că prezentarea sub această formă a problemelor rezolvate şi propuse va fi utilă în pregătirea examenului de Rezistența materialelor, precum şi pentru toți cei interesați în rezolvarea unor aplicații practice inginereşti.

Autorii mulțumesc pe acestă cale tuturor *studenților şi colegilor* pentru sugestiile pe care le-au adus în timpul redactării acestei lucrări, d-lui prof. dr. ing. Horia GHEORGHIU şi conf. dr. ing. Anton HADAR de la Catedra de Rezistența materialelor din cadrul Universității POLITEHNICA Bucureşti pentru observațiile făcute şi răbdarea de care au dat dovadă la parcurgerea manuscrisului.

De asemenea mulțumim călduros *sponsorilor* care au contribuit la apariția acestei ediții, şi pe care îi asigurăm atât de recunoştința noastră cât mai ales de cea a beneficiarilor acestei lucrări.

Târgovişte **Autorii**

MODELUL 1a

ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE ÎN CONSOLĂ

1. Enunț

Se consideră o bară dreaptă OA în consolă, de lungime *L,* având secțiunea din fig. 1a.2 constantă pe lungimea sa (rigiditatea la încovoiere EI_y constantă) supusă la încovoiere simplă sub acțiunea a trei tipuri de sarcini: o forță concentrată *P* acționând la distanța *b* , o sarcină distribuită *q* acționând între distanțele *c* şi *d* şi moment încovoietor *N* acționând la distanța *e* de capătul barei, cazul general fiind în fig. 1a.1.

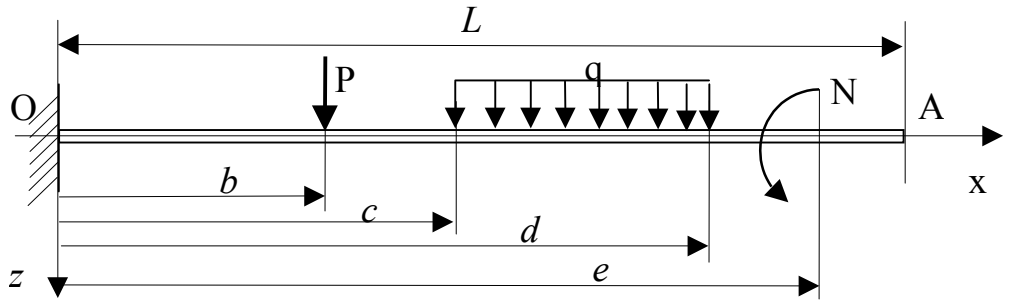


Fig. 1a.1

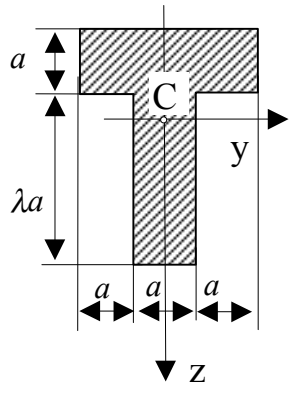


Fig 1a.2

Se cere:

1) *Să se determine reacțiunile din încastrare* $\boldsymbol{V_0}$ *şi* $\boldsymbol{M_0}$*;*
2) *Să se traseze diagramele de forțe tăietoare* ***T*** *şi momente încovoietoare* ***M*** *şi să se detremine momentul maxim şi poziția secțiunii periculoase;*
3) *momentul de inerție şi modulul de rezistență al secțiunii în funcție de* ***a****;*
4) *dimensionarea barei (parametrul* ***a*** *al secțiunii);*
5) *deplasarea şi rotirea secțiunii* ***A*** *aflată la capătul barei (*$\boldsymbol{w_A}$ *şi* $\boldsymbol{\varphi_A}$*)*
6) *tensiunea tangențială maximă* $\boldsymbol{\tau_{max}}$ *(conform formulei lui Juravski);*

CAZ PARTICULAR

Se consideră următorul caz particular pentru care valorile parametrilor date în tabelul de mai jos (se dau: σ_a=150 MPa; E= $2{,}1\cdot10^5$MPa).

b	**c**	**d**	**e**	**L**	**P**	**q**	**N**	**λ**
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(kN)	(kN/m)	(kN/m)	-
2	2	6	6	8	15	2	-10	3

Pentru datele din tabel, configurația de încărcare a barei este cea din fig. 1a.3

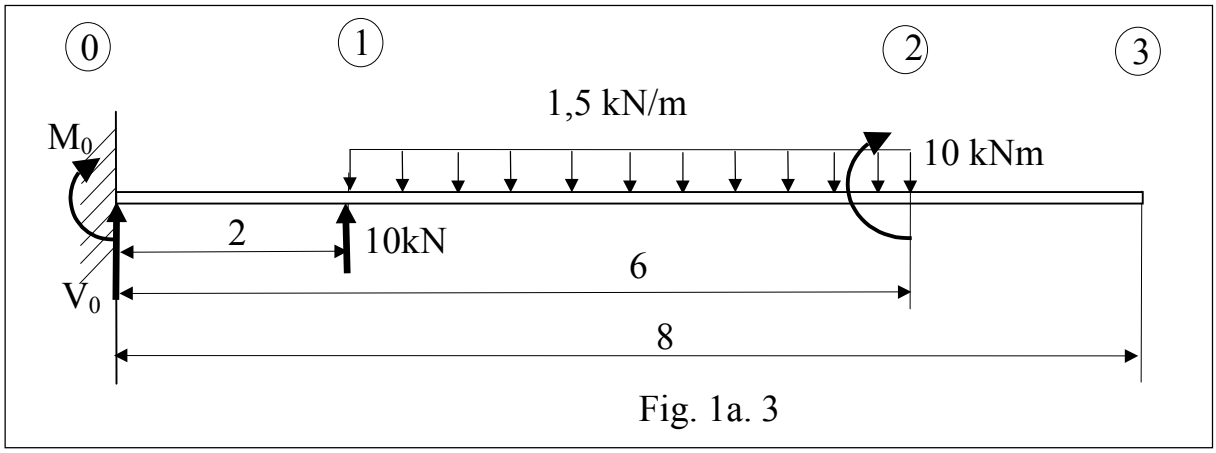


Fig. 1a. 3

1. Determinarea reacțiunilor se face cu ajutorul următoarelor relații:

$$V_0 = P + q(d-c); \qquad M_0 = N - P\cdot b - \frac{q}{2}\cdot(d^2 - c^2)$$

Înlocuind valorile numerice se obține: $V_0 = -4\ kN$; $M_0 = 6\,kNm$;

2. Diagramele de eforturi T şi M, forța tăietoare şi momentul maxim

Se trasează diagramele *T=T(x)* şi *M=M(x)* din fig. 1a.4.

Din diagrama *T(x)* se determină efortul tăietor maxim T_{max}*=6 kN,* iar din diagrama *M(x)* se determină momentul încovoietor maxim M_{max}*= 10 kNm*

3. Momentul de inerție, modulul de rezistență şi momentul static

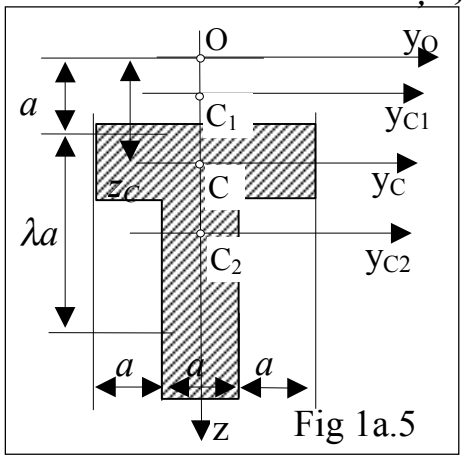


Fig 1a.5

În figura 1a.5 este reprezentată secțiunea barei şi axele y_0, y_1, y_2, y_C , care trec prin punctele O, C_1, C_2 şi C, unde :

- punctul O este un punct de referință al secțiunii;

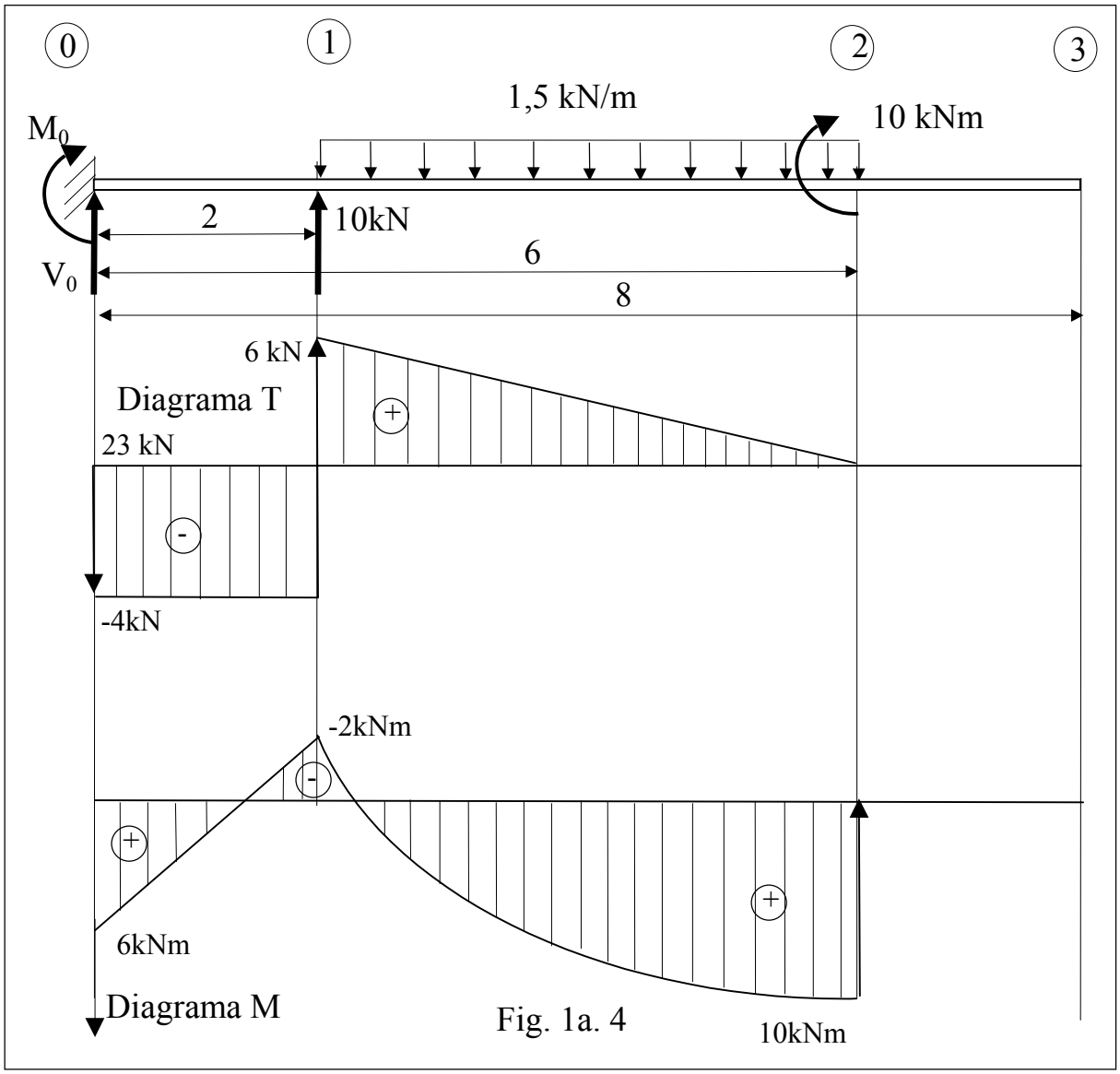


Fig. 1a. 4

- punctul C_1 -centrul de greutate al dreptunghiului;
- punctul C_2 -centrul de greutate al triunghiului;
- punctul C - centrul de greutate al secțiunii.

Notațiile din fig. 1a.5 au următoarele semnificații:

- z_1 -distanța OC_1; z_2 -distanța OC_2; z_C -distanța OC; d_1 -distanța CC_1; d_2 -distanța CC_2; z_{max} -distanța de la axa neutră până la fibra extremă;
- A_1 aria dreptunghiului 1; A_2 aria dreptunghiului 2;
- I_{y1} momentul de inerție al dreptunghiului față de axa ce trece prin C_1 (C_1y);
- I_{y2} momentul de inerție al triunghiului față de axa ce trece prin C_2 (C_2y);
- I_{yC} momentul de inerție al suprafeței față de axa ce trece prin C (Cy);
- W_y modulul de rezistență la încovoiere față de axa ce trece prin C (Cy).

Relațiile de calcul utilizate sunt:

$$z_C = \frac{A_1 z_1 + A_2 z_2}{A_1 + A_2} = \frac{3a^2 \cdot 0{,}5a + \lambda a^2 \cdot (a + 0{,}5\lambda a)}{3a^2 + \lambda a^2} = \frac{0{,}5\lambda^2 + \lambda + 1{,}5}{3 + \lambda} a$$

unde $A_1=3a^2$; $z_1=0{,}5a$; $A_2=\lambda as^2$; $z_2=a+0{,}5\lambda a$;

- momentul de inerție al suprafeței compuse în raport cu axa ce trece prin centrul ei de greutate *Cy* este: $I_{yC} = I_{y1C} + I_{y2C}$

  unde momentele de inerție ale celor două suprafețe simple (dreptunghi şi triunghi) în raport cu axe ce trec prin centrele lor de greutate sunt :

$$I_{y1} = \frac{3a \cdot a^3}{12}; \quad I_{y2} = \frac{a \cdot (\lambda a)^3}{12}$$

şi față de axa ce trece prin punctul C (formula formulei lui STEINER):

$$I_{y1} = \frac{3a \cdot a^3}{12} + A_1 d_1^2; \quad I_{y2} = \frac{a \cdot (\lambda a)^3}{12} + A_2 d_2^2$$

unde: $d_1=z_C - 0{,}5a$; $d_2=a+ 0{,}5\lambda a - z_C$;

Deci: $I_{y1C} = \left[0{,}25 + 3\left(\frac{z_C}{a} - 0{,}5 \right)^2 \right] a^4$; $I_{y2C} = \left[\frac{\lambda^3}{12} + \lambda \left(1 + 0{,}5\lambda - \frac{z_C}{a} \right)^2 \right] a^4$.

Iar momentul de inerție al suprafeței compuse este: $I_{yC} = I_{y1C} + I_{y2C}$.

Modulul de rezistență al secțiunii W_y se calculează astfel:

$$W_y = \frac{I_{yC}}{z_{max}} = \frac{I_{yC}}{a + \lambda a - z_C}$$

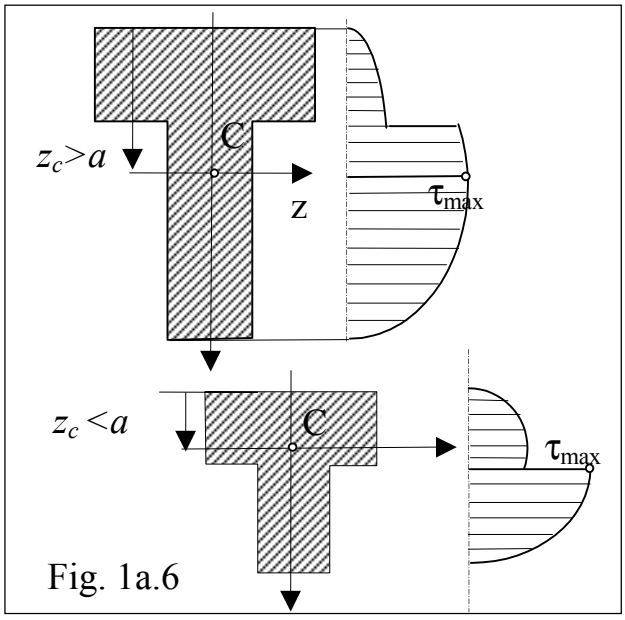


Fig. 1a.6

- Momentul static (fig. 1a.6) al unei jumătăți a secțiuni în raport cu axa *Cy* pentru $z_C \geq a$ se determină astfel: $S_{yC} = \frac{a(a + \lambda a - z_C)^2}{2}$
- Momentul static al secțiunii situată sub linia orizontală a dreptunghiului 1 pentru $z_C \leq a$ se determină astfel: $S_{yC} = 3a^2 (z_C - 0{,}5a)^2$

Înlocuind valoarea $\lambda=3$ în expresiile de mai sus se obțin următoarele rezultate: $z_C = 1{,}5a;\quad I_{yC} = 8{,}5a^4;\ W_y = 3{,}4\ a^3;\ S_{yC} = 3{,}125a^3$.

4. Dimensionarea barei la solicitarea de încovoiere

$$W_{ynec} = \frac{M_{iy\,max}}{\sigma_a};\quad 3{,}4a^3 = \frac{M_{iy\,max}}{\sigma_a} \quad\Rightarrow\quad a = \sqrt[3]{\frac{M_{iy\,max}}{3{,}4\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{10\cdot 10^6}{3{,}4\cdot 150}} = 26{,}96mm$$

Se alege *a=27 mm*

5. Calculul deplasării şi rotirii secțiunii A (3) (w_3 şi φ_3)

Relațiile folosite pentru sunt calculul deplasării şi rotirii secțiunii 3 sunt:

$$EIw = EIw_0 + EI\varphi_0 x + \Phi(x); \qquad EI\varphi = EI\varphi_0 + \Phi'(x)$$

unde Φ(x) este funcția de încărcare [1] şi se determină cu ajutorul relației:

$$\Phi(x) = \sum \frac{N_i(x-g_i)}{2\cdot 2!}\left(|x-g_i| + x - g_i\right) + \sum \frac{P_i(x-d_i)^2}{2\cdot 3!}\left(|x-d_i| + x - d_i\right) +$$

$$+ \sum \frac{q_i(x-e_i)^3}{2\cdot 4!}\left(|x-e_i| + x - e_i\right) - \sum \frac{q_i(x-f_i)^3}{2\cdot 4!}\left(|x-f_i| + x - f_i\right)$$

În cazul problemei date avem $w_0=0$, $\varphi_0=0$ şi aceste relații devin:

$$EIw_3 = \Phi(L); \qquad EI\varphi_3 = \Phi'(L)$$

unde $\Phi(L)$ şi $\Phi'(L)$ este funcția de încărcare, respectiv derivata funcției de încărcare în secțiunea 3 (pentru $x=L$):

$$\Phi(L) = -\frac{M_0L^2}{2} - \frac{V_0L^3}{6} + \frac{P(L-b)^3}{6} + \frac{q\left[(L-c)^4 - (L-d)^4\right]}{24} + \frac{N(L-e)^2}{2} = -110{,}666\ kNm^3$$

$$\Phi'(L) = -\frac{M_0L}{1} - \frac{V_0L^2}{2} + \frac{P(L-b)^2}{2} + \frac{q\left[(L-c)^3 - (L-d)^3\right]}{6} + \frac{N(L-e)}{1} = -28\ kNm^2$$

înlocuind valorile se obține:

$$w_3 = \frac{\Phi(L)}{EI} = \frac{-110{,}666\cdot 10^{12}}{2{,}1\cdot 10^5\cdot 8{,}5\cdot 27^4} = -116{,}66\ \ mm$$

$$\varphi_3 = \frac{\Phi'(L)}{EI} = \frac{-28\cdot 10^9\cdot 180}{2{,}1\cdot 10^5\cdot 8{,}5\cdot 27^4\cdot 3{,}1426} = -1{,}691^0$$

[1] ***Funcția de încărcare*** a fost introdusă de **Prof. univ. dr. ing. Mihail Atanasiu** în lucrarea *"Metode analitice noi în Rezistența Materialelor"*, Ed. UPB, 1994

6. Calculul tensiunii tangențiale maxime

Deoarece în acest caz $z_C>a$, tensiunea tangențială maximă corespunde liniei ce trece prin centrul de greutate al seţiunii şi se determină cu ajutorul fomulei lui JURAVSKI:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot S_{cy}}{I_{yef} \cdot b}$$

unde: $T_{max}=23kN$ este efortul tăietor maxim

$I_y=8,5a^4$ momentul de inerţie la secţiunii barei

$b=a$ lățimea în dreptul centrului de greutate al secțiunii;

$S_{Cy}=3,125a^3$ momentul static al jumătății secțiunii .

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot S^*_{cy}}{I_{yef} \cdot b} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 3,125 \cdot 27^3}{8,5 \cdot 27^4 \cdot 27} = 3,026\ MPa\ .$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 1A UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea **Modelului 1a** s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Nr.	**b**	**c**	**d**	**e**	**L**	**lamda**	**P**	**q**	**N**	**Nr.**
	m	m	m	m	m		kN	KN/m	kNm	
	2	2	6	6	8	3	-10	1,5	10	

DATE DE IESIRE (REZULTATE)

L	M	N	O	P	Q	T	U	V
V_0	**M_0**	**M_{max}**	**z_C/a**	**I_y/a^4**	**W_z/a^3**	**a**	**[a]**	**I_{yef}**
H+I*(D-C)	J-H*B-0.5*I*(D^2-C^2)		(0.5*G^2+G+1.5) /(3+G)	0.25+3*(O-0.5)^2 +G^3/12 +G*(1+ 0.5*G-O)^2	P/ (1+G-O)	(N/(Q*150))^(1/3)	INT(T)+1	P*U^4
-4	6	10	1,5	8,5	3,4	26,96	27	4517249

W	X	Y	Z	AA	AB	AC
Φ(L)	**Φ'(L)**	**w_3**	**φ_3**	**T_{max}**	**S**	**τ_{max}**
-M*F^2/2-L*F^3/6+H*(F-B)^3/6+I*((F-C)^4- (F-D)^4)/24+J*(F-E)^2/2	-M*F/1-L*F^2/2+H*(F-B)^2/2+I*((F-C)^3- (F-D)^3)/6+J*(F-E)/1	W*1e6/(2.1*V)	X*1e3*180/ (2.1*V*3.14)		Max(U^3*(1+G-O)^2/2, 3*U^3*(O-0.5)^2)	AA*AB/(U*V)
-110,667	-28	-116,66	-1,691	6	61509	3,026

Rezultatele obținute cu ajutorul acestui program pentru un set de 30 date de intrare sunt prezentate în **Anexa 1a,** iar diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare corespunzătoare sunt prezentate în continuare.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1a.1

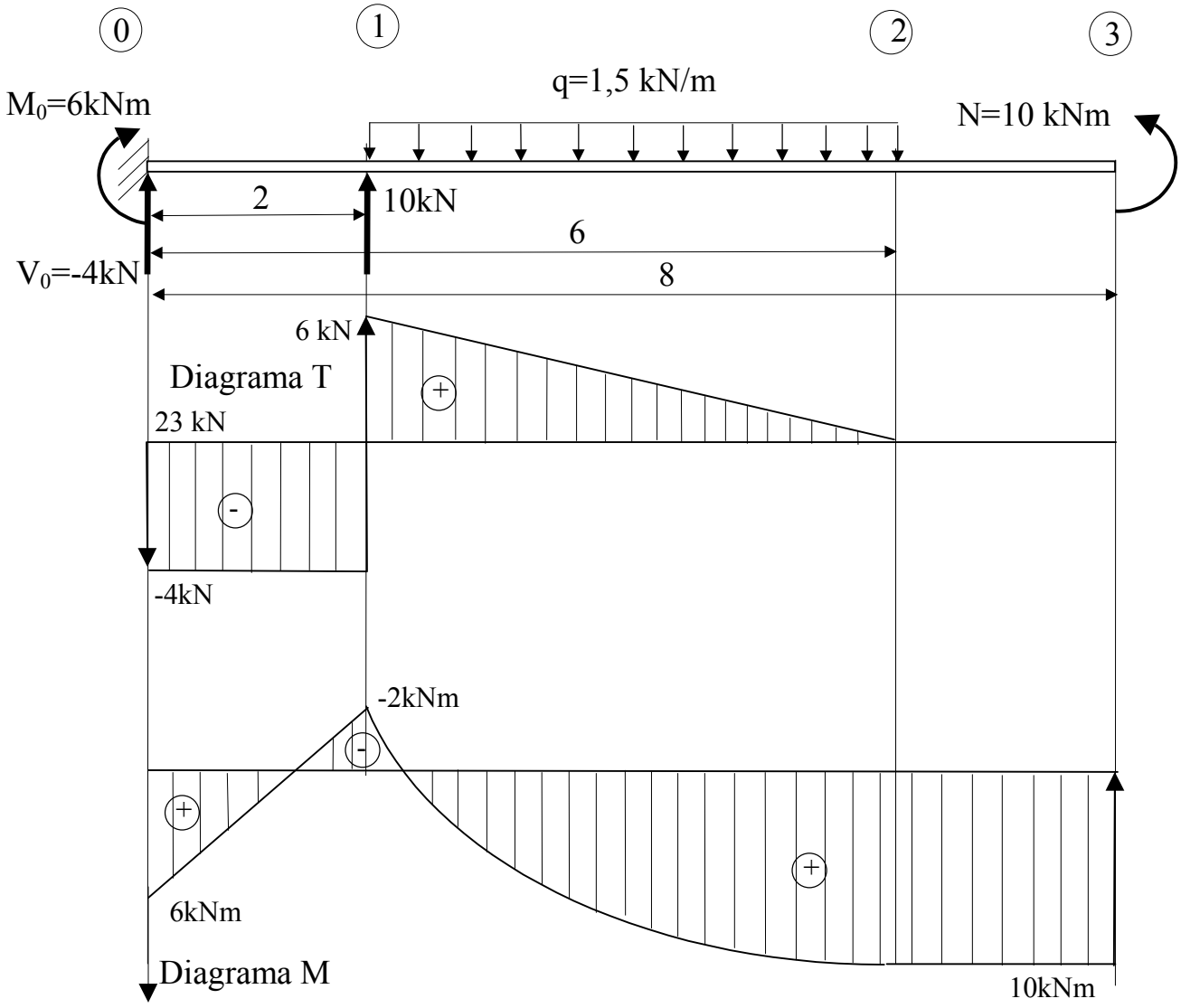
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
2	2	6	8	8	-10	1,5	10	3

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-4	6	10	1.5	8.5	3.4	27	-137.774	-2.898	6	3.026

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.2

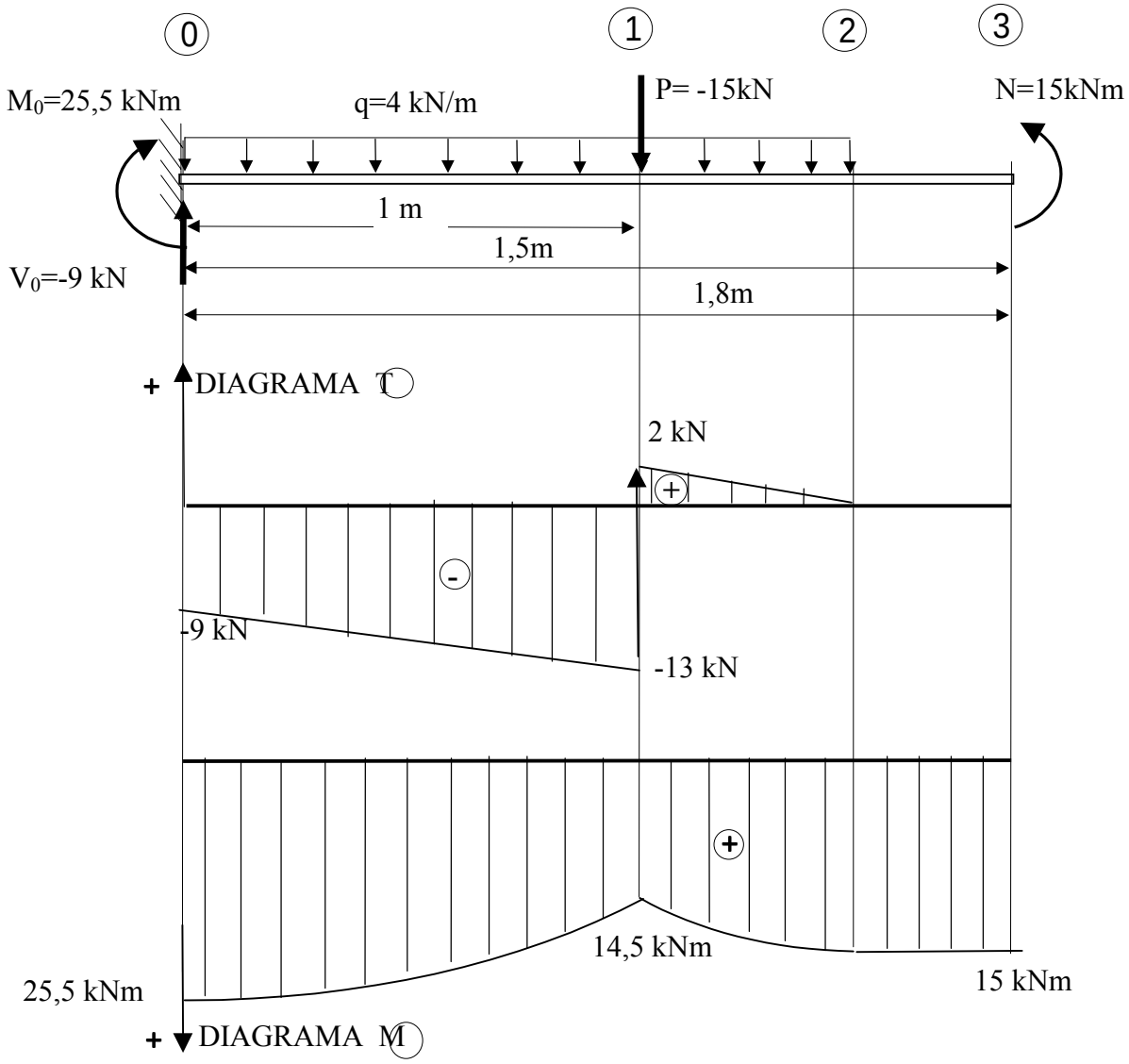
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
1	0	1.5	1.8	1.8	-15	4	15	2

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-9	25.5	25.5	1.1	3.617	1.904	45	-10.305	-0.593	13	3.204

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.3

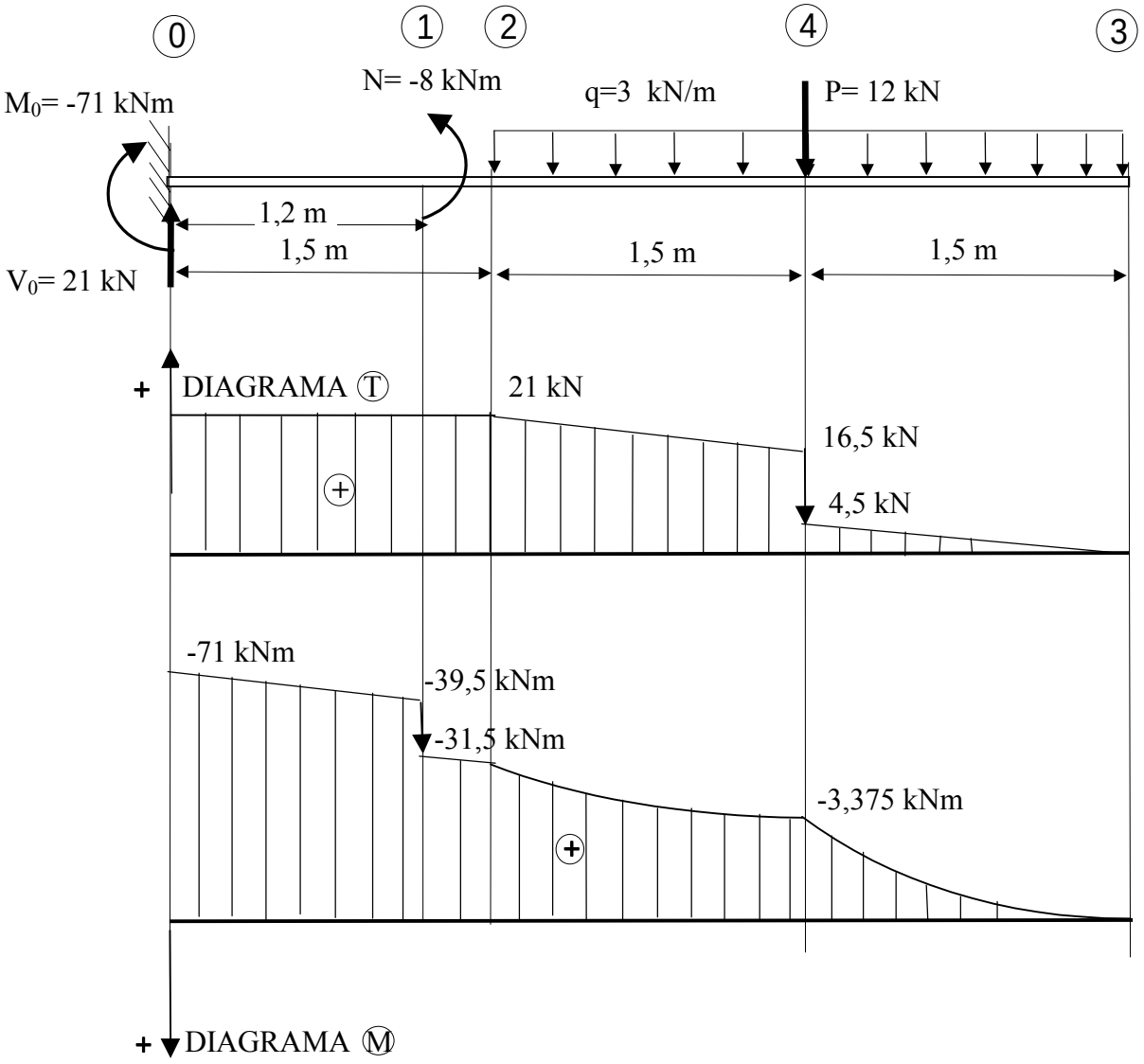
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
3	1.5	4.5	1.2	4.5	12	3	-8	3

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
21	-71	71	1.5	8.5	3.4	52	28.599	0.472	21	2.855

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.4

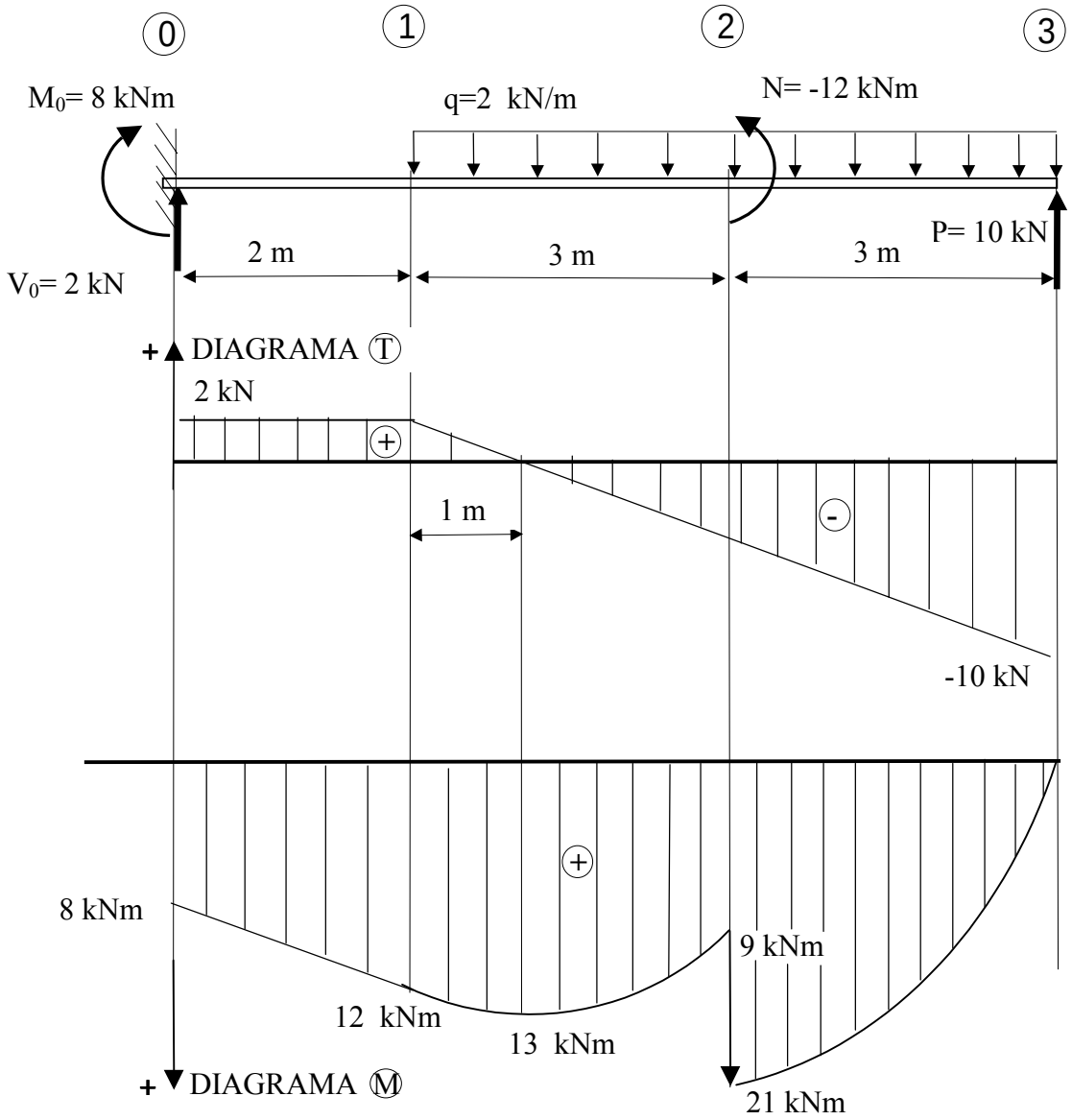
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
8	2	8	5	8	-10	2	-12	4

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
2	8	21	1.929	16.298	5.036	30	-134.429	-1.901	10	3.216

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.5

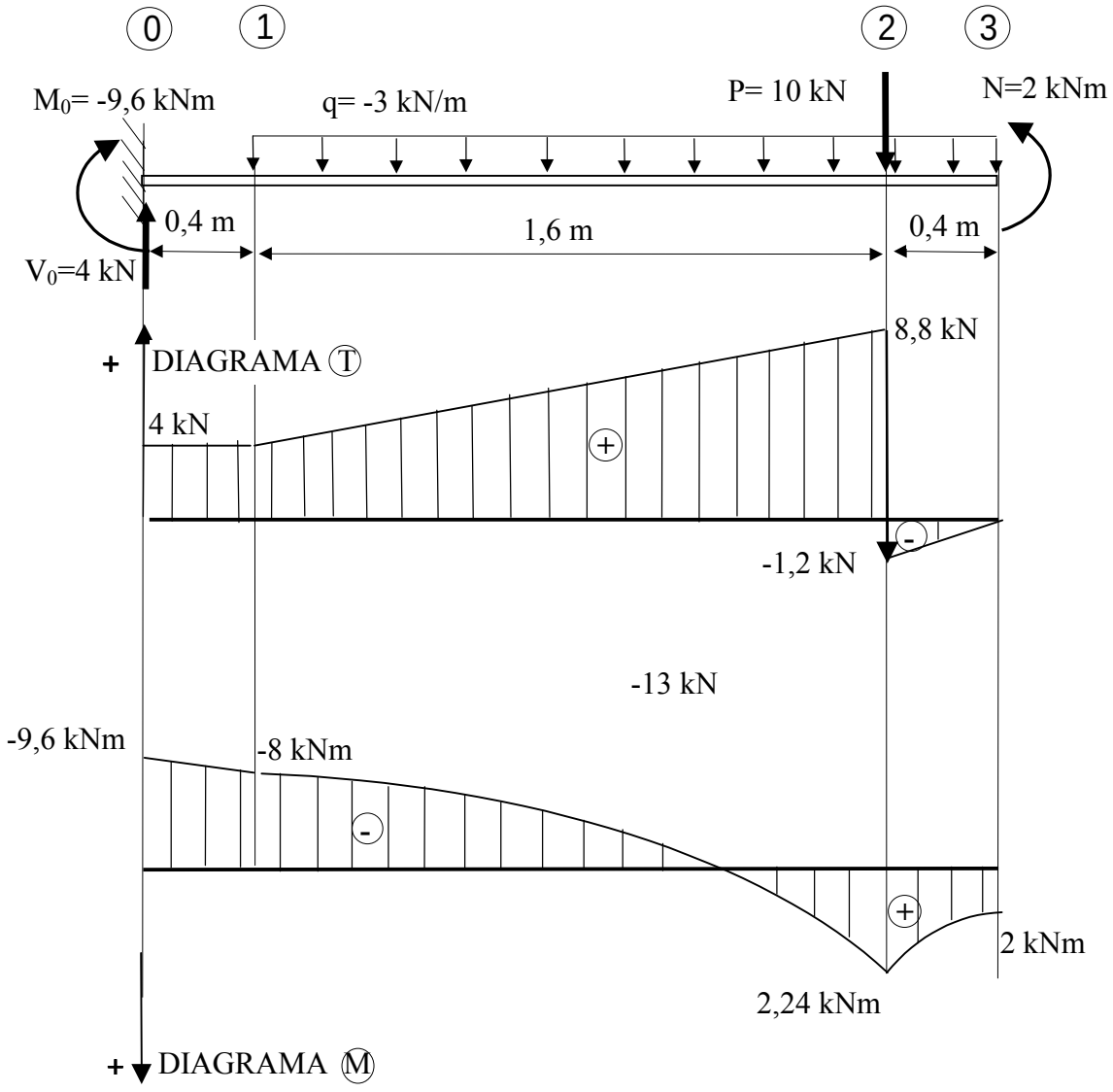
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
2	0.4	2.4	2.4	2.4	10	-3	2	5

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
4	-9.6	9.6	2.375	27.542	7.598	21	14.703	0.424	8.8	4.76

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.6

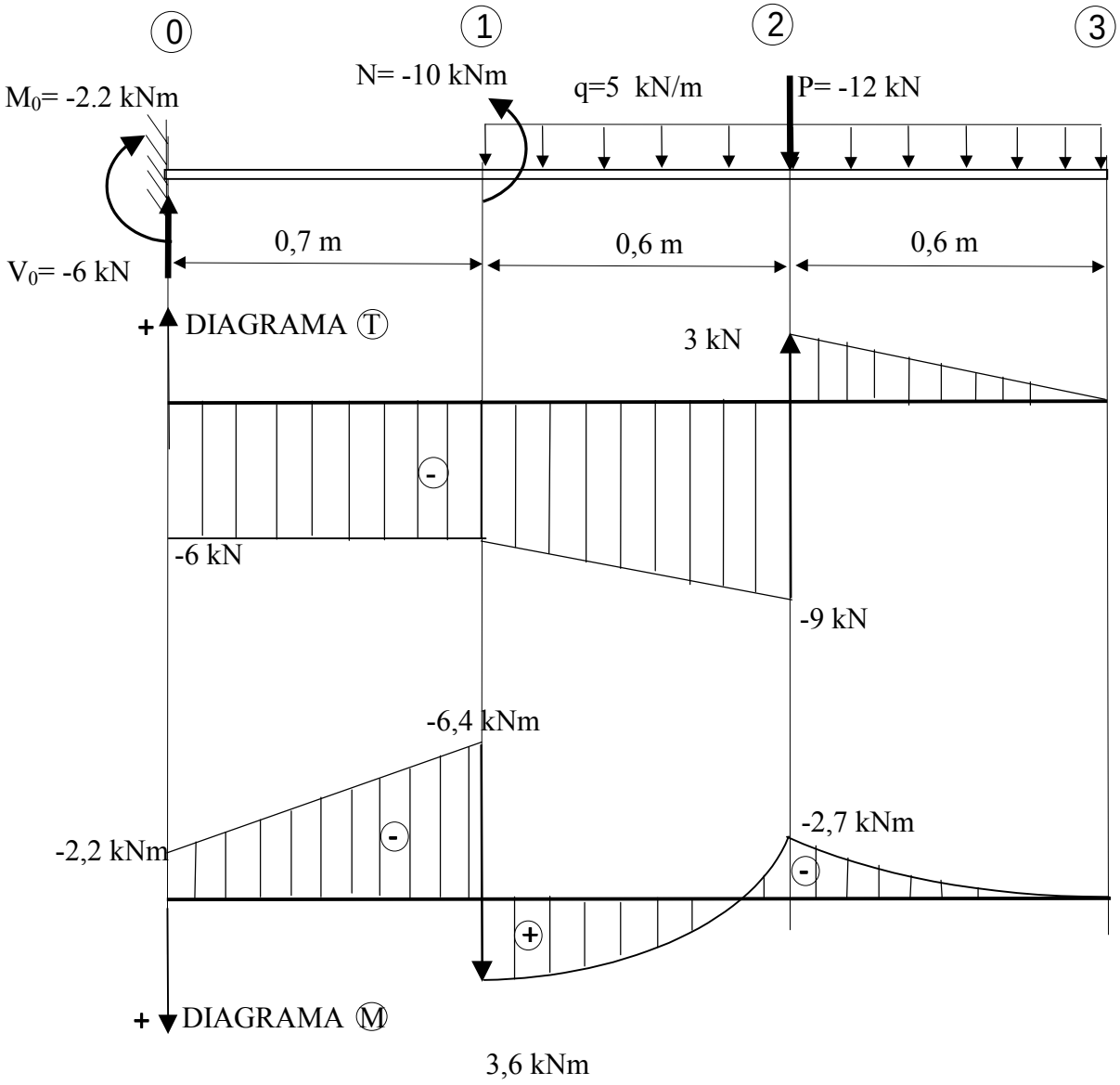
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
1.3	0.7	1.9	0.7	1.9	-12	5	-10	1

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-6	-2.2	6.4	0.75	1.083	0.867	37	8.514	0.308	9	1.138

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.7

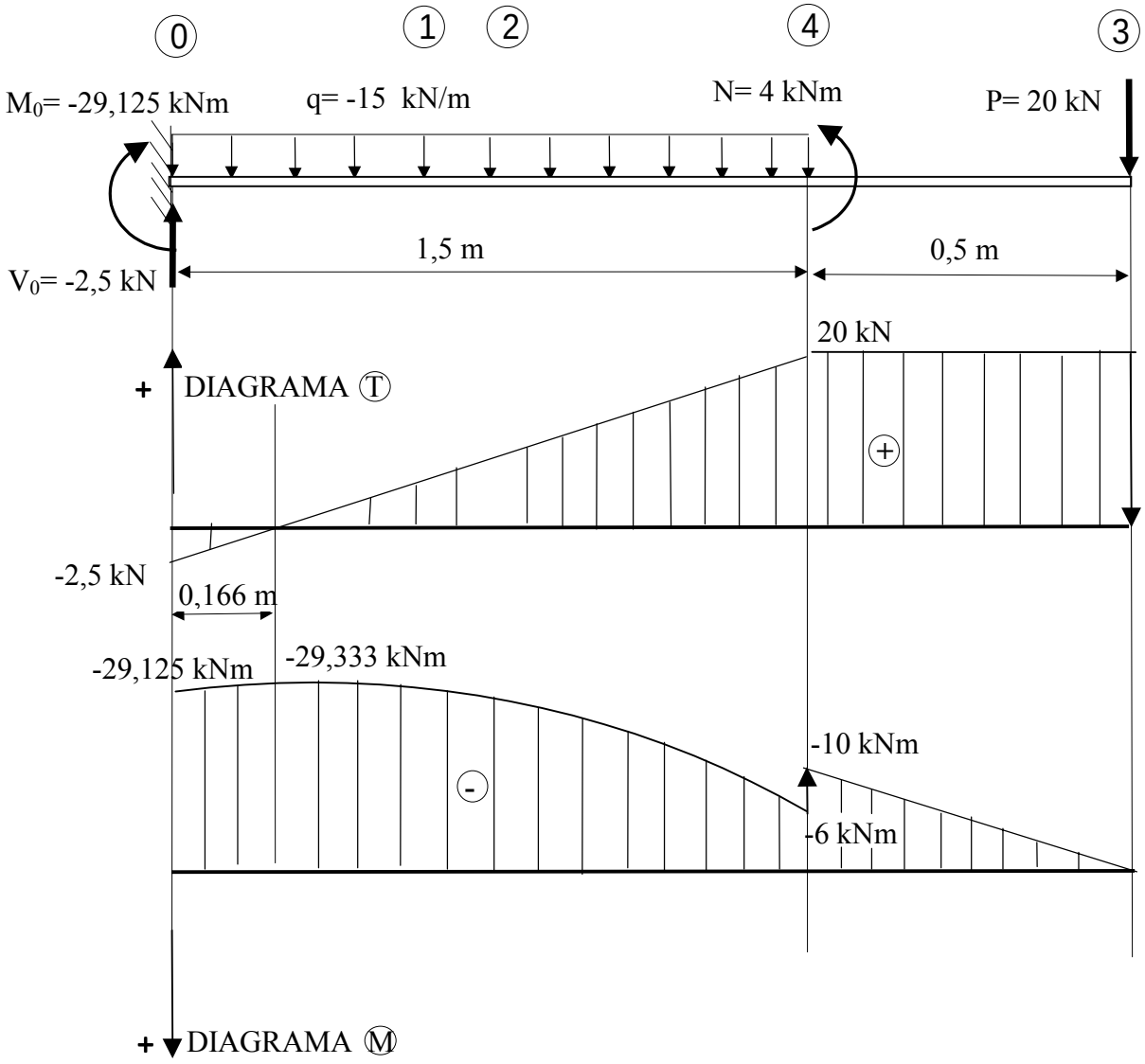
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
2.5	0	1.5	1.5	2.5	20	-15	4	2

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-2.5	-29.125	29.133	1.1	3.617	1.904	47	20.436	0.743	20	4.519

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.8

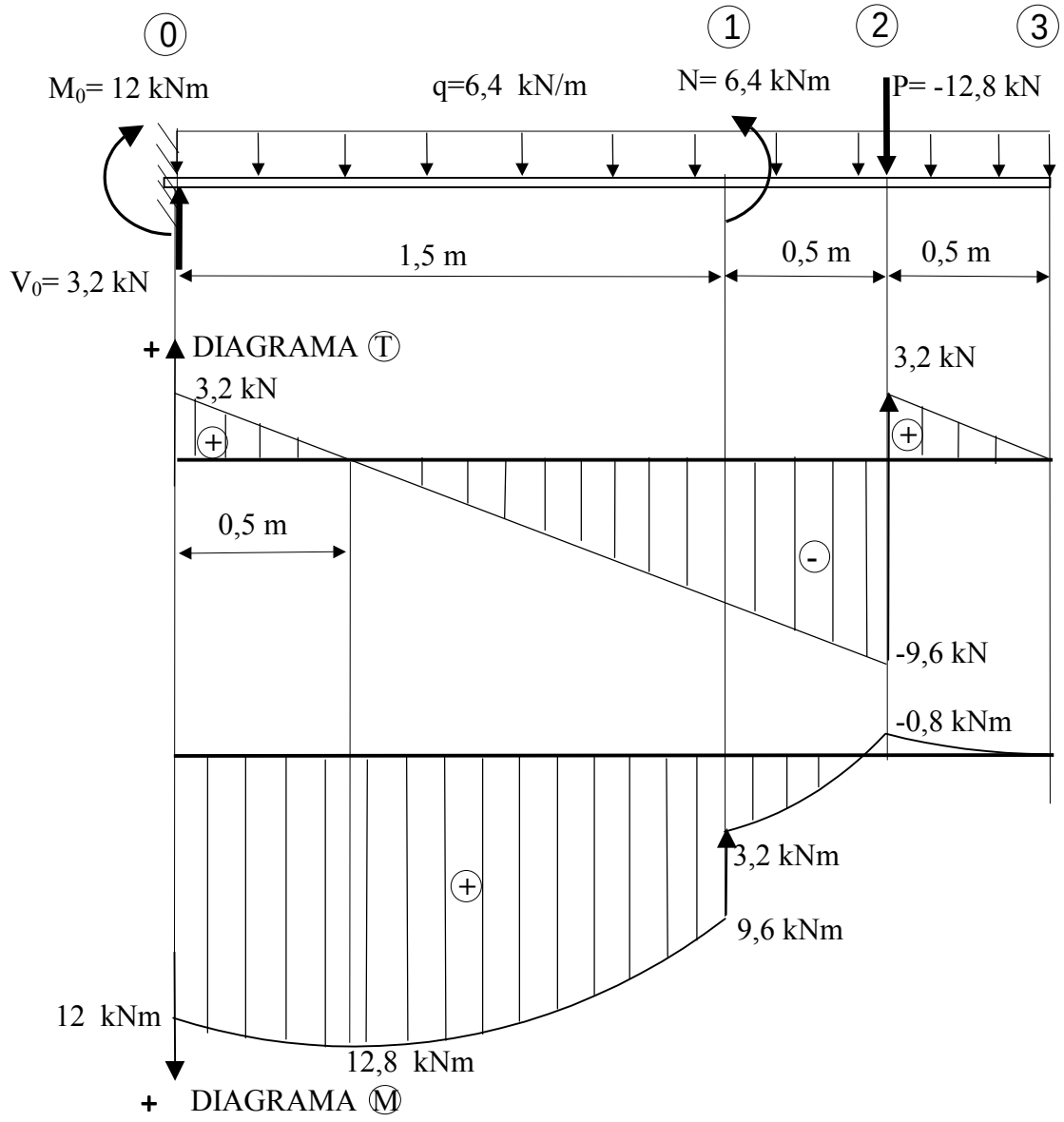
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
2	0	2.5	1.5	2.5	-12.8	6.4	6.4	3

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
3.2	12	12.8	1.5	8.5	3.4	30	-22.467	-0.734	9.6	3.922

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.9

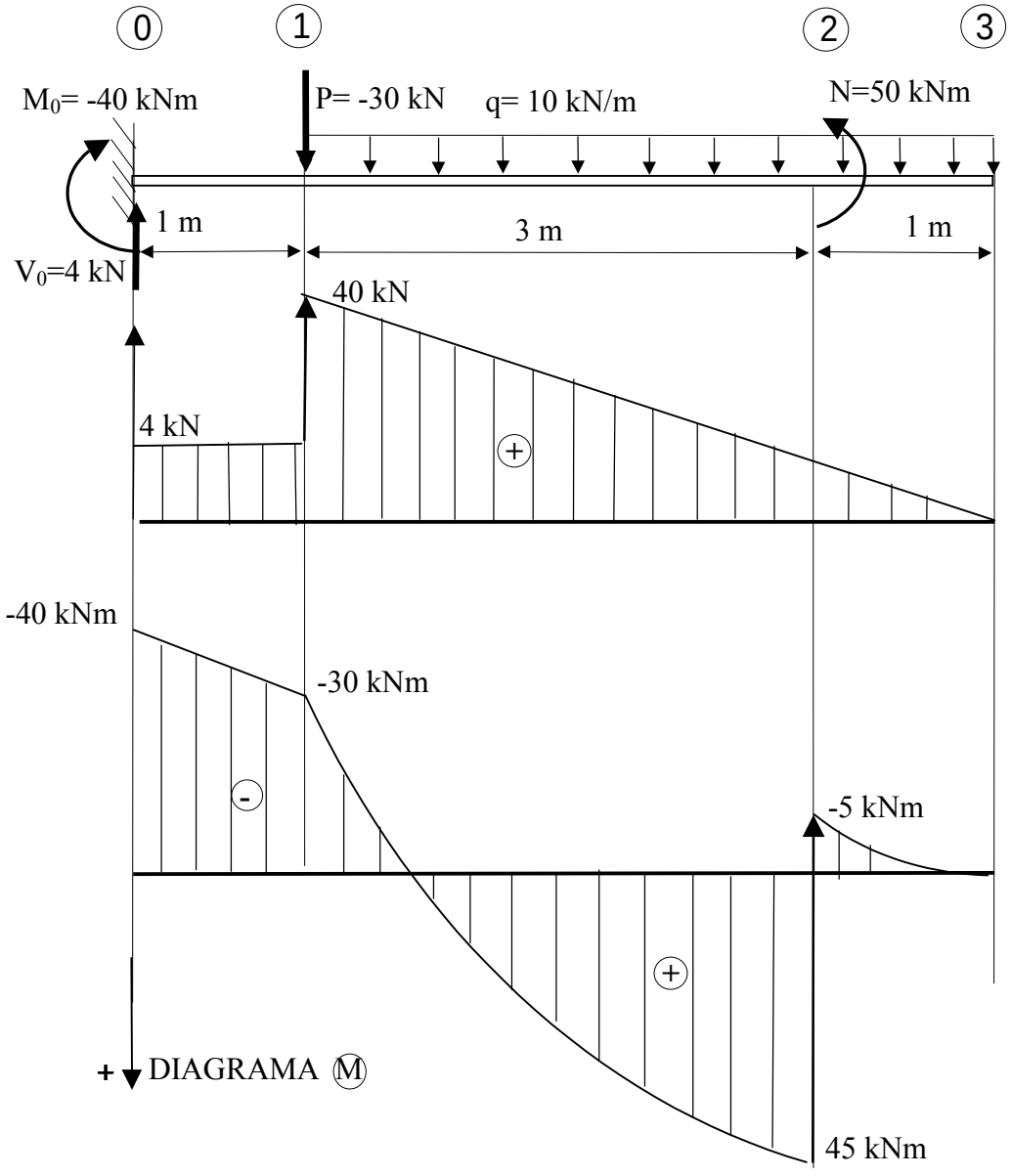
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
1	1	5	4	5	-30	10	50	4

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
10	-40	45	1.929	16.298	5.036	39	123.051	-0.06	40	7.611

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.10

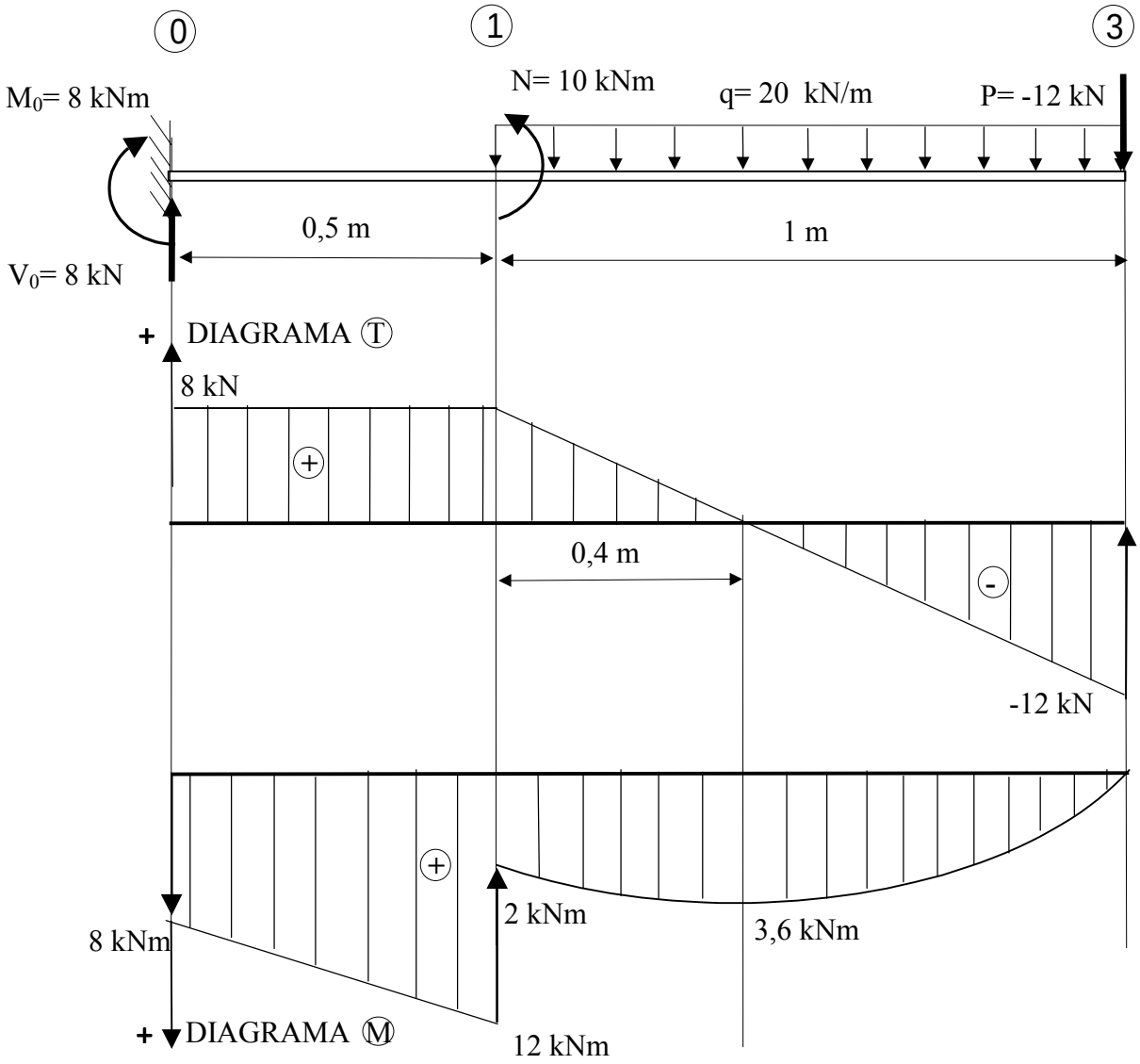
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
1.5	0.5	1.5	0.5	0.3	-12	20	10	5

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
8	8	12	2.375	27.542	7.598	22	1.132	-0.324	12	5.915

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.11

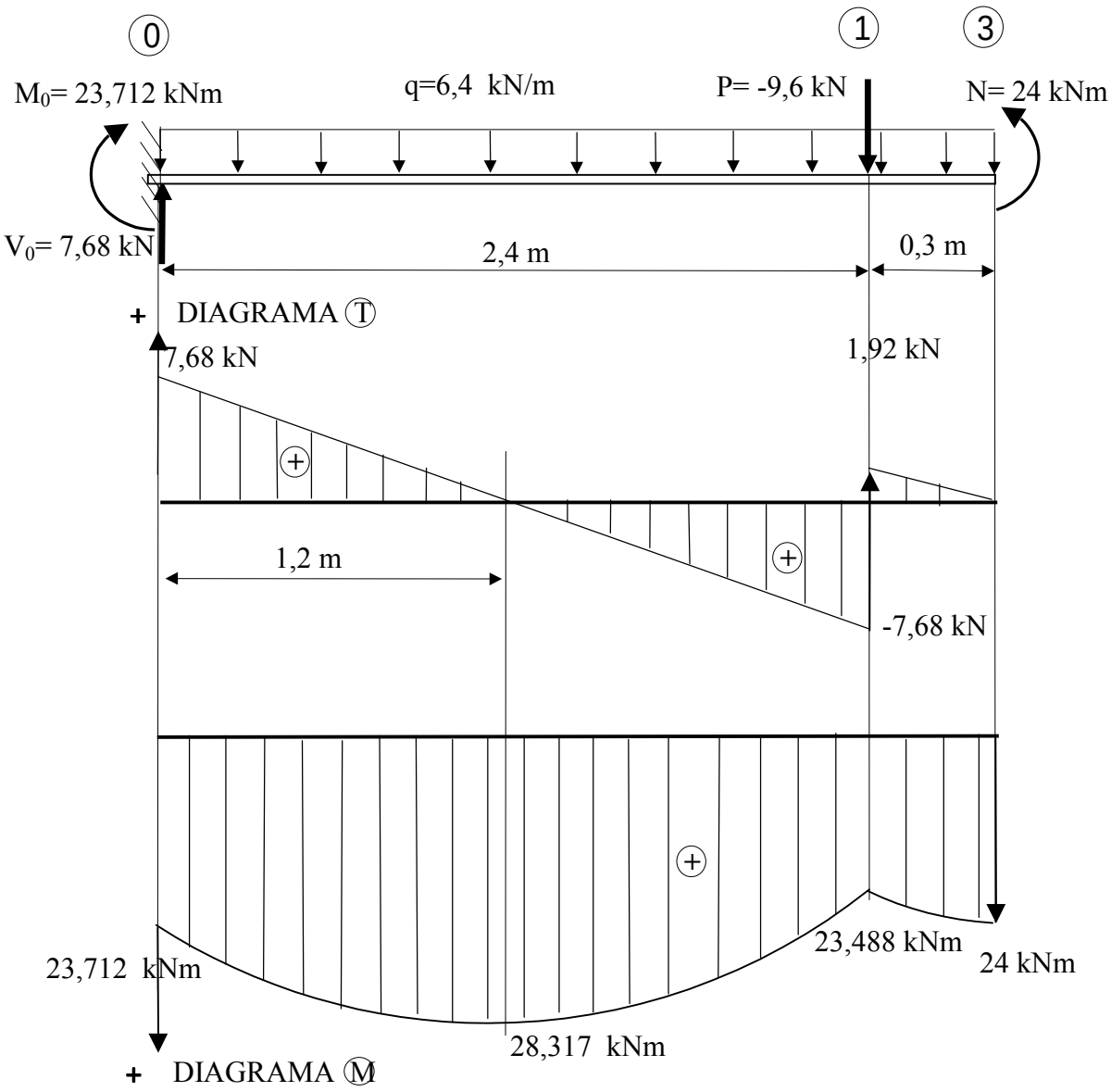
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
2.4	0	2.7	2.7	2.7	-9.6	6.4	24	1

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
7.68	23.712	28.317	0.75	1.083	0.867	61	-30.952	-1.299	7.86	0.366

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.12

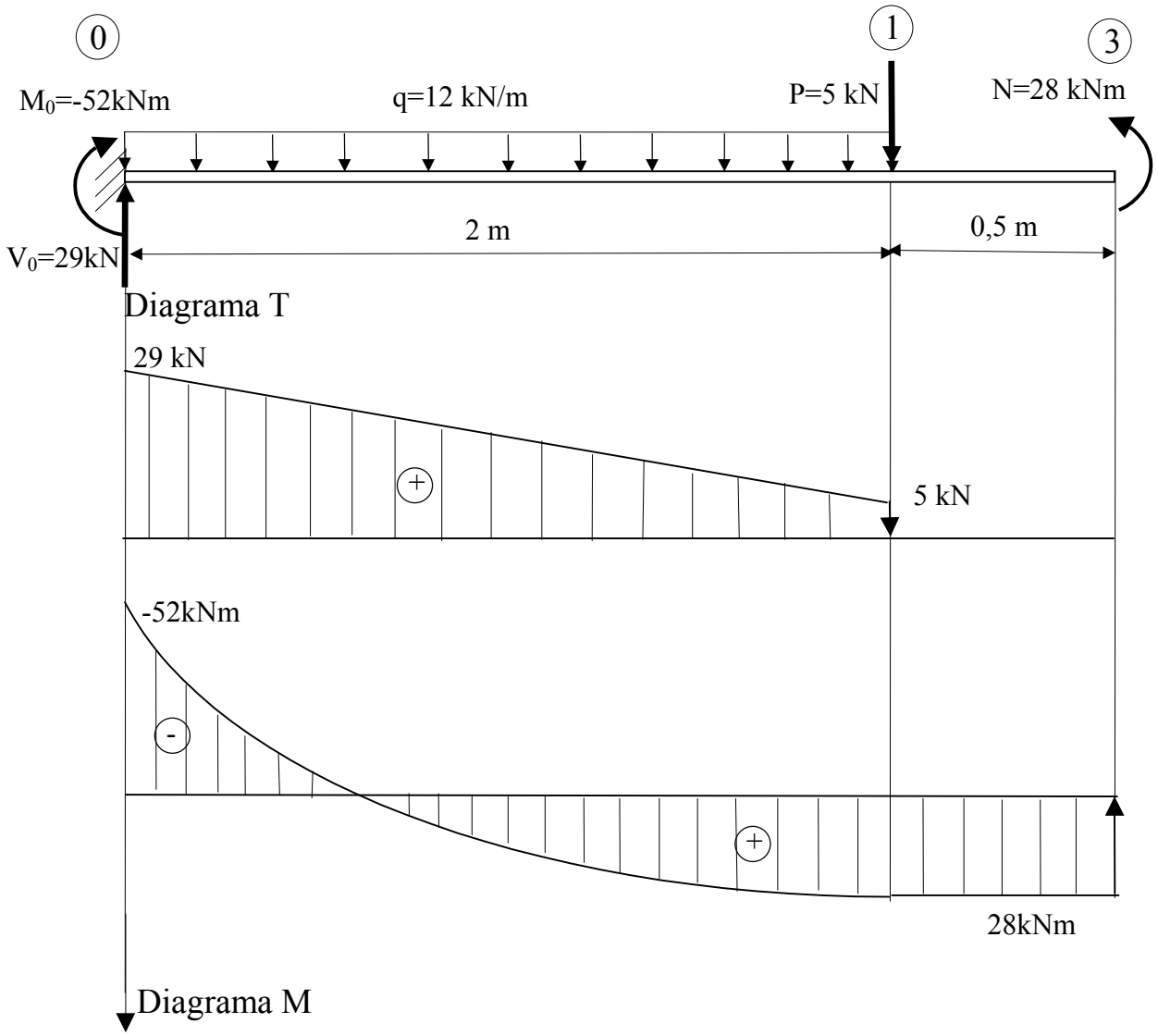
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
2	0	2	2.5	2.5	5	12	-18	2

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
29	-52	52	1.1	3.617	1.904	57	13.294	0.507	29	4.455

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.13

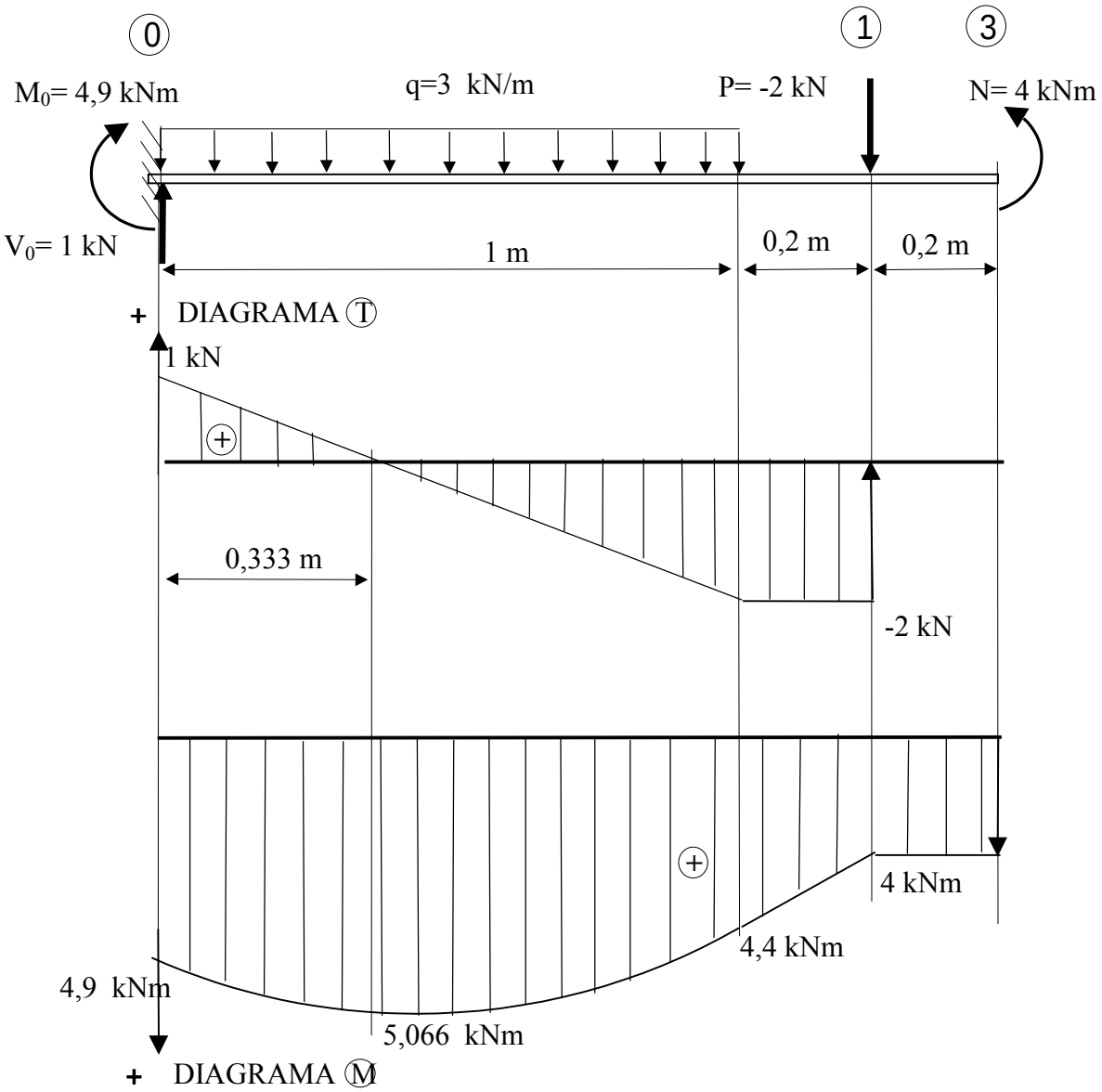
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
1.2	0	1	1.4	1.4	-2	3	4	3

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
1	4.9	5.066	1.5	8.5	3.4	22	-11.443	-0.896	2	1.519

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.14

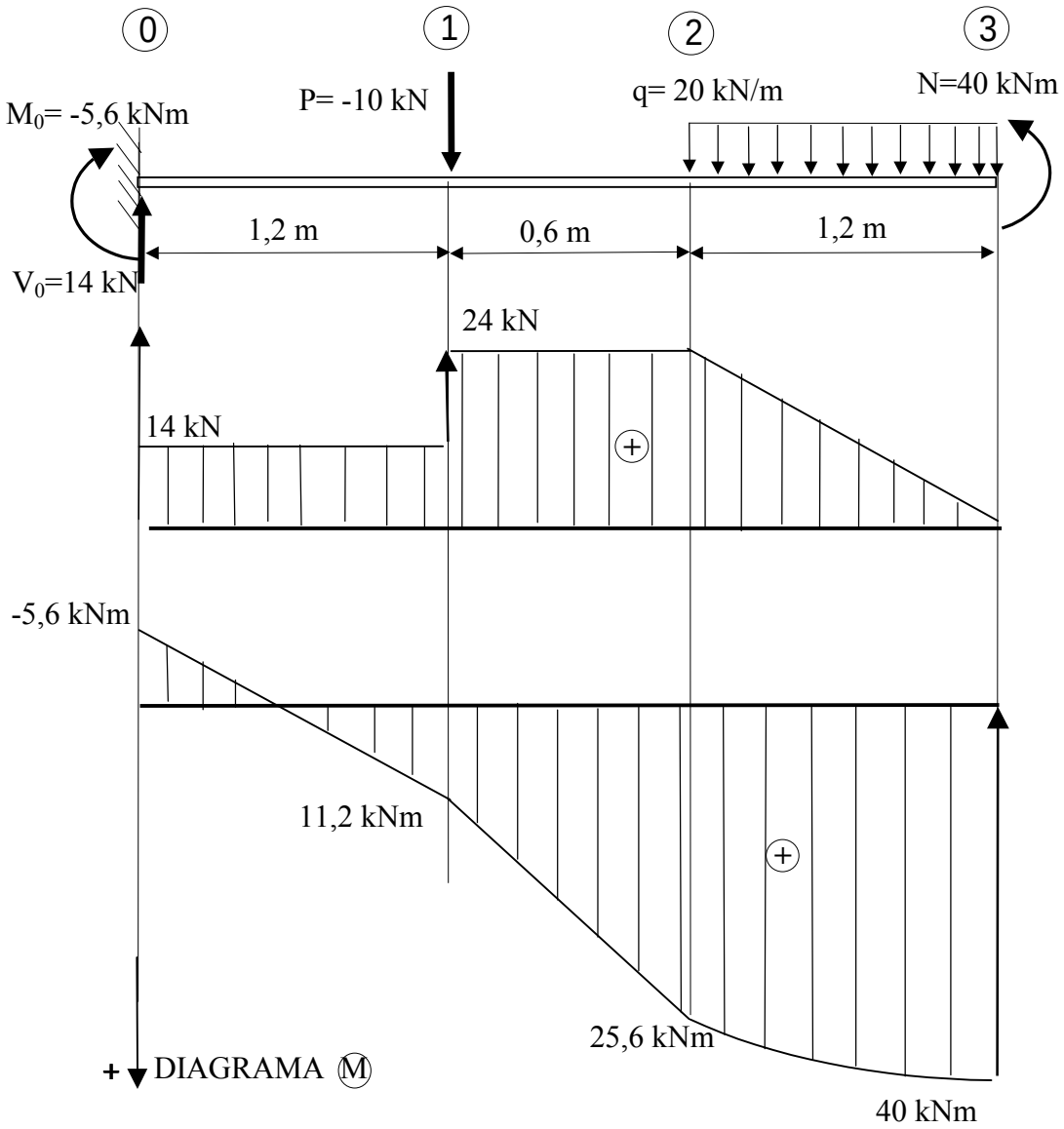
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
1.2	1.8	3	3	3	-10	20	40	4

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
14	-5.6	40	1.929	16.298	5.036	37	-7.139	-0.506	24	5.074

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.15

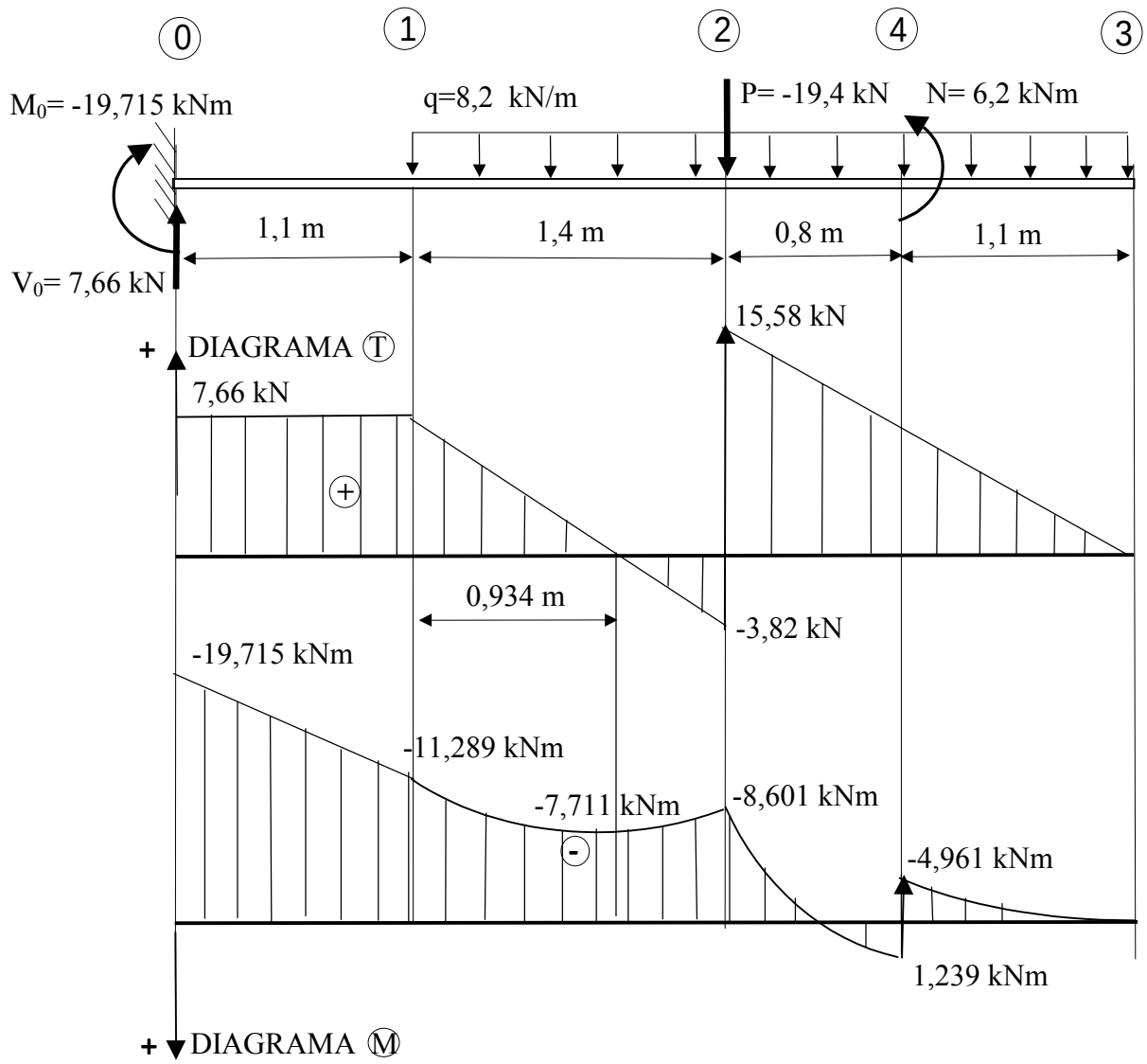
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
2.5	1.1	4.4	3.3	4.4	-19.4	8.2	6.2	5

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
7.66	-19.715	19.715	2.375	27.542	7.598	26	39.418	0.726	15.58	5.498

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.16

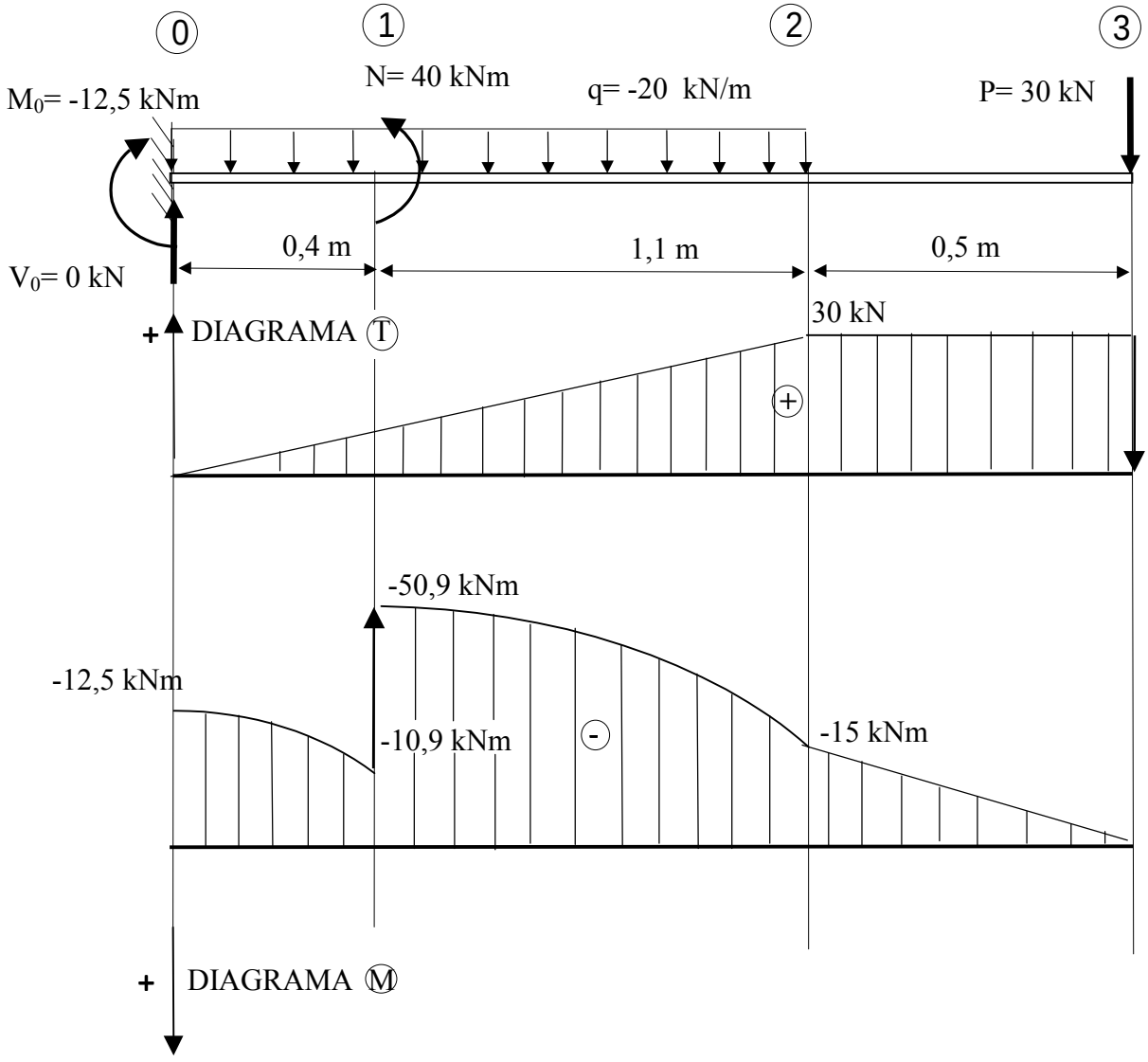
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
2.5	0	1.5	0.4	2.5	30	-20	40	1

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
0	-12.5	50.9	0.75	1.083	0.867	74	14.005	0.558	30	0.948

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.17

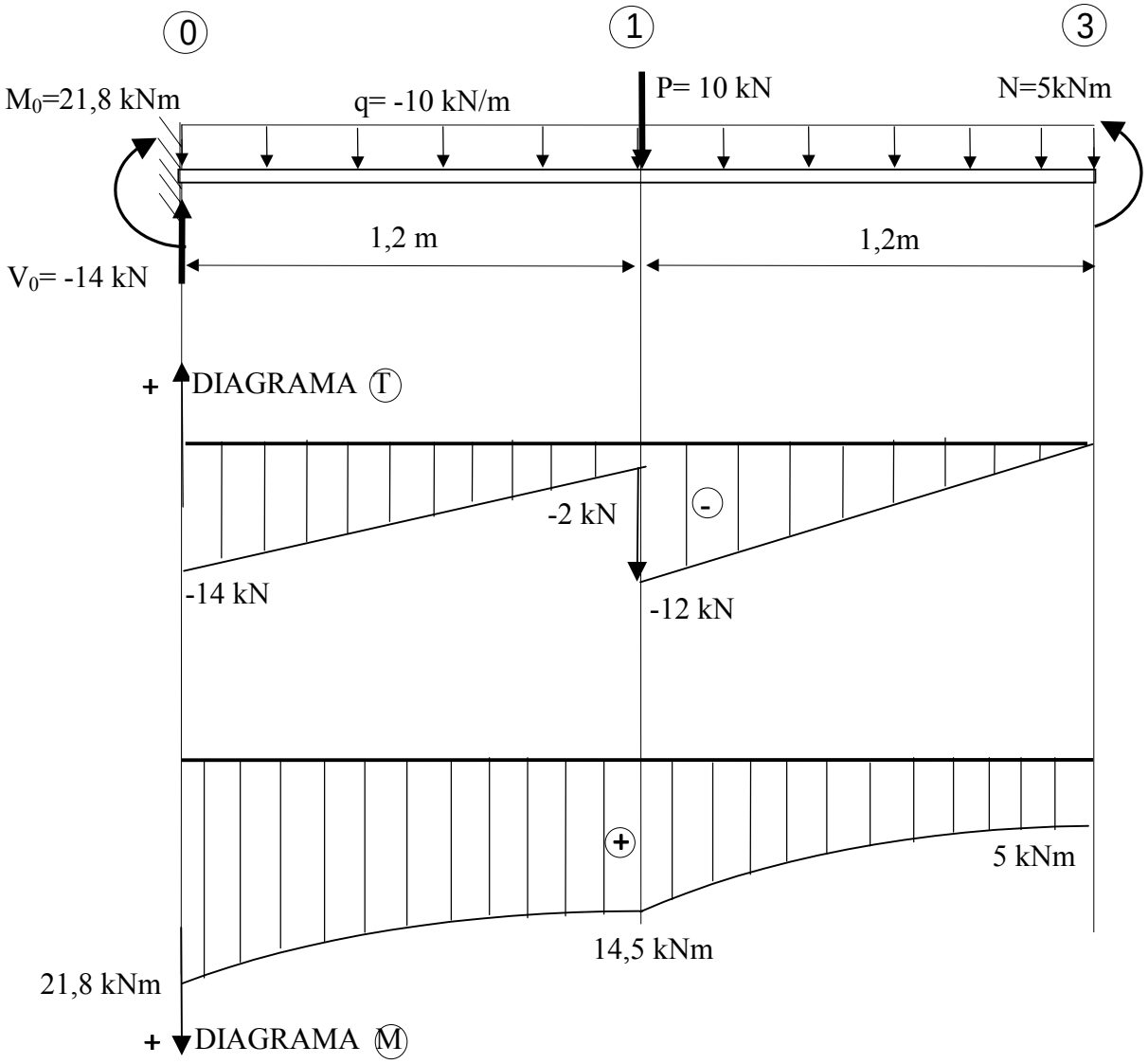
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
1.2	0	2.4	1.2	2.4	10	-10	5	2

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-14	21.8	21.8	1.1	3.617	1.904	43	-14.585	-0.482	14	3.779

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.18

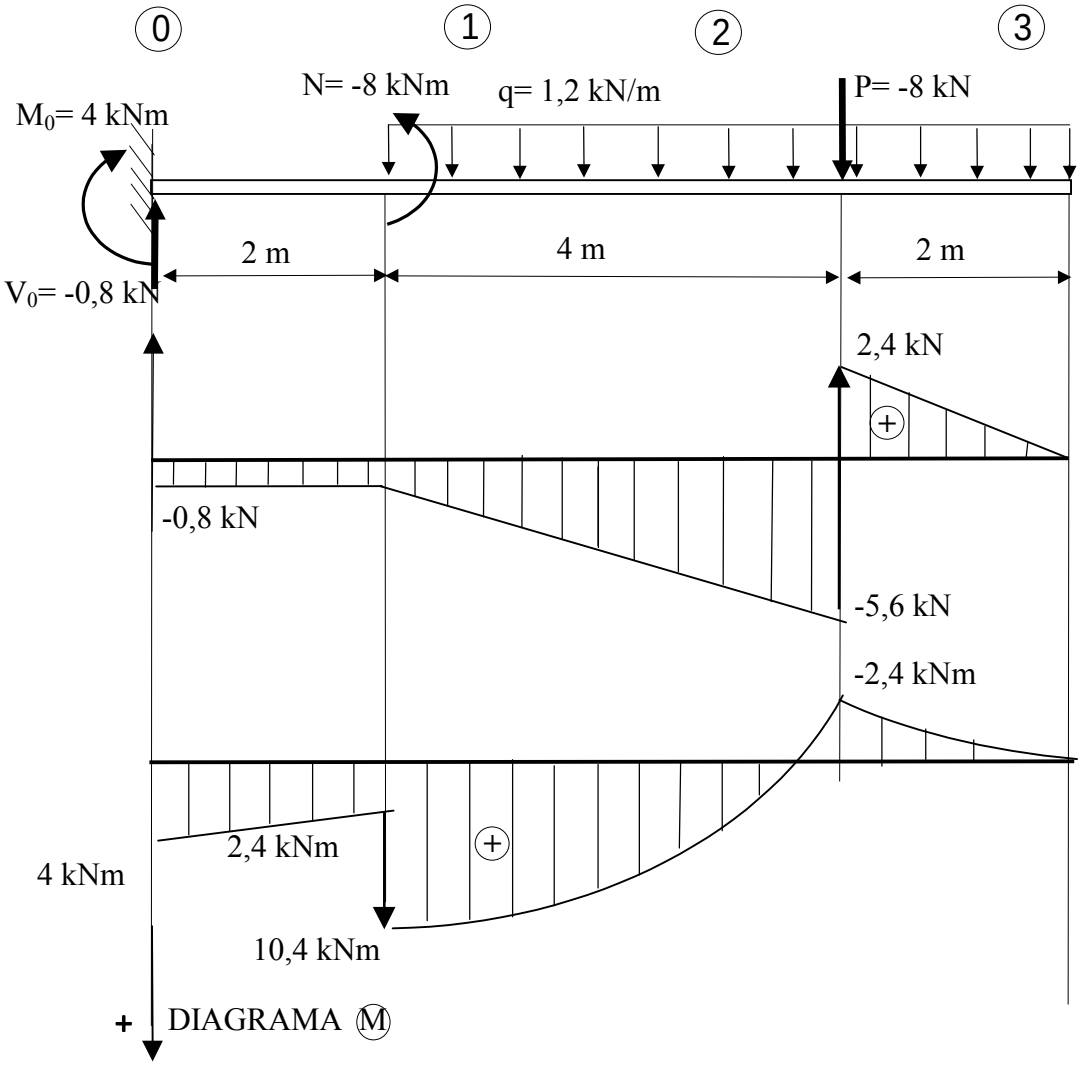
DATE DE INTRARE

B	c	d	e	L	P	q	N	λ
M	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
6	2	8	2	8	-8	1.2	-8	3

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
KN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-0.8	4	10.4	1.5	8.5	3.4	28	-136.352	-1.42	5.6	2.626

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.19

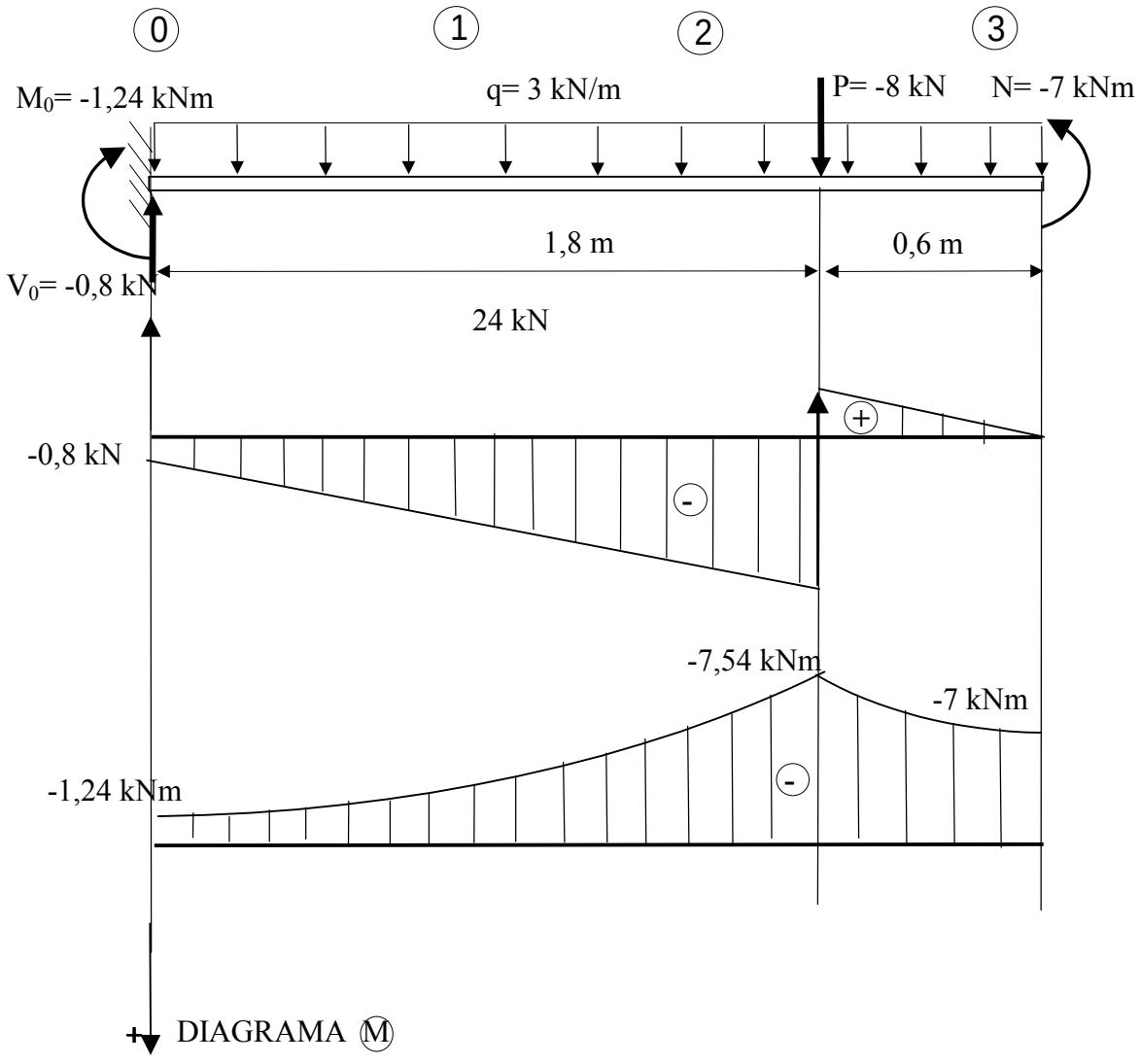
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
1.8	0	2.4	2.4	2.4	-8	3	-7	4

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-0.8	-1.24	7.54	1.929	16.298	5.036	22	11.657	0.768	6.2	3.707

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.20

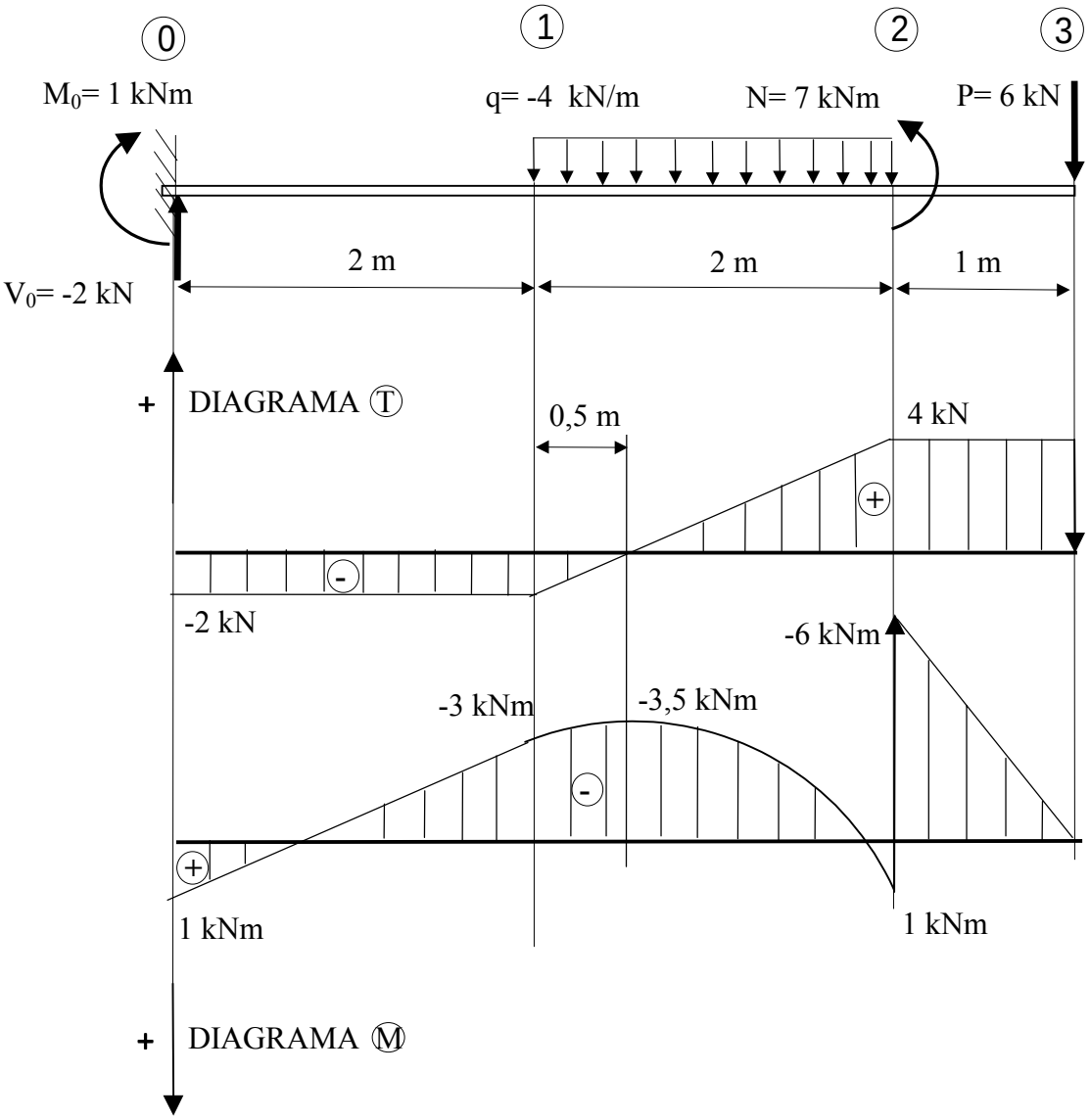
DATE DE INTRARE

B	c	d	e	L	P	q	N	λ
M	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
5	2	4	4	5	6	-4	7	5

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
KN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-2	1	6	2.375	27.542	7.598	18	31.843	0.912	6	4.418

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.21

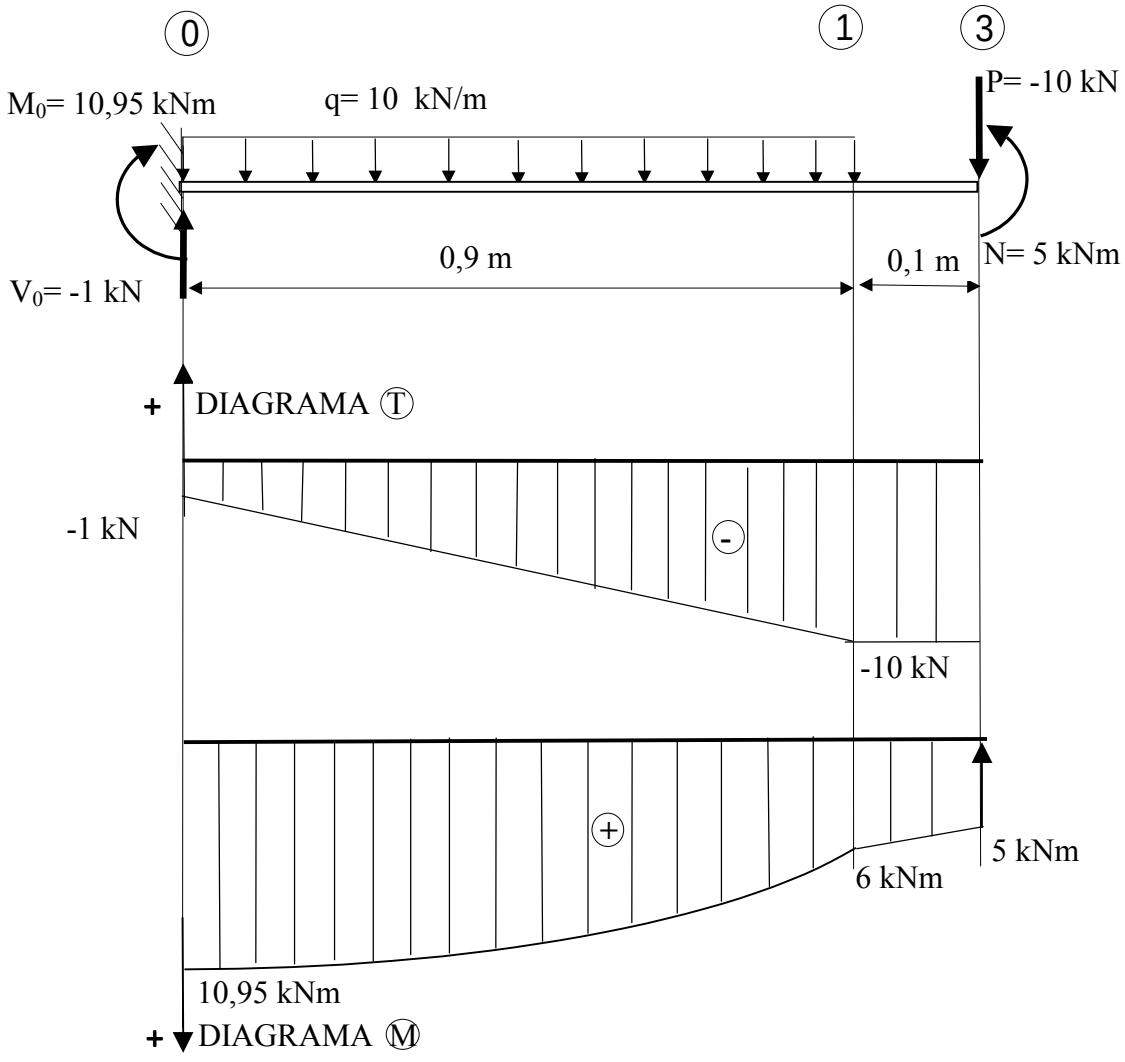
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
1	0	0.9	1	1	-10	10	5	1

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-1	10.95	10.95	0.75	1.083	0.867	44	-5.737	-0.59	10	0.894

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.22

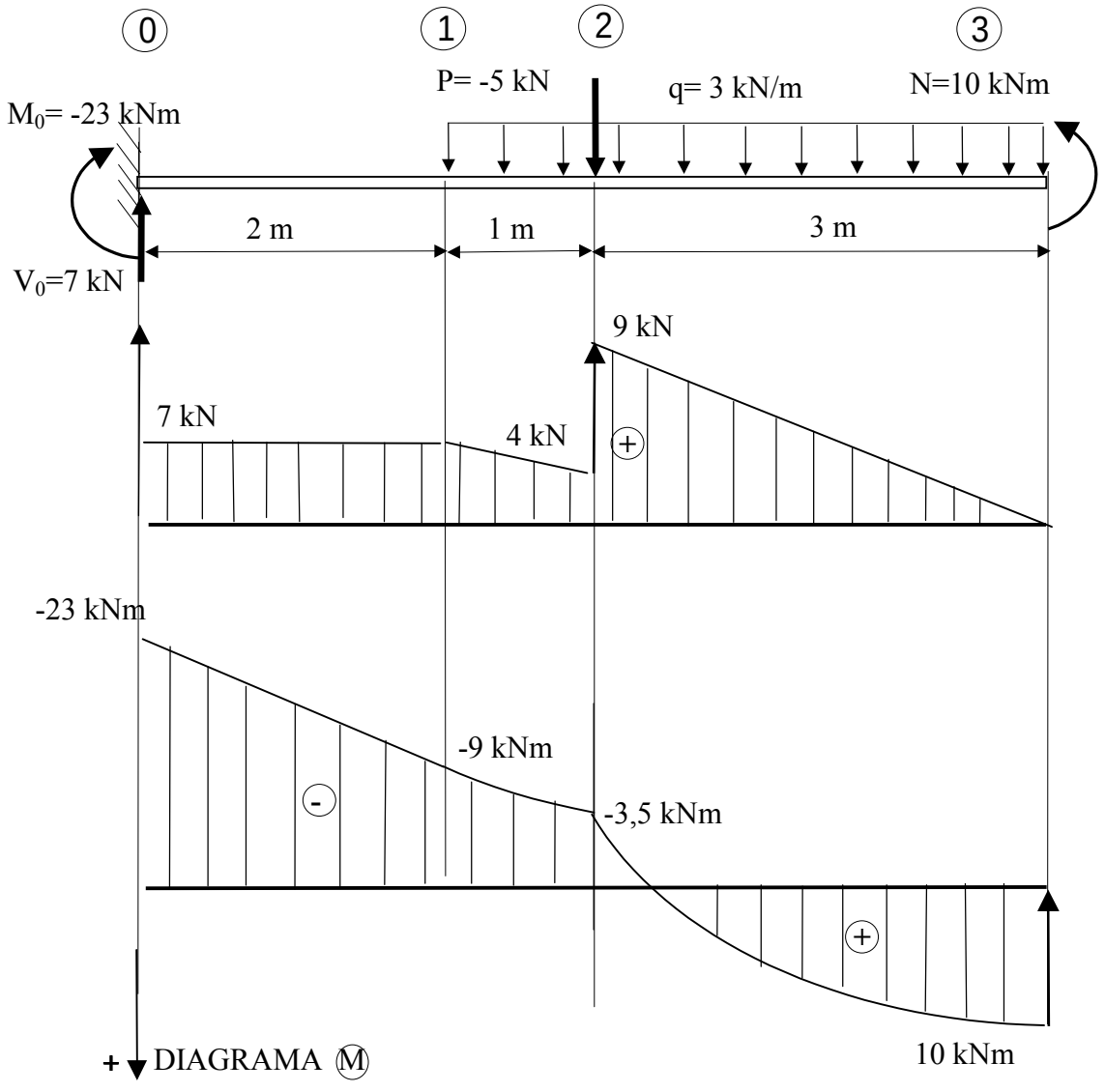
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
3	2	6	6	6	-5	3	10	2

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
7	-23	23	1.1	3.617	1.904	44	60.246	0.433	9	2.32

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.23

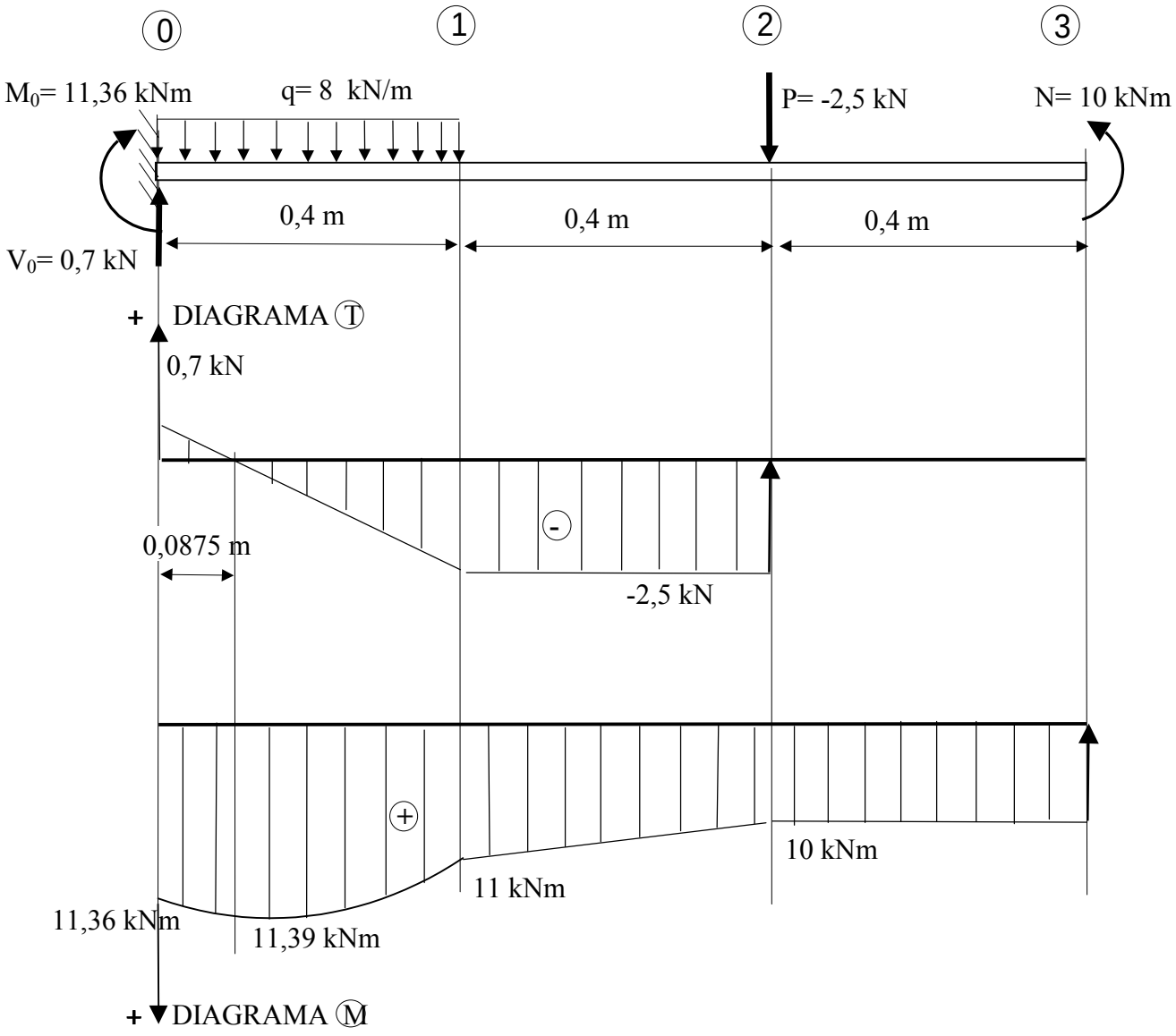
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
0.8	0	0.4	1.2	1.2	-2.5	8	10	3

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
0.7	11.36	11.39	1.5	8.5	3.4	29	-6.22	-0.577	2.5	1.093

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.24

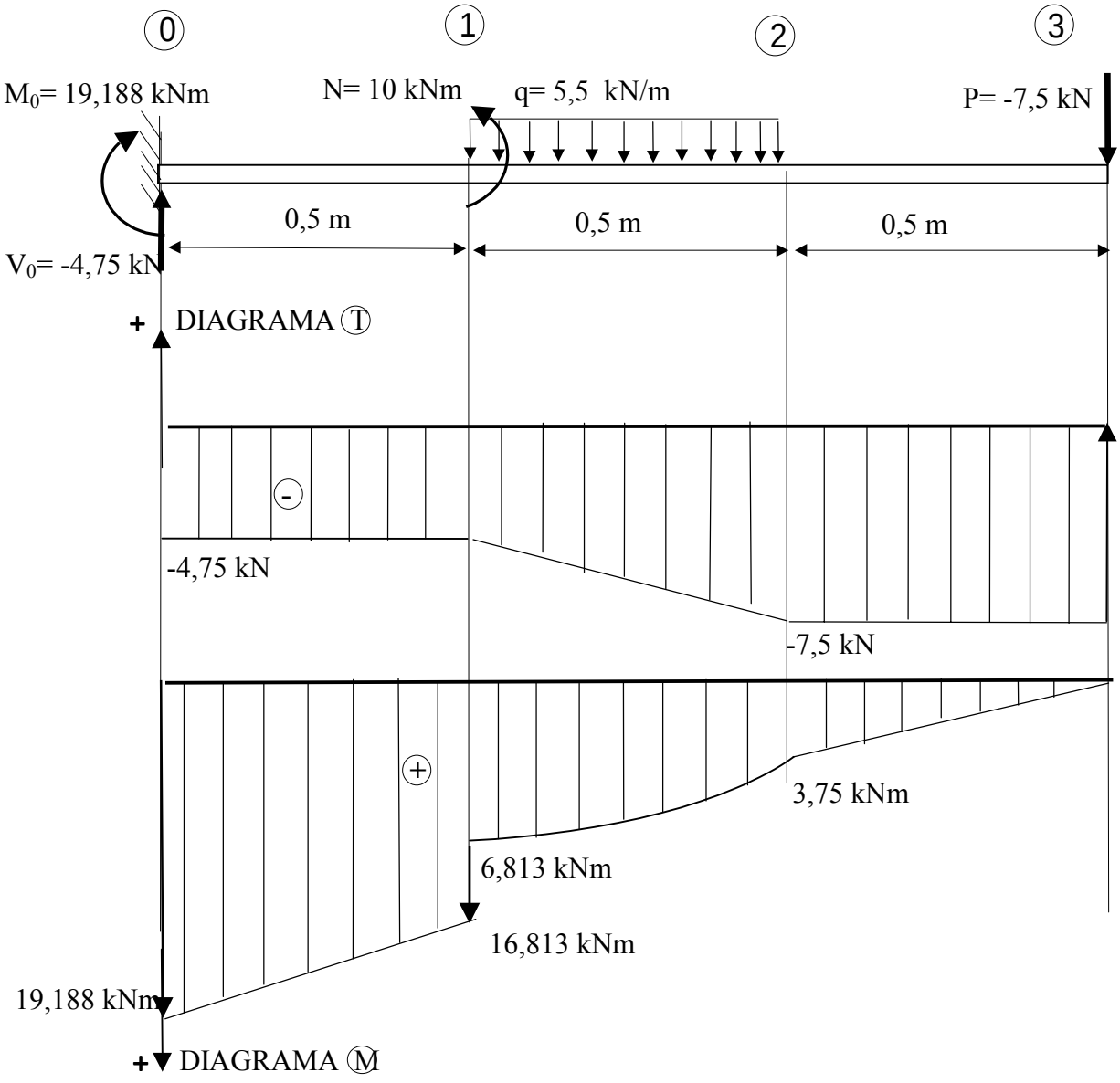
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
1.5	0.5	1	0.5	1.5	-7.5	5.5	10	4

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-4.75	19.188	19.188	1.929	16.298	5.036	29	-5.659	-0.299	7.5	2.581

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.25

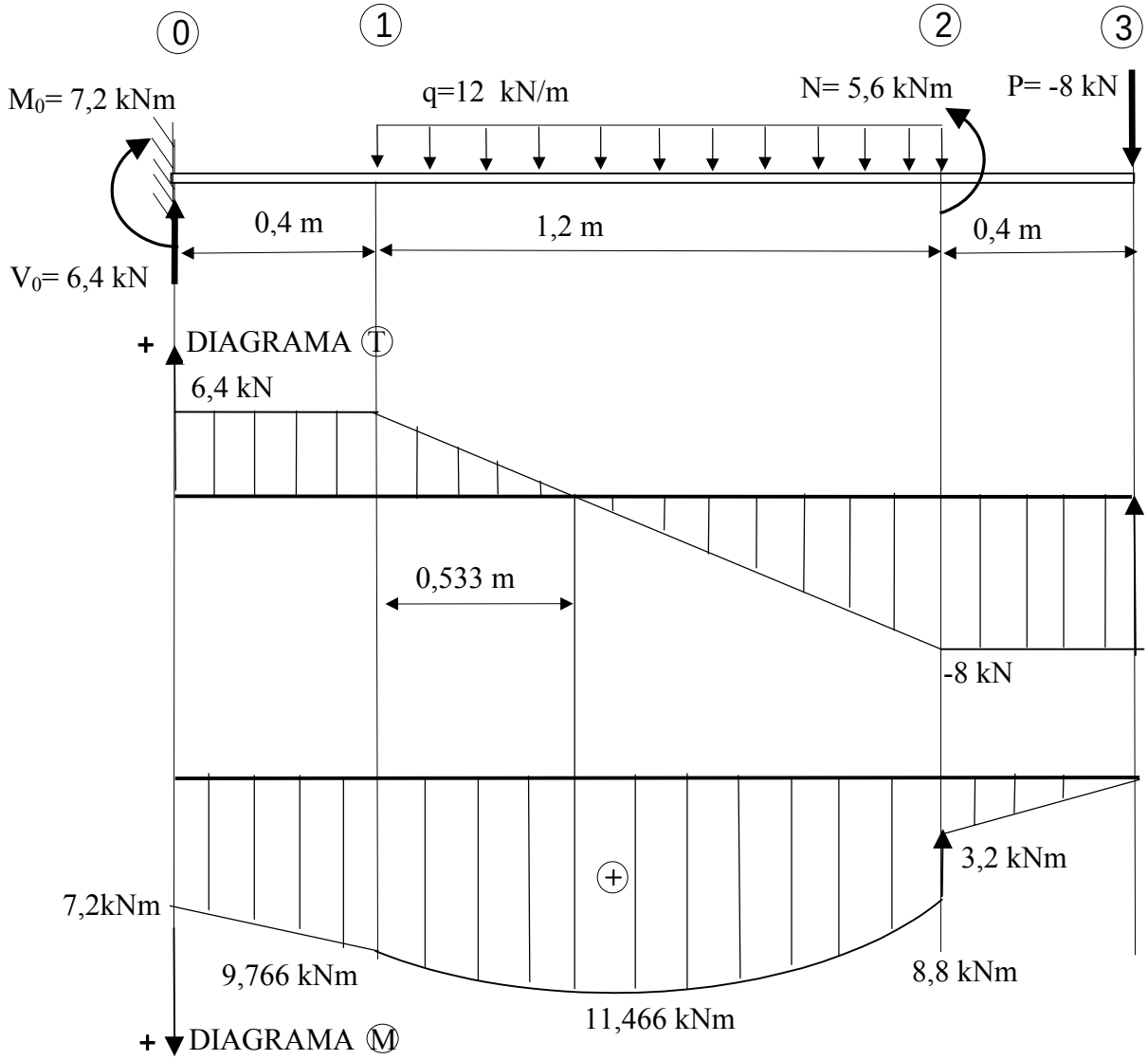
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
2	0.4	1.6	1.6	2	-8	12	5.6	5

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
6.4	7.2	11.466	2.375	27.542	7.598	22	-14.187	-0.714	8	3.943

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.26

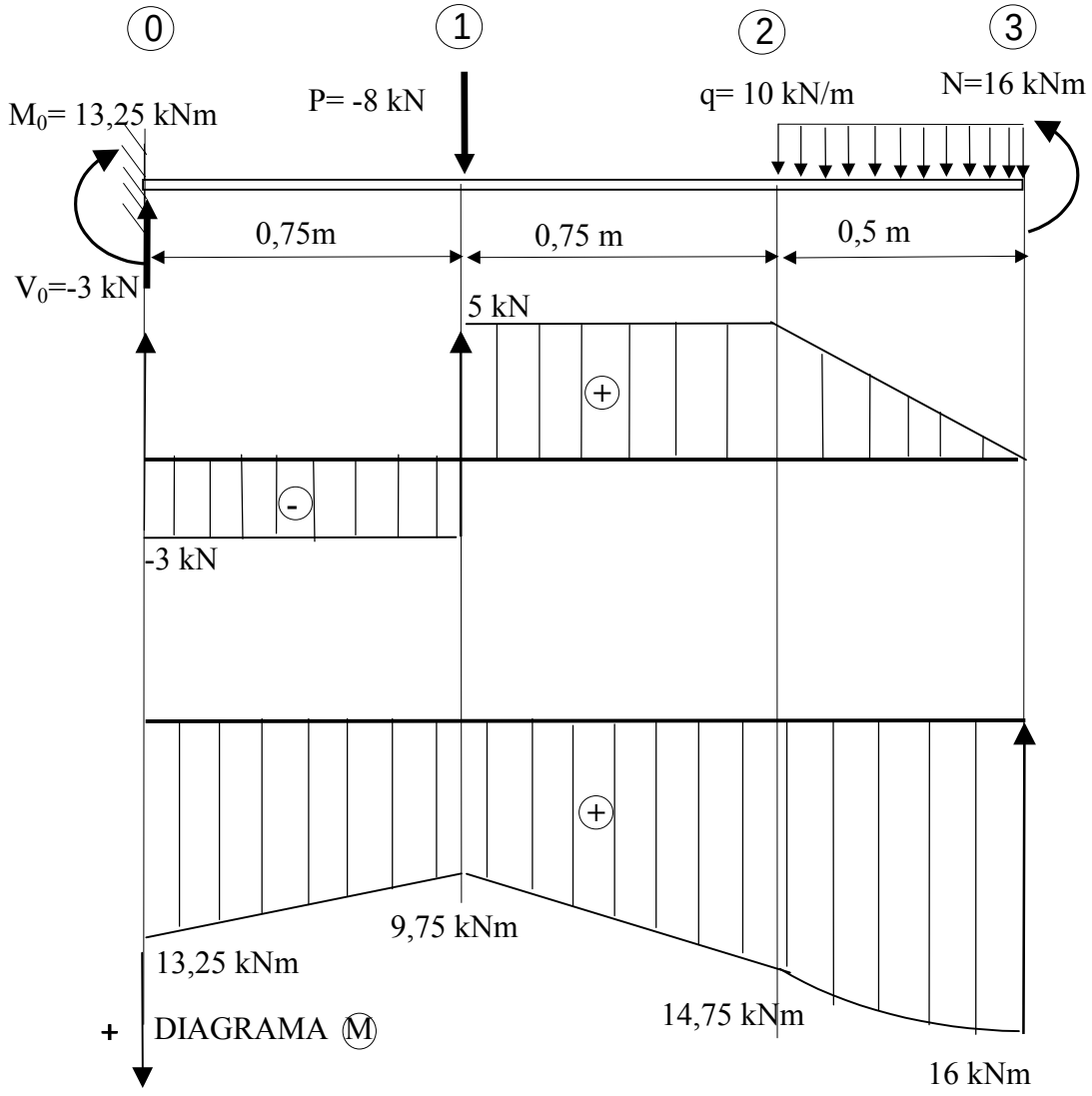
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
0.75	1.5	2	2	2	-8	10	16	1

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-3	13.25	16	0.75	1.083	0.867	50	-17.637	-1.069	5	0.346

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.27

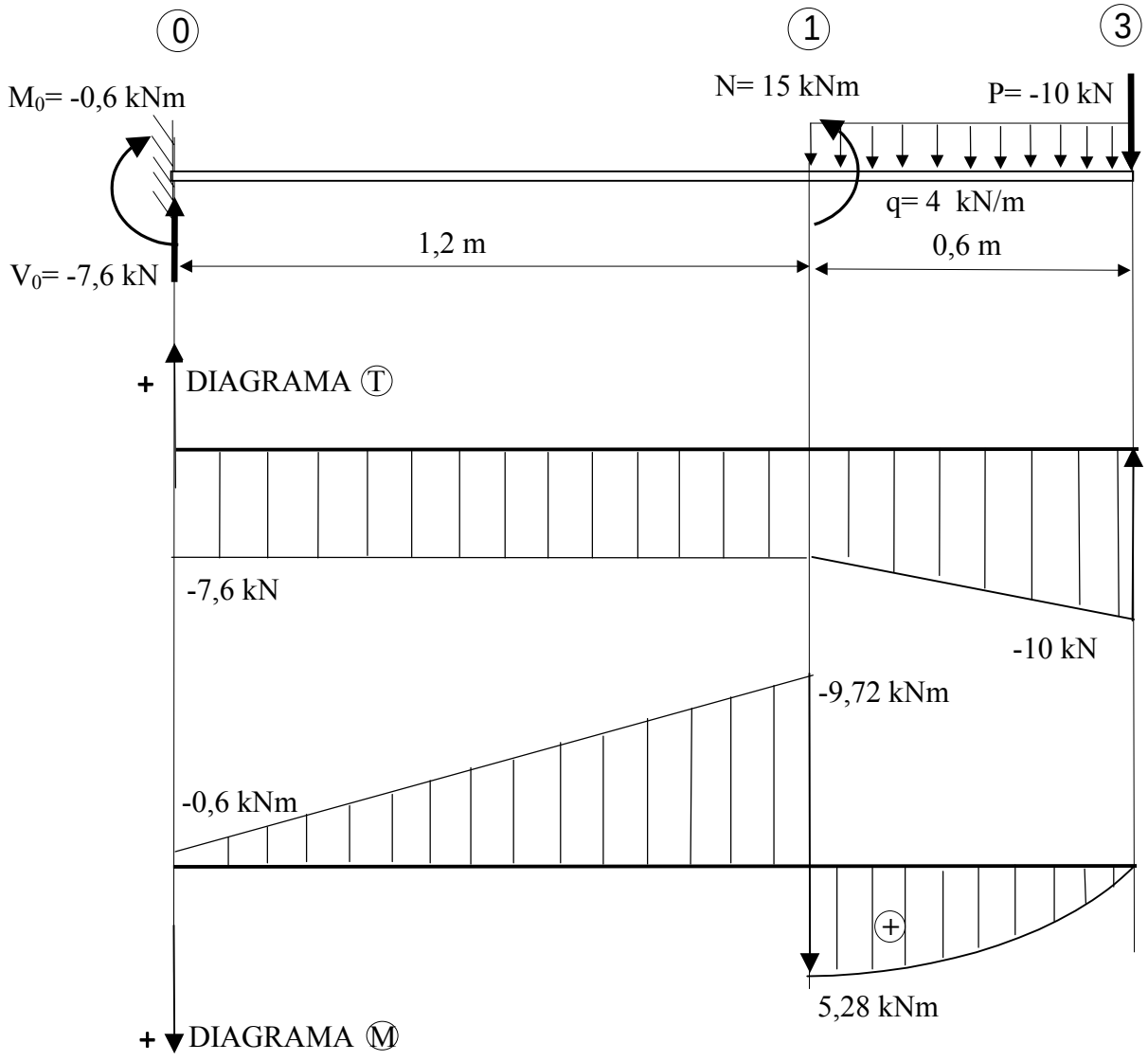
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
1.8	1.2	1.8	1.8	1.8	10	-4	-15	2

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-7.6	-0.6	9.72	1.1	3.617	1.904	33	9.305	0.861	10	4.583

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.28

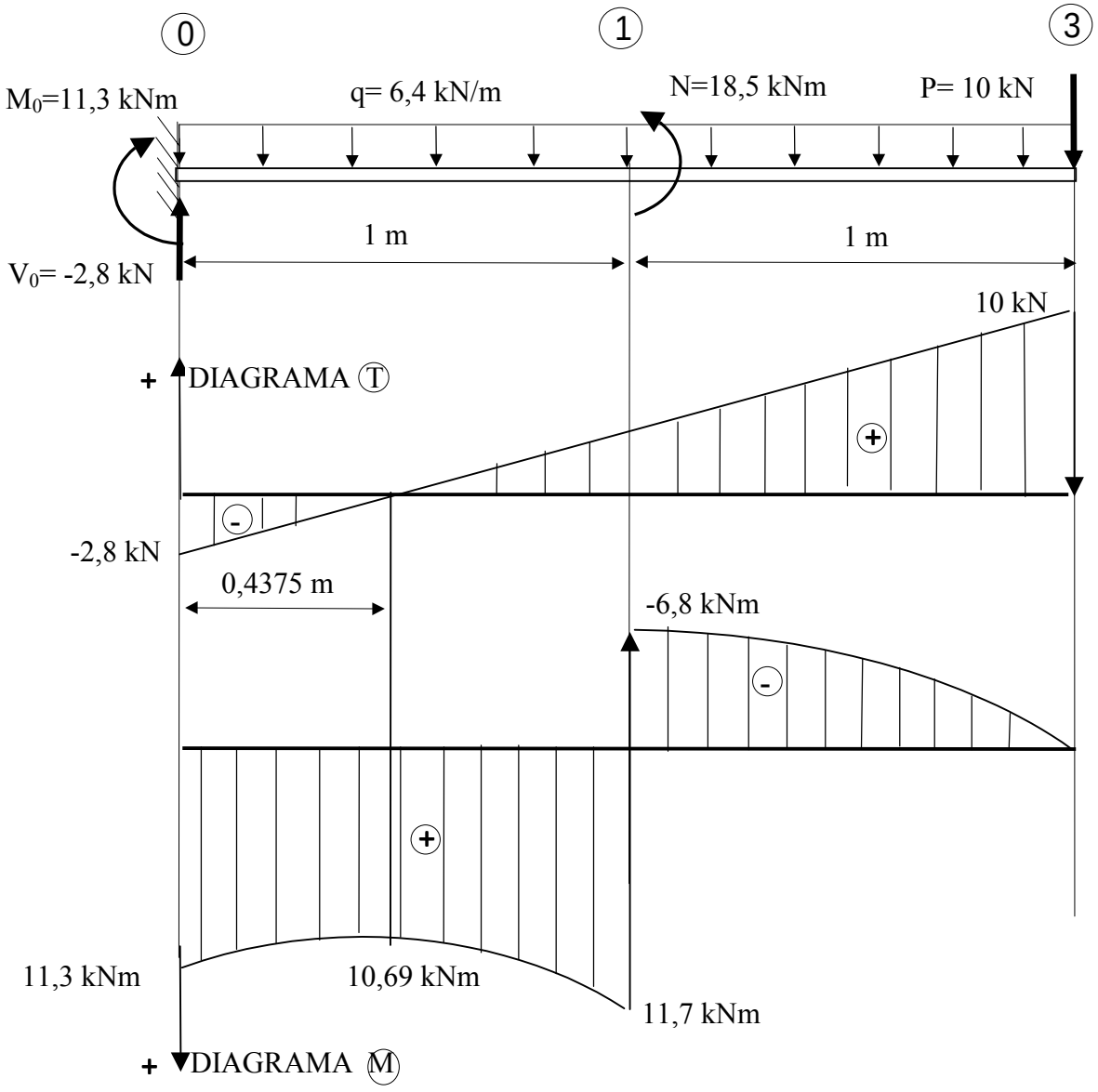
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
2	0	2	1	2	10	-6.4	18.5	3

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-2.8	11.3	11.7	1.5	8.5	3.4	29	-10.997	-0.319	10	4.372

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.29

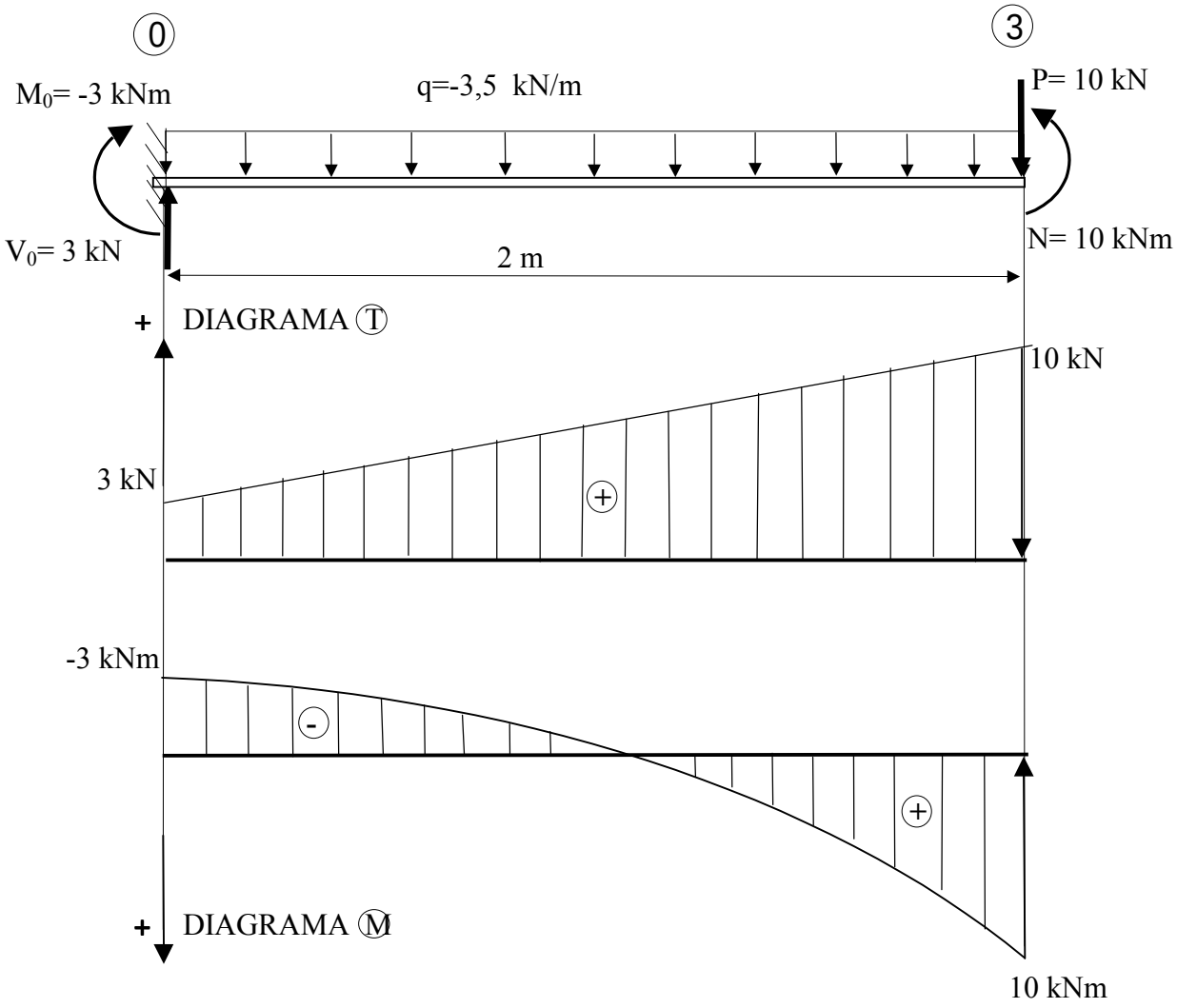
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
2	0	2	2	2	10	-3.5	10	4

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
3	-3	10	1.929	16.298	5.036	24	-0.294	-0.235	10	5.025

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1a.30

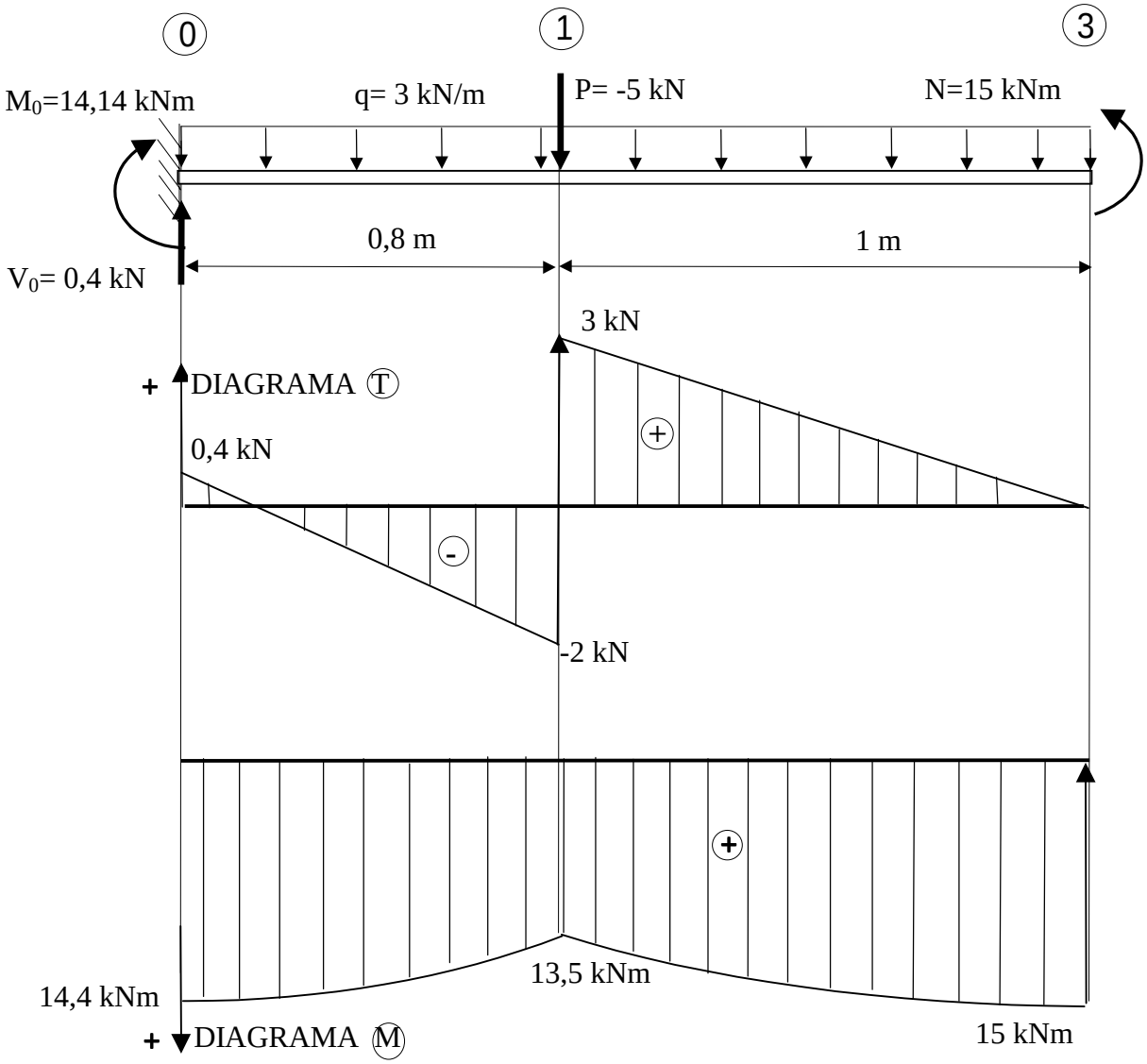
DATE DE INTRARE

b	c	d	e	L	P	q	N	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	kNm	-
0.8	0	1.8	1.8	1.8	-5	3	15	5

DATE DE IEŞIRE

V_0	M_0	M_{max}	z_C/a	I_y/a^4	W_y/a^3	a	w_3	φ_3	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
0.4	14.14	15	2.375	27.542	7.598	24	-11.89	0.767	3	1.242

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



MODELUL 1b

ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE FĂRĂ CONSOLE SITUATĂ PE DOUĂ REAZEME PUNCTUALE RIGIDE

1. Enunț

Se consideră o bară dreaptă de arie constantă pe lungimea sa (rigiditate EI constantă) care este supusă la încovoiere simplă prin acțiunea a două ***sarcini*** cunoscute ca module, direcții şi poziție pe bară, acționând normal pe axa barei, anume: o *forță concentrată* ***P,*** *o sarcină uniform distribuită* ***q*** **.** Conform axiomei legăturilor în lucul *reazemelor punctuale*, *rigide* se introduc ***reacțiunile*** V_1 ***şi*** V_2, perpendiculare pe axa barei, necunoscute ca module.

În fig.1b.1 este prezentată configurația generală de încărcare cu sarcinile (module, poziții şi valori) şi reacțiunile (module, pozițiile în reazeme şi sensurile lor), precum şi forma secțiunii transversale a barei.

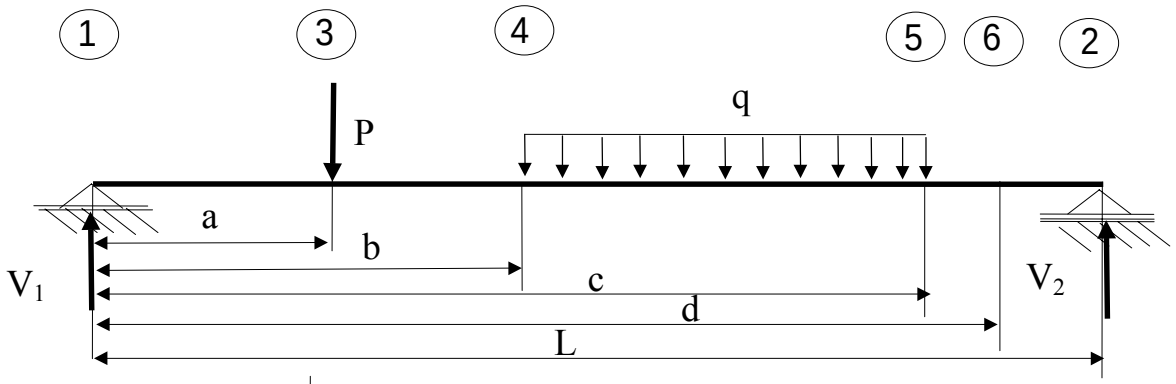


Fig. 1b.1

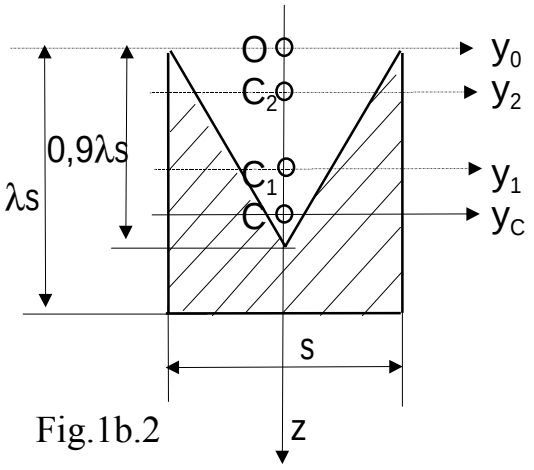


Fig.1b.2

Se cere:

1) *Să se determine reacțiunile* V_1 *şi* V_2*;*
2) *Să se traseze diagramele de eforturi tăietoare şi momente încovoietoare şi să se determine momentul maxim şi poziția secțiunii periculoase;*
3) *Momentul de inerție şi modulul de rezistență al secțiunii în funcție de parametrul* ***s****;*
4) *Să se determine parametrul* ***s*** *al secțiunii;*
5) *Deplasarea şi rotirea secțiunii 6 aflată la distanța* ***d*** *de capăt (*w_6 *şi* φ_6*)*
6) *tensiunea tangențială maximă (conform formulei lui Juravski);*

CAZ PARTICULAR

Se consideră pentru un caz particular valorile parametrilor din următorul tabel:

a	**b**	**c**	**d**	**L**	**P**	**q**	**λ**
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(kN)	(kN/m)	-
2	2	6	7	8	12	1,5	2,5

σ_a=120 MPa; E= $2{,}1\cdot 10^5$ MPa;

Pentru datele din tabel, configurația reală a barei este cea din fig. 1b.3

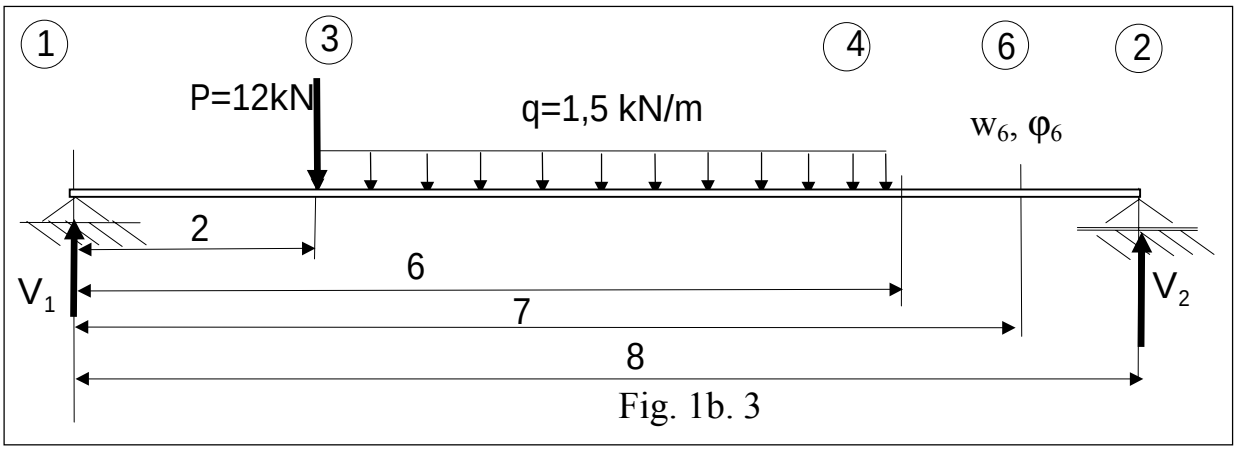


Fig. 1b. 3

1. Reacțiunile se determină folosind următoarele relații:

$$\sum M_{2y}=0 \quad \Rightarrow V_1=\frac{P\cdot(L-a)+q\cdot(c-b)\cdot(L-\frac{c+b}{2})}{L}$$

$$\sum M_{1y}=0 \quad \Rightarrow V_2=\frac{P\cdot a+q\cdot(c-b)\cdot\frac{c+b}{2}}{L}$$

Relația de verificare este:

$$\sum F_z=0 \Rightarrow P+q(c-b)=V_1+V_2$$

Înlocuind valorile numerice se obține:

$V_1=12\ kN \quad ; \quad V_2=6\ kN$;

Verificare:

$$12+6=12+1{,}5(6-2)$$

2. Diagramele de eforturi T şi M, forța tăietoare şi momentul maxim Se trasează diagramele *T=T(x) şi M=M(x)* din fig. 1b.4

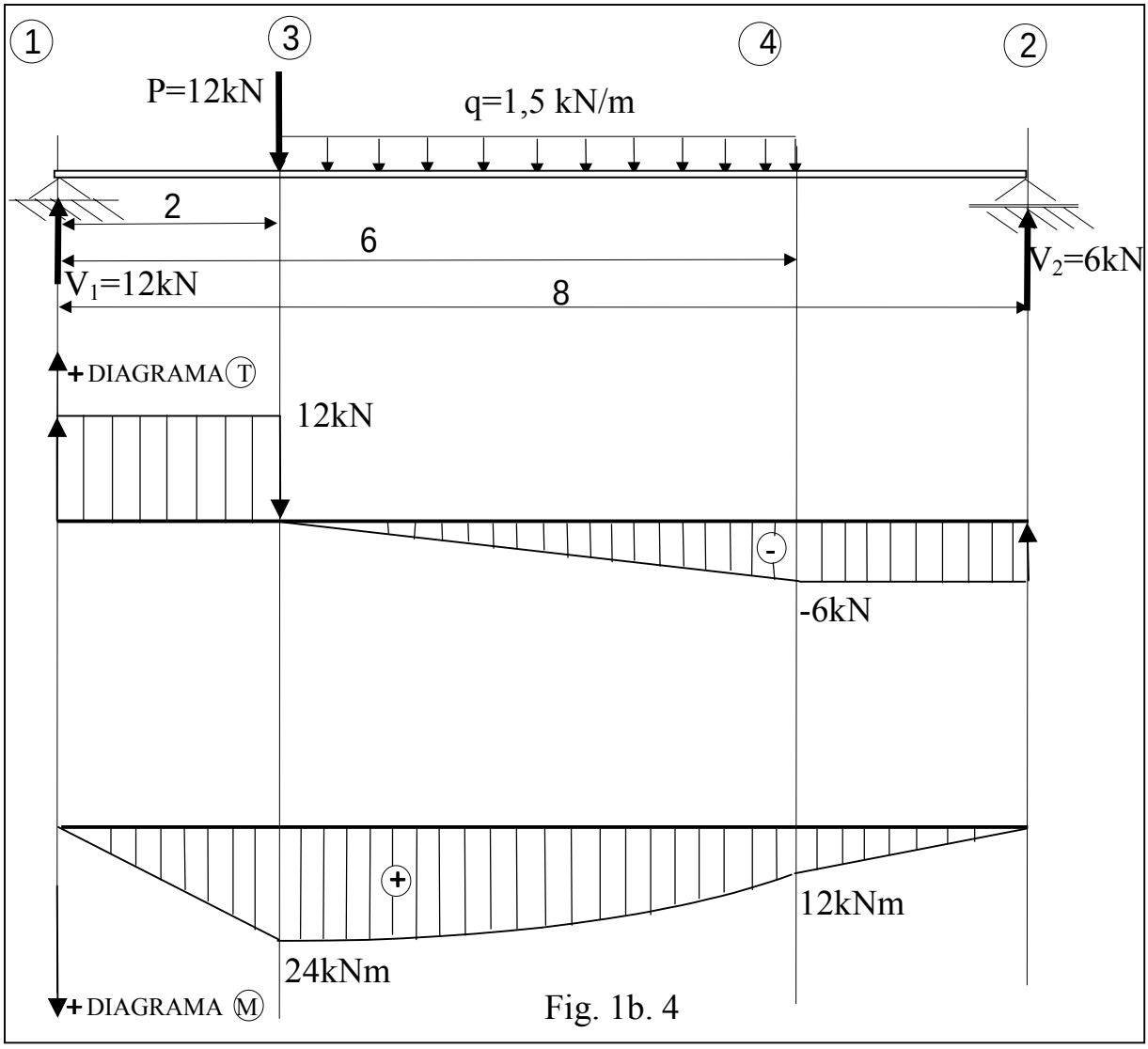


Fig. 1b. 4

Din diagrama *T(x)* rezultă efortul tăietor maxim: $T_{max}=12kN$, iar din diagrama *M(x)* rezultă momentul încovoietor maxim $M_{max}= 24\ kNm$ precum şi poziția secțiunii corespunzătoare pe bară: $x_M= 2m$

3. Momentul de inerție, modulul de rezistență şi momentul static

În figura 1b.2 este reprezentată secțiunea barei şi axele y_0, y_1, y_2, y_C , care trec prin punctele O, C_1, C_2 şi C, unde :

- punctul O este un punct de referință al secțiunii;
- punctul C_1 este centrul de greutate al dreptunghiului;
- punctul C_2 este centrul de greutate al triunghiului;
- punctul C este centrul de greutate al secțiunii.

Se notează cu :

- z_1 distanța OC_1 ; z_2 distanța OC_2

  z_C distanța OC
- d_1 distanța CC_1; d_2 distanța CC_2
- z_{max} distanța până la fibra extremă
- A_1 aria dreptunghiului; A_2 aria triunghiului
- I_{y1} momentul de inerție al dreptunghiului față de axa ce trece prin C_1 (C_1y)
- I_{y2} momentul de inerție al triunghiului față de axa ce trece prin C_2 (C_2y)
- I_{yC} momentul de inerție al suprafeței față de axa ce trece prin C (Cy)
- W_y modulul de rezistență la încovoiere față de axa ce trece prin C (Cy)

Relațiile de calcul utilizate sunt:

- centrul de greutate al suprafeței:

$$z_C = \frac{A_1 z_1 - A_2 z_2}{A_1 - A_2} = \frac{\lambda s^2 \cdot 0{,}5\lambda s - 0{,}5 \cdot 0{,}9\lambda s^2 \cdot 0{,}3\lambda s}{\lambda s^2 - 0{,}5 \cdot 0{,}9\lambda s^2} = 0{,}6636\lambda s$$

unde $A_1=\lambda s^2$; $z_1=0{,}5s$;

$A_2=0{,}5\cdot 0{,}9\lambda s^2=0{,}45\lambda s^2$;

$z_2=0{,}9\lambda s/3=0{,}3\lambda s$;

- momentul de inerție ale suprafeței date (compuuse) în raport cu axa ce trece prin centrul ei de greutate este:

$$I_{yC} = I_{y1C} - I_{y2C}$$

unde momentele de inerție ale celor două suprafețe simple (dreptunghi şi triunghi) în raport cu axa ce trece prin punctul C (formula lui STEINER):

$$I_{y1C} = \frac{s \cdot (\lambda s)^3}{12} + A_1 \cdot d_1^2; \qquad I_{y2C} = \frac{s \cdot (0{,}9\lambda s)^3}{36} + A_2 \cdot d_{21}^2$$

unde: $d_1= z_C - 0{,}5\lambda s = 0{,}1636\lambda s;$

$d_2= z_C - 0{,}3\lambda s = 0{,}3636\ \lambda s;$

$$I_{y1C} = \frac{s \cdot (\lambda s)^3}{12} + A_1 \cdot d_1^2 = 0{,}1101\lambda^3 s^4;$$

$$I_{y2C} = \frac{s \cdot (0{,}9\lambda s)^3}{36} + A_2 \cdot d_2^2 = 0{,}0797\lambda^3 s^4$$

Deci: $I_{yC} = I_{y1C} - I_{y2C} = 0{,}0304\lambda^3 s^4$

Modulul de rezistență al secțiunii W_y se calculează astfel:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{0{,}0304\lambda^3 s^4}{0{,}6636\lambda s} = 0{,}0458\lambda^2 s^3$$

Momentul static al jumătății superioare a secțiunii se determină astfel

$$S_{yC} = \frac{5z_C^3}{27\lambda} = 0{,}054\lambda^2 s^3$$

Înlocuind în expresiile obținute, valoarea lui $\lambda=2{,}5$ se obțin urătoarele rezultate:

$z_C = 1{,}659s;\quad I_{yC} = 0{,}475s^4;\quad W_y = 0{,}2863\ s^3;\ S_{yC} = 0{,}3382s^3.$

4. Dimensionarea barei la solicitarea de încovoiere

$$W_{ynec} = \frac{M_{iy\,max}}{\sigma_a};\quad 0{,}2863s^3 = \frac{M_{iy\,max}}{\sigma_a}$$

$$s = \sqrt[3]{\frac{M_{iy\,max}}{0{,}2863\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{24\cdot 10^6}{0{,}2863\cdot 120}} = 88{,}73\ mm$$

;

se adoptă $s=89\ mm;$

Rezultă $I_{yC} = 29\ 802\ 564\ mm^4$

5. Calculul deplasării şi rotirii secțiunii 6 (w_6 şi φ_6)

Relațiile folosite pentru sunt calculul deplasării şi rotirii secțiunii 6 sunt:

$$EIw = EIw_0 + EI\varphi_0 x + \Phi(x);\qquad EI\varphi = EI\varphi_0 + \Phi'(x)$$

În cazul particular al acestei probleme, aceste relații devin:

$$EIw_6 = EIw_0 + EI\varphi_0 d + \Phi(d);\qquad EI\varphi_6 = EI\varphi_0 + \Phi'(d);$$

$$\text{Din conditia:}\quad EIw_0 = 0 \Rightarrow EIw_6 = EI\varphi_0 d + \Phi(d)$$

$$\text{Din conditia:}\quad EIw_2 = EI\varphi_0 L + \Phi(L) = 0 \Rightarrow EI\varphi_0 = -\frac{\Phi(L)}{L}$$

Rezultă după înlocuire:

$$EIw_6 = -\frac{\Phi(L)}{L}\cdot d + \Phi(d);\quad EI\varphi_6 = -\frac{\Phi(L)}{L} + \Phi'(d)$$

unde *valorile* funcției de încărcare, respectiv ale derivatei funcției de încărcare sunt:

$\Phi(d) = -(12\cdot 7^3)/6+(12\cdot 5^3)/6+1{,}5\cdot(5^4-1^4)/24 = -397\ kNm^3$

$\Phi(L) = -(12\cdot 8^3)/6+(12\cdot 6^3)/6+1{,}5\cdot(6^4-2^4)/24 = -512\ kNm^3$

$\Phi'(d) = -(12\cdot 7^2)/2+(12\cdot 5^2)/2+1{,}5\cdot(5^3-1^3)/6 = -113\ kNm^3$

Înlocuind valorile numerice rezultă:

$EIw_6 = 51\ kNm^3$;

$EI\varphi_6 = -49 kNm^2$

$$w_6 = \frac{51\cdot 10^{12}}{2{,}1\cdot 10^5\cdot 0{,}475\cdot 89^4} = 8{,}149 mm$$

$$\varphi_6 = \frac{-49\cdot 10^9}{2{,}1\cdot 10^5\cdot 0{,}475\cdot 89^4}\cdot\frac{180}{\pi} = -0{,}448^0$$

6. Calculul tensiunii tangențiale maxime

Tensiunea tangențială maximă corespunde liniei ce trece prin centrul de greutate, deoarece momentul static al secțiunii aflate deasupra sau dedesupt S_{yC} este maxim şi se determină cu ajutorul fomulei lui JURAVSKI:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}\cdot S_{cy}}{I_{yef}\cdot b}$$

unde: $T_{max}=12kN$; $I_{yef}=0{,}475\ s^4$;

$b=0{,}368\ s$ este lățimea secțiunii în dreptul centrului de greutate al secțiunii;

$S_{Cy}=0{,}3382 s^3$ este momentul static al jumătății secțiunii .

Înlocuind rezultă:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}\cdot S^*_{cy}}{I_{yef}\cdot b} = \frac{12\cdot 10^3\cdot 0{,}3382}{0{,}475\cdot 0{,}368\cdot 89^2} = 2{,}93 MPa\,.$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 1b UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 1b s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H
a	**b**	**c**	**d**	**L**	**P**	**q**	**lamda**
2	2	6	7	8	12	1,5	2,5

DATE DE IESIRE (REZULTATE)

I	J	K	L	M	N	O	P	Q
$\mathbf{V_1}$	$\mathbf{V_2}$	$\mathbf{M_{max}}$	$\mathbf{z_C/s}$	$\mathbf{I_y/s^4}$	$\mathbf{W_y/s^3}$	**s**		
(F*(E-A)+F*(C-B)*(E-(B+C)/2))/L	(F*A+F*(C-B)*((B+C)/2))/L		0.6636*H	0.0304*H^3	0.0458*H^2	(K*1e6/(120*N))^(1/3)		
12	6	24	1,659	0,475	0,2863	88,735		

R	S	T	U	V
s	$\mathbf{I_{yef}}$	$\mathbf{\Phi(L)_2}$	$\mathbf{\Phi(d)_6}$	$\mathbf{\Phi' (d)_6}$
INT(O)+1	M*R^4	-I*E^3/6+F*(E-A)^3/6+G*((E-B)^4-(E-C)^4)/24	-I*D^3/6+F*(D-A)^2*(ABS(D-A)+D-A)/12+ G*(D-B)^3*(ABS(D-B)+D-B)/48- G*(D-C)^3*(ABS(D-C)+D-C)/48	-I*D^2/2+F*(D-A)*(ABS(D-A)+D-A)/4+ G*(D-B)^2*(ABS(D-B)+D-B)/12-G*(D-C)^2*(ABS(D-C)+D-C)/12
89	29 802 564	-512	-397	-113

W	X	Y	Z	AA	AB	AC
$\mathbf{w_6}$	$\mathbf{\varphi_0}$	$\mathbf{\varphi_6}$	$\mathbf{T_{max}}$	**b**	**S**	$\mathbf{\tau_{max}}$
1e7*(-T*D/E+U)(2.1*S)	1e4*(-T/E)*180/(2.1*S*3.14)	1e4*(-T/E+V)*180/(2.1*S*3.14)		0.368*O	0.3382*O^3	(1000*Z*AB)/(AA*S)
8,149	$0,59^0$	$-0,45^0$	12	32,752	237927	2,925

Rezultatele obținute cu ajutorul acestui program pentru un set de 31 date de intrare sunt prezentate în **Anexa 1b,** iar diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare corespunzătoare sunt prezentate în continuare.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1b.1

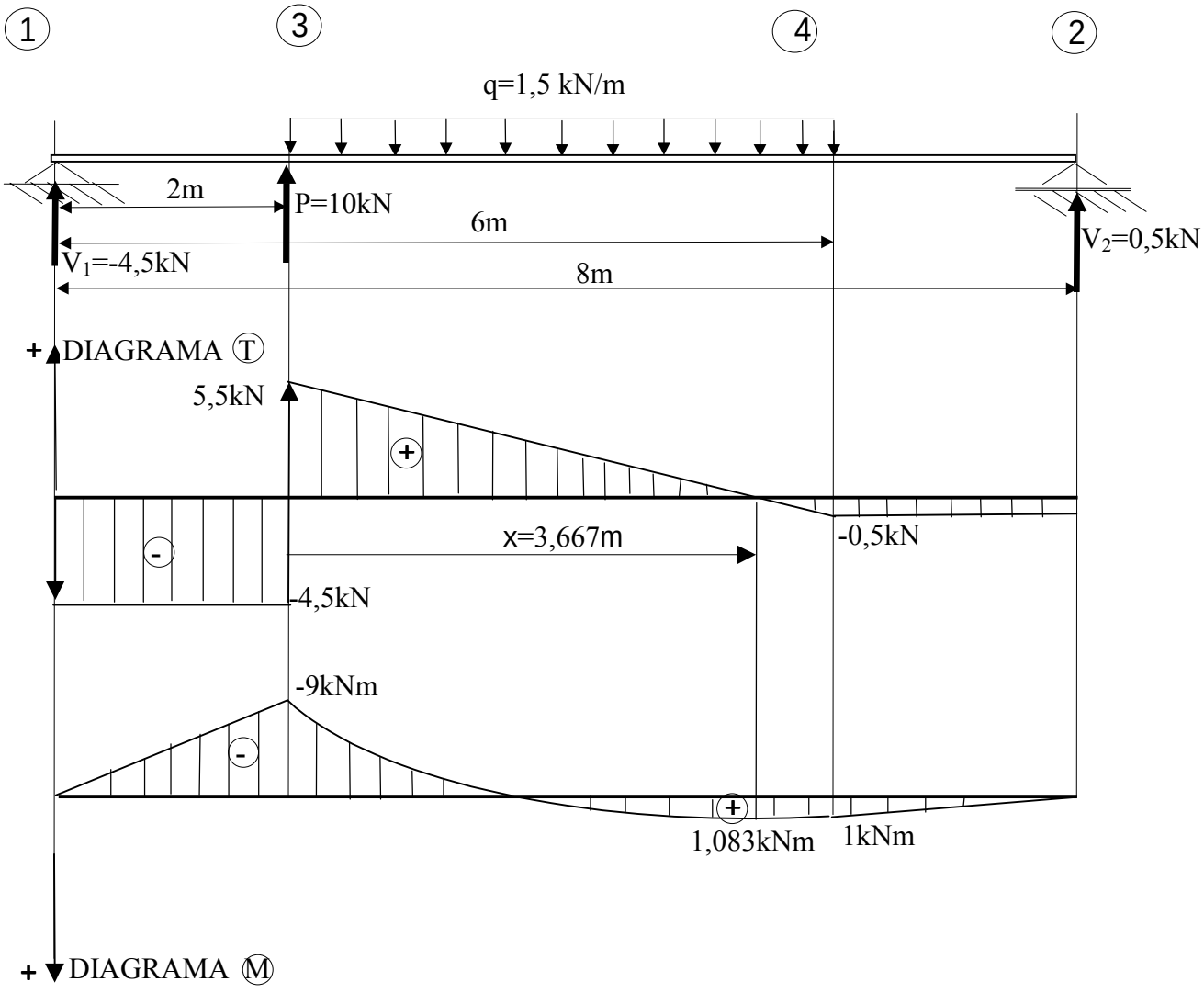
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
2	2	6	7	8	-10	1,5	1,5

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-4,5	0,5	9	0,995	0,1026	0,1031	90	-2.181	0.132	5.5	2.185

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.2

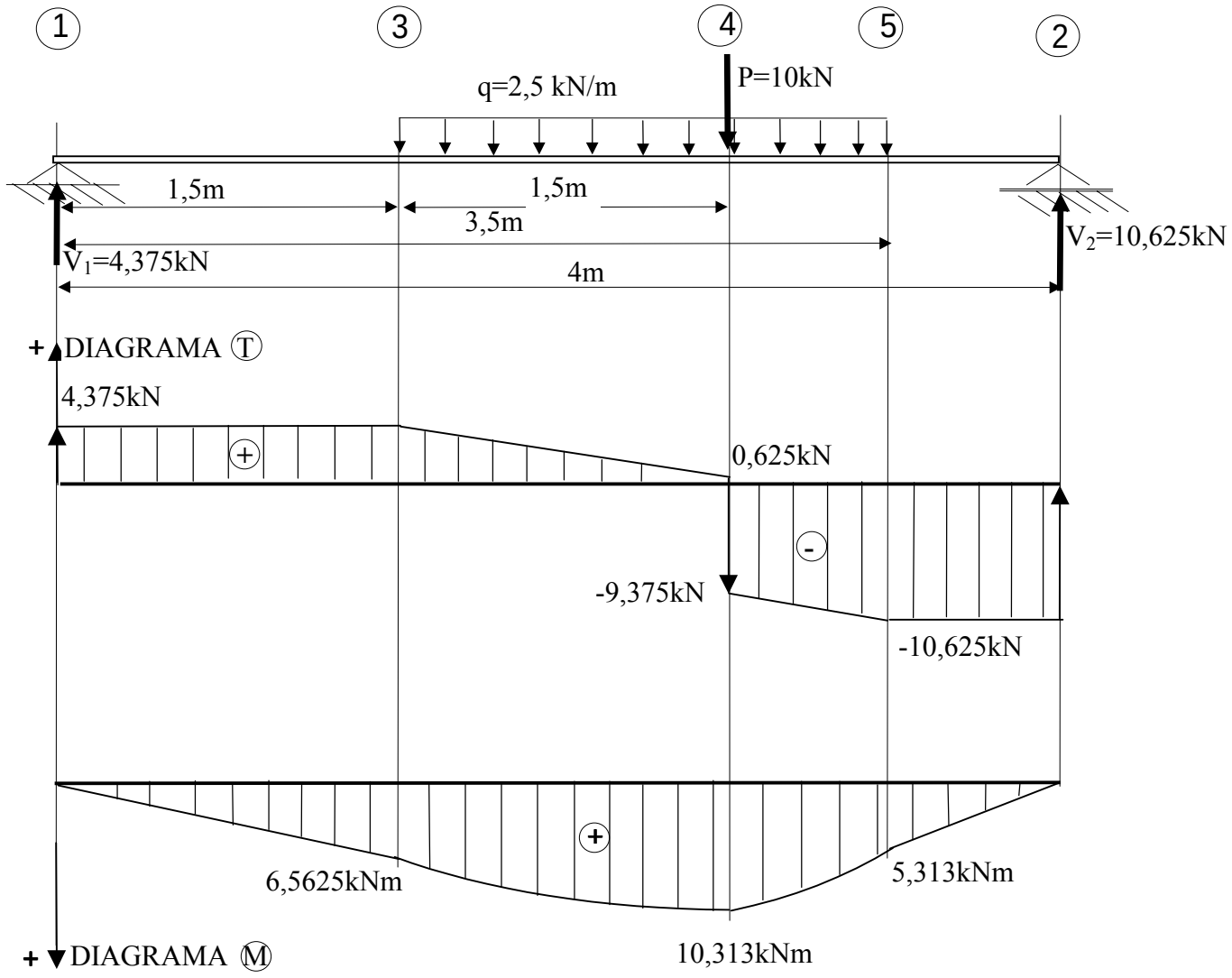
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
3	1,5	3,5	3,5	4	10	2,5	2

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
4.375	10.625	10.313	1.327	0.2432	0,1832	78	3.403	-0.363	10.625	4.215

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.3

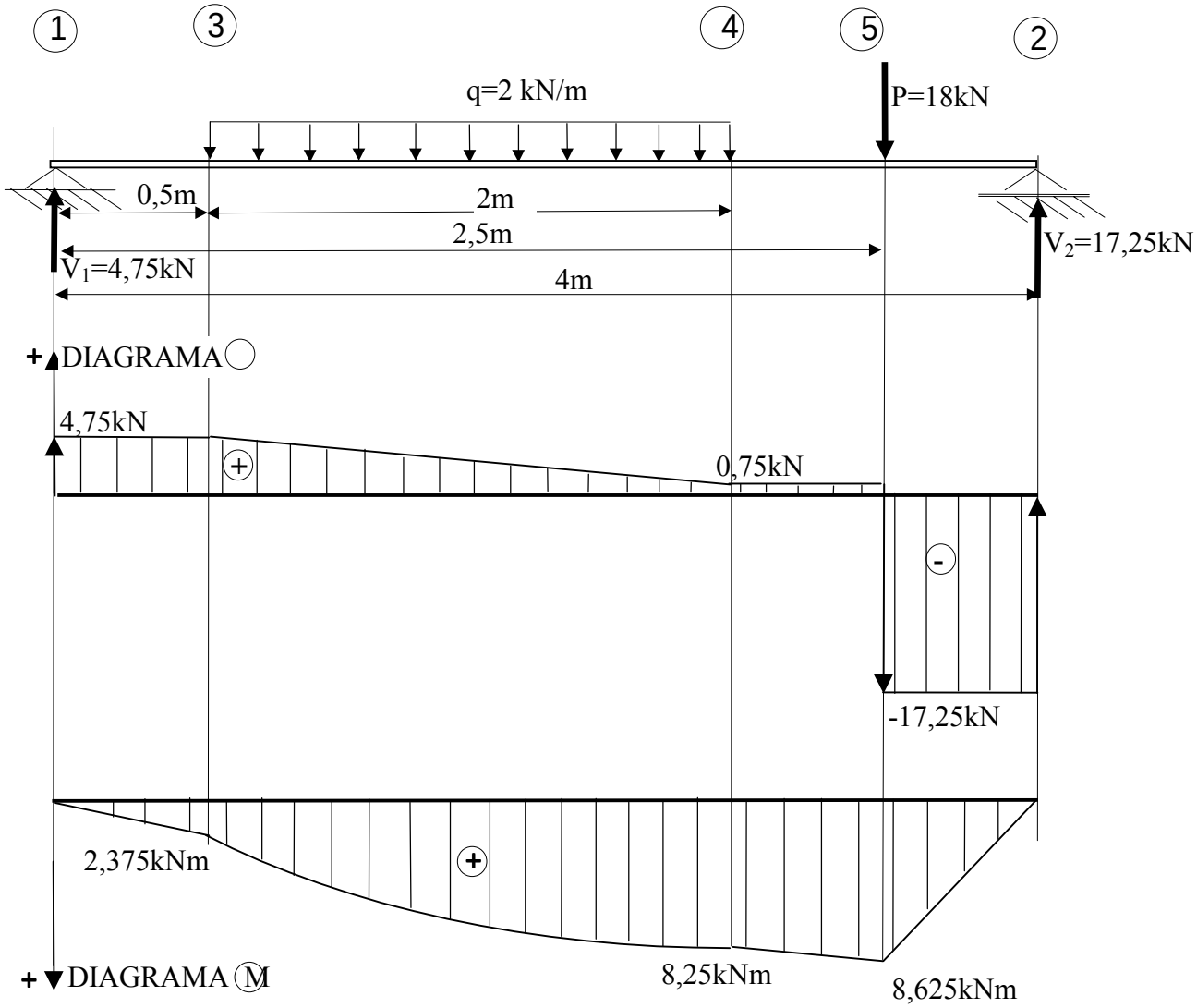
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
3,5	0,5	2,5	3,5	4	18	2	1,25

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
4,75	17,25	8,625	0,83	0,05938	0,0716	101	4.745	-0,48	17,25	6,53

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.4

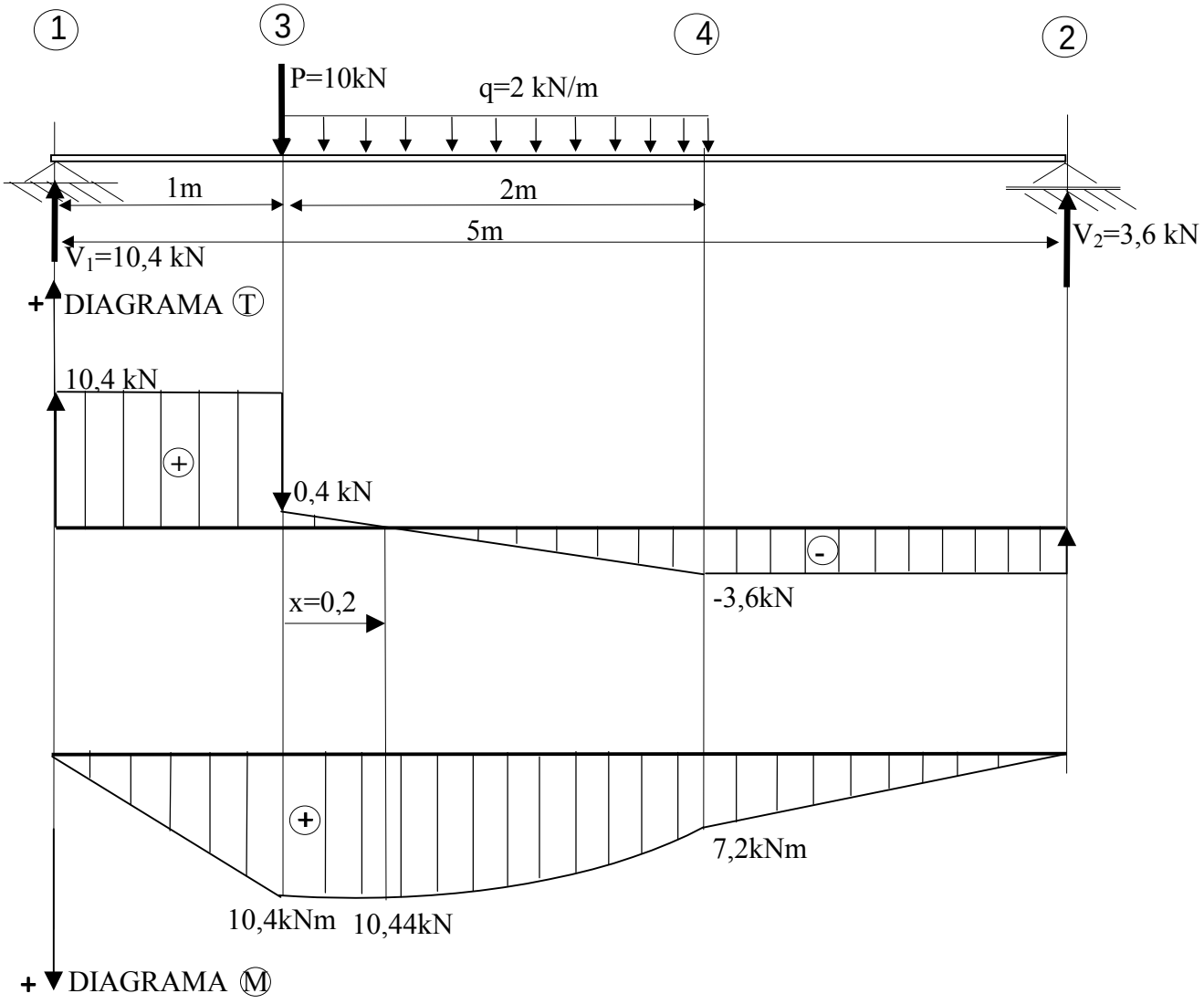
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
1	1	3	4	5	10	2	1,75

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
10,4	3,6	10,4	1,161	0,163	0,14	86	6,804	-0,353	10,4	3,879

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.5

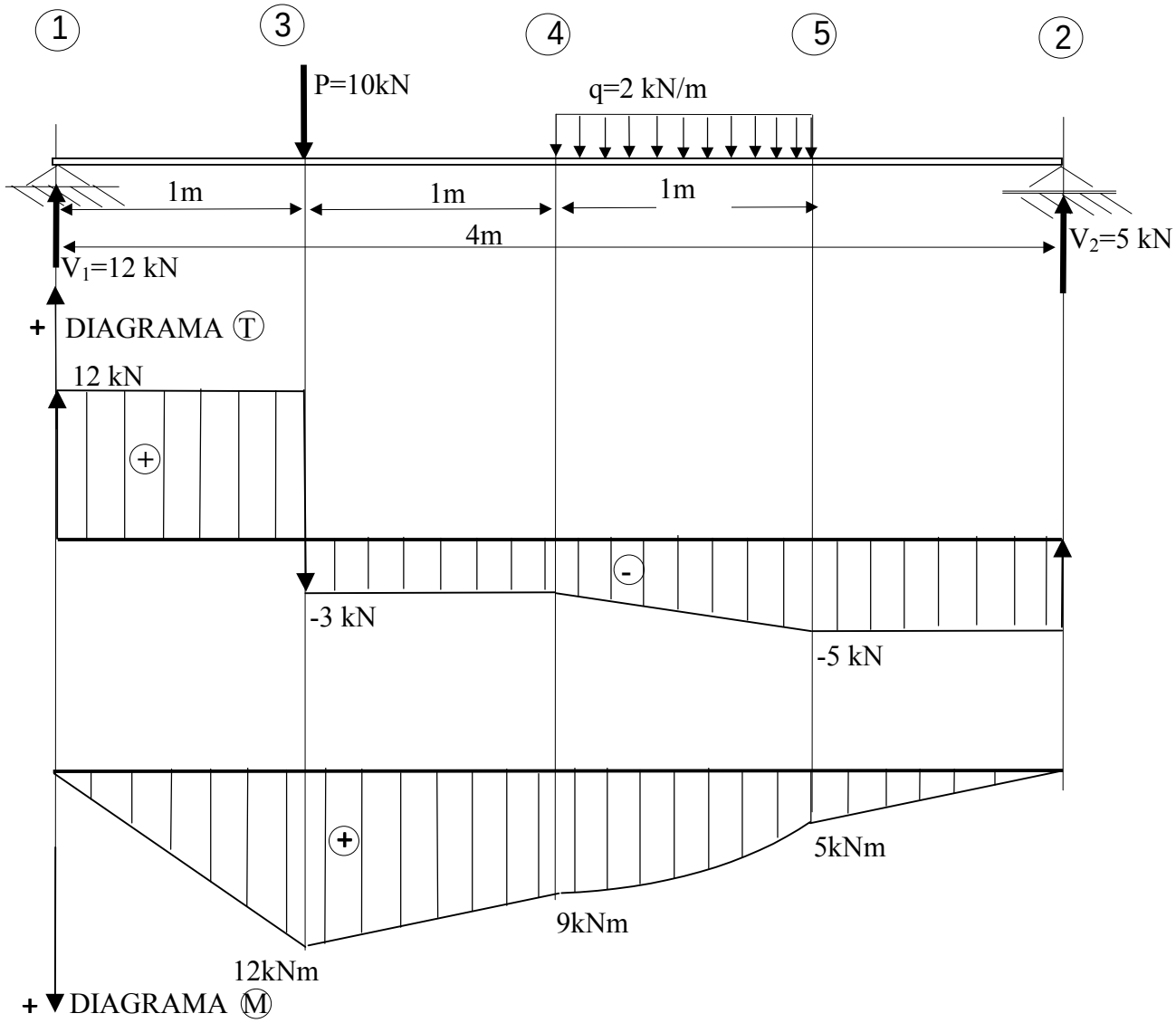
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
1	2	3	2,5	4	15	2	1,4

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
12	5	12	0,929	0,08342	0,0898	104	6.941	-0,161	12	3,825

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.6

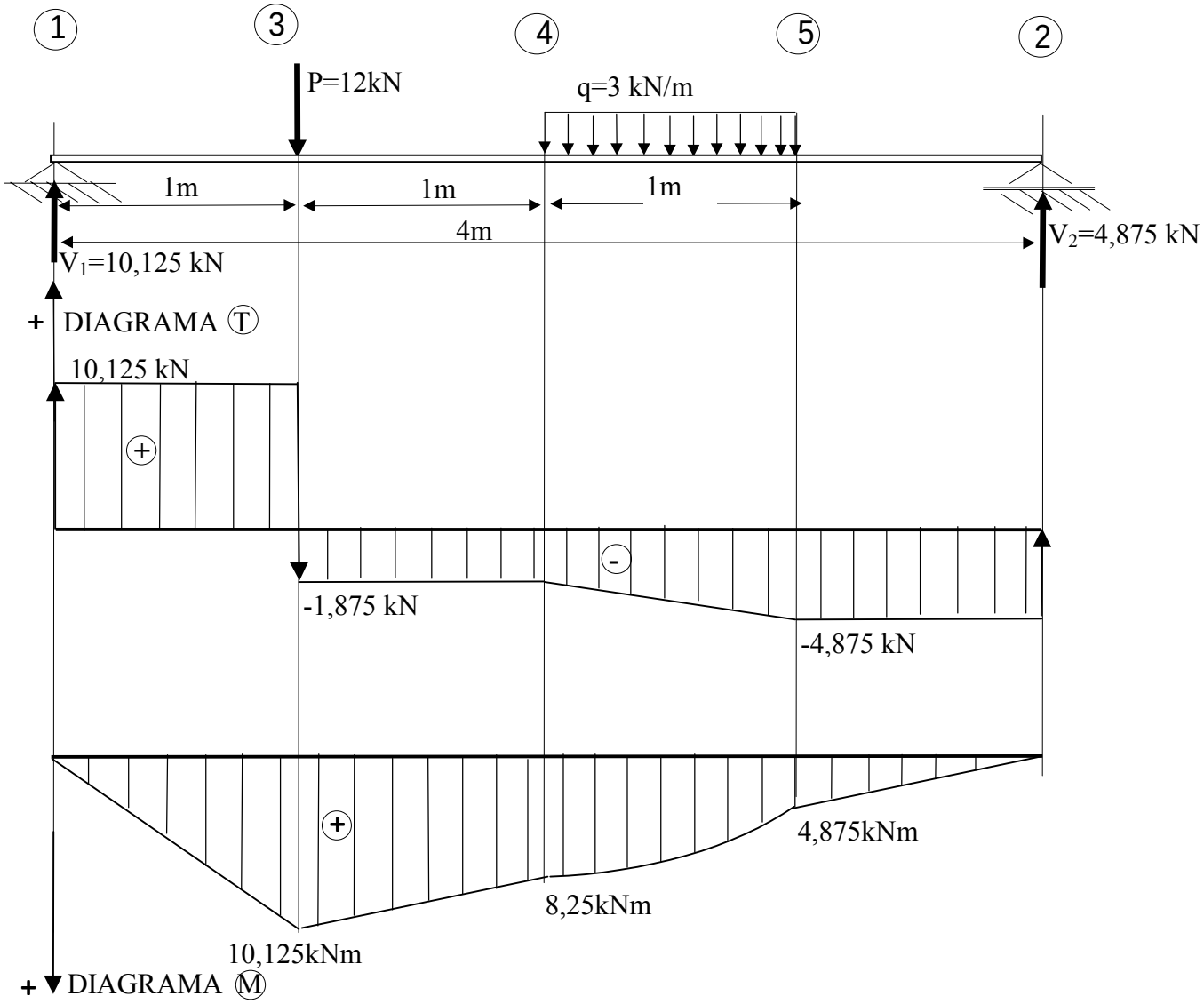
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
1	2	3	1,5	4	12	3	1,8

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
10,125	4,875	10,125	1,194	0,1773	0,1484	83	7,981	0,102	10,125	3,941

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.7

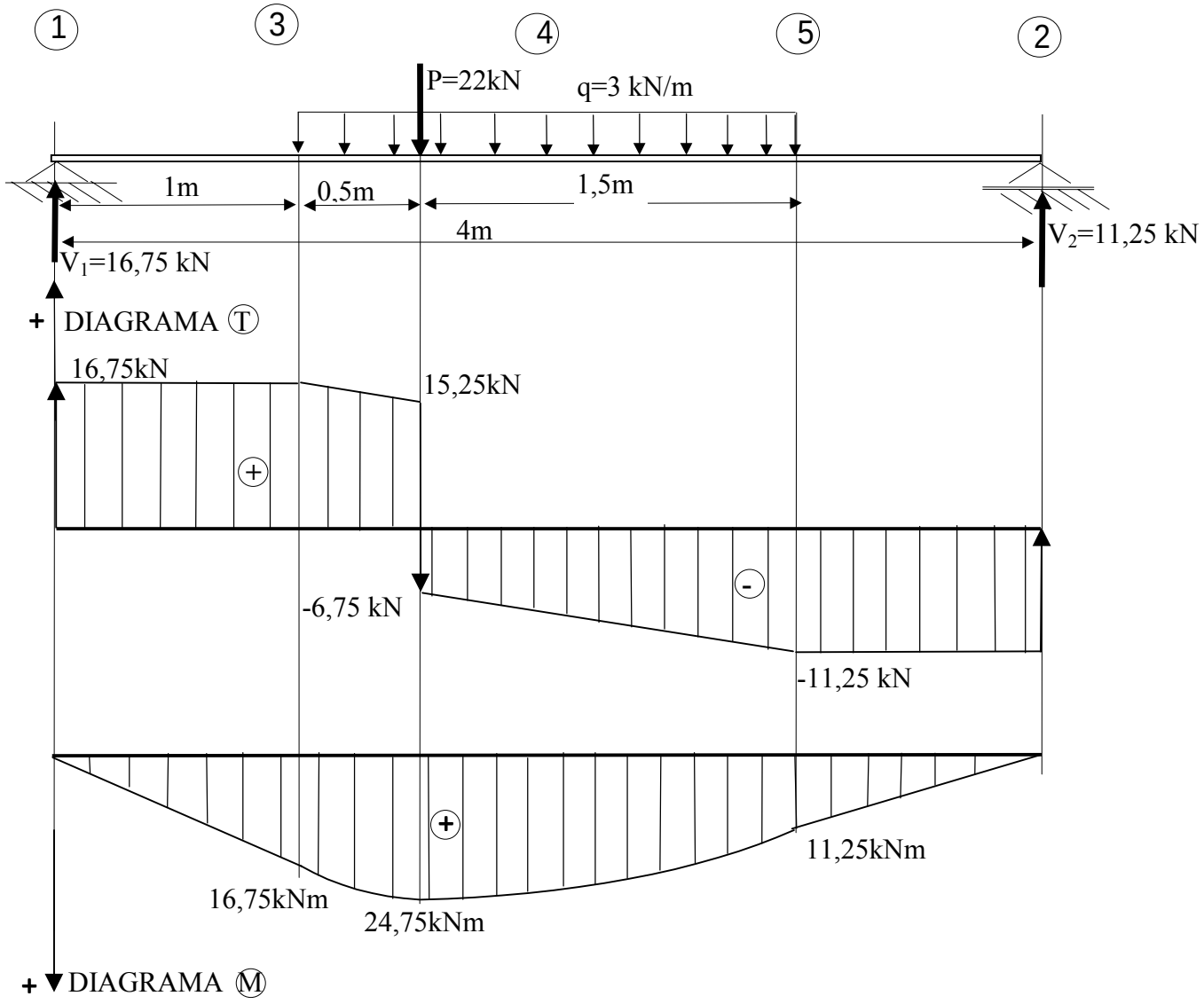
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
1,5	1	3	1,5	4	22	3	1,3

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
16,75	11,25	24,75	0.863	0.0668	0.0774	139	6.179	0.099	16,75	3.219

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.8

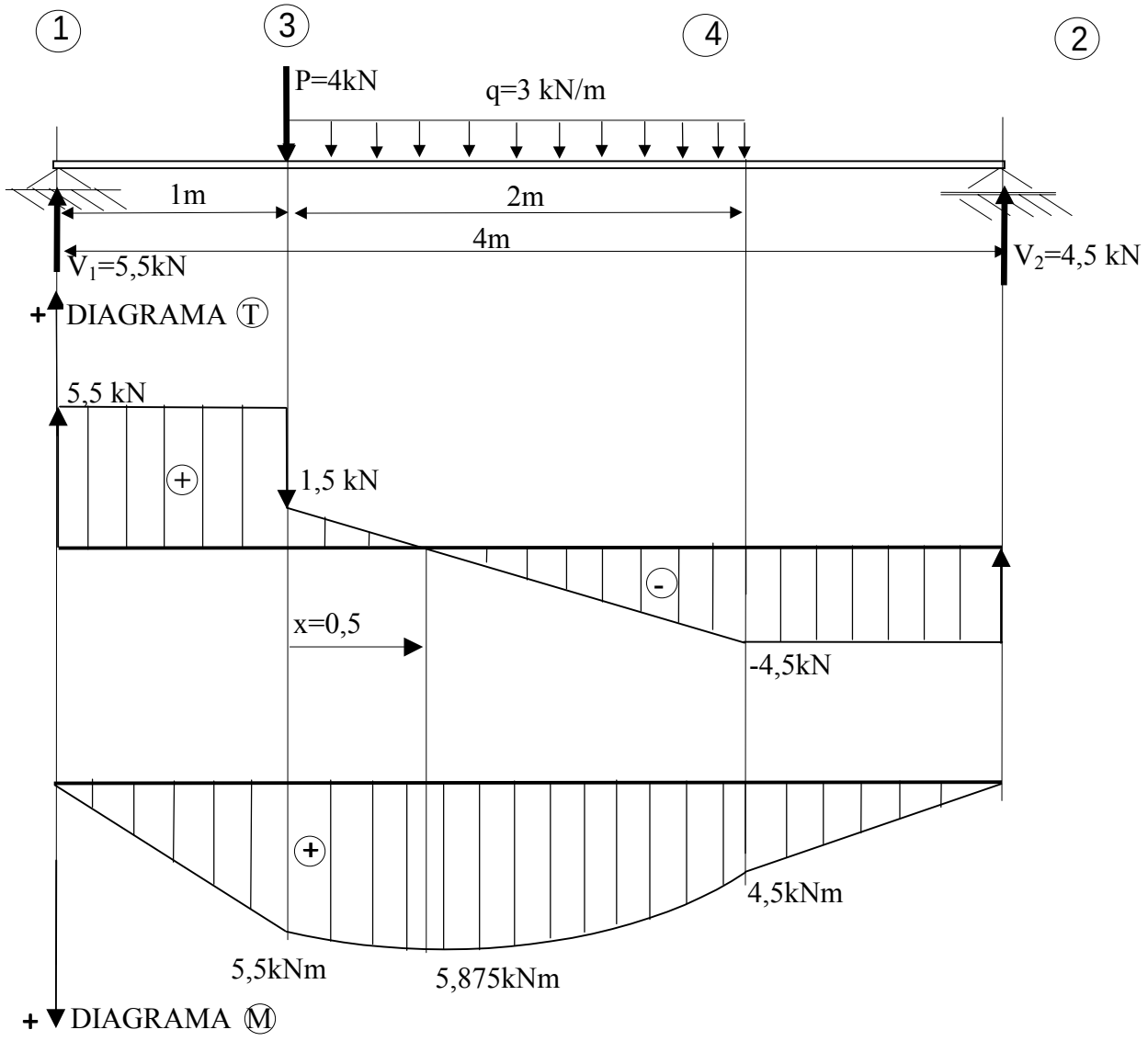
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
1,5	1	3	3	4	4	3	1,4

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
5,5	4,5	5,875	0.929	0.0834	0.0898	82	10.338	-0.484	5,5	2.82

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.9

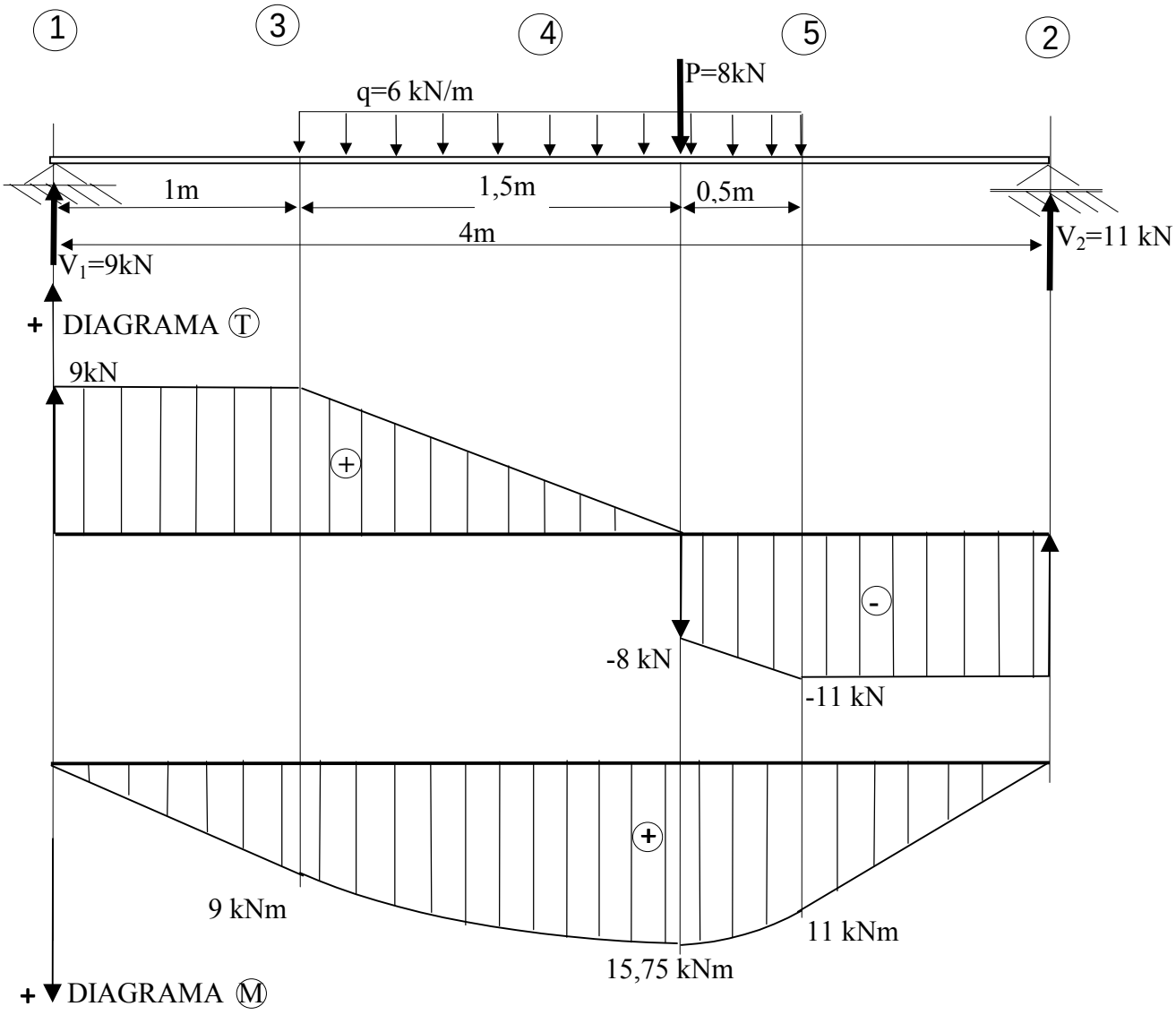
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
2,5	1	3	2,5	4	8	6	1,6

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
9	11	15,75	1.062	0.1245	0.1172	104	7.36	-0.129	11	3.068

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.10

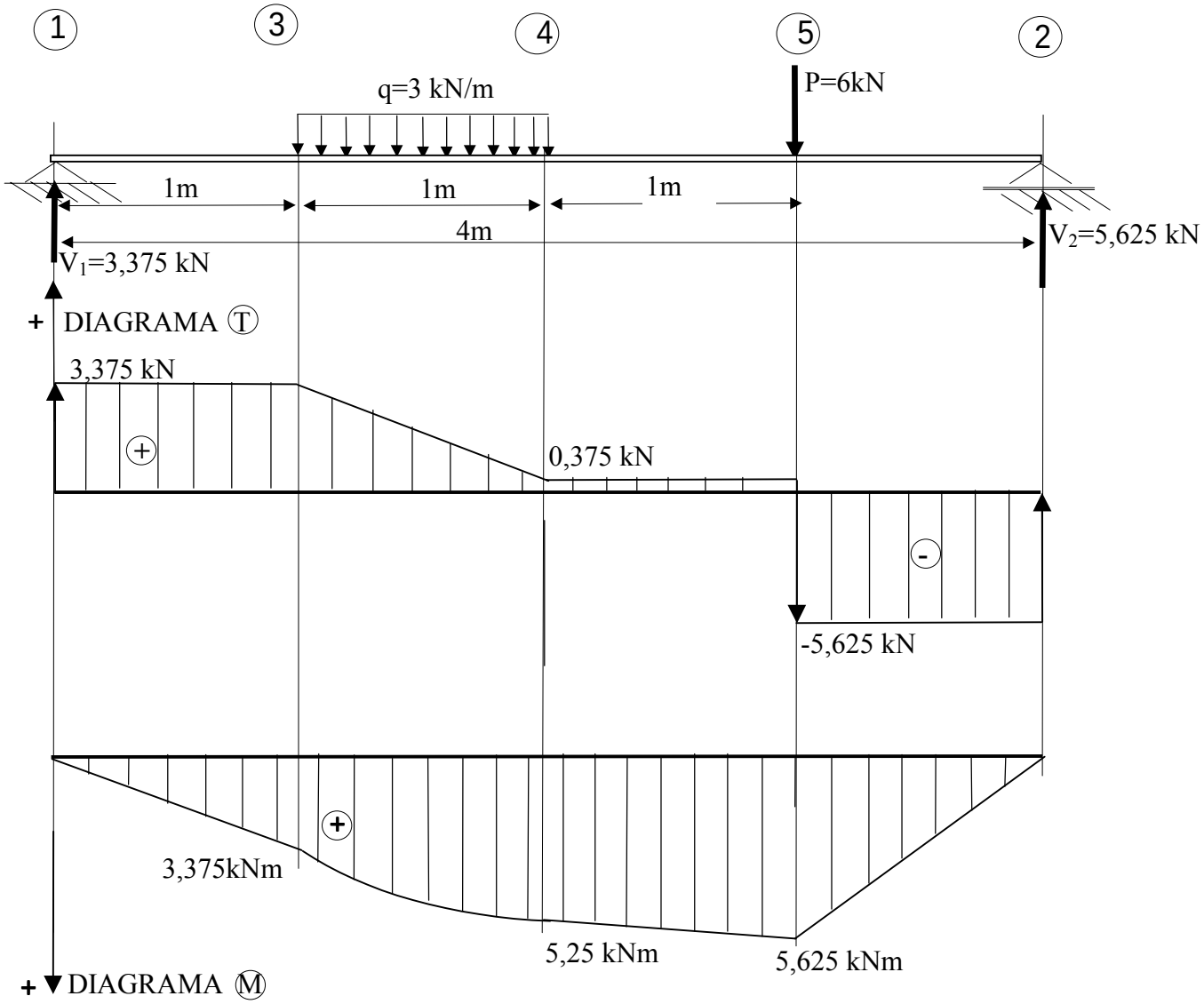
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
3	1	2	2,5	4	6	3	1,5

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
3,375	5,625	5,625	0.995	0.1026	0.1031	77	11.398	-0.167	5,625	3.053

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.11

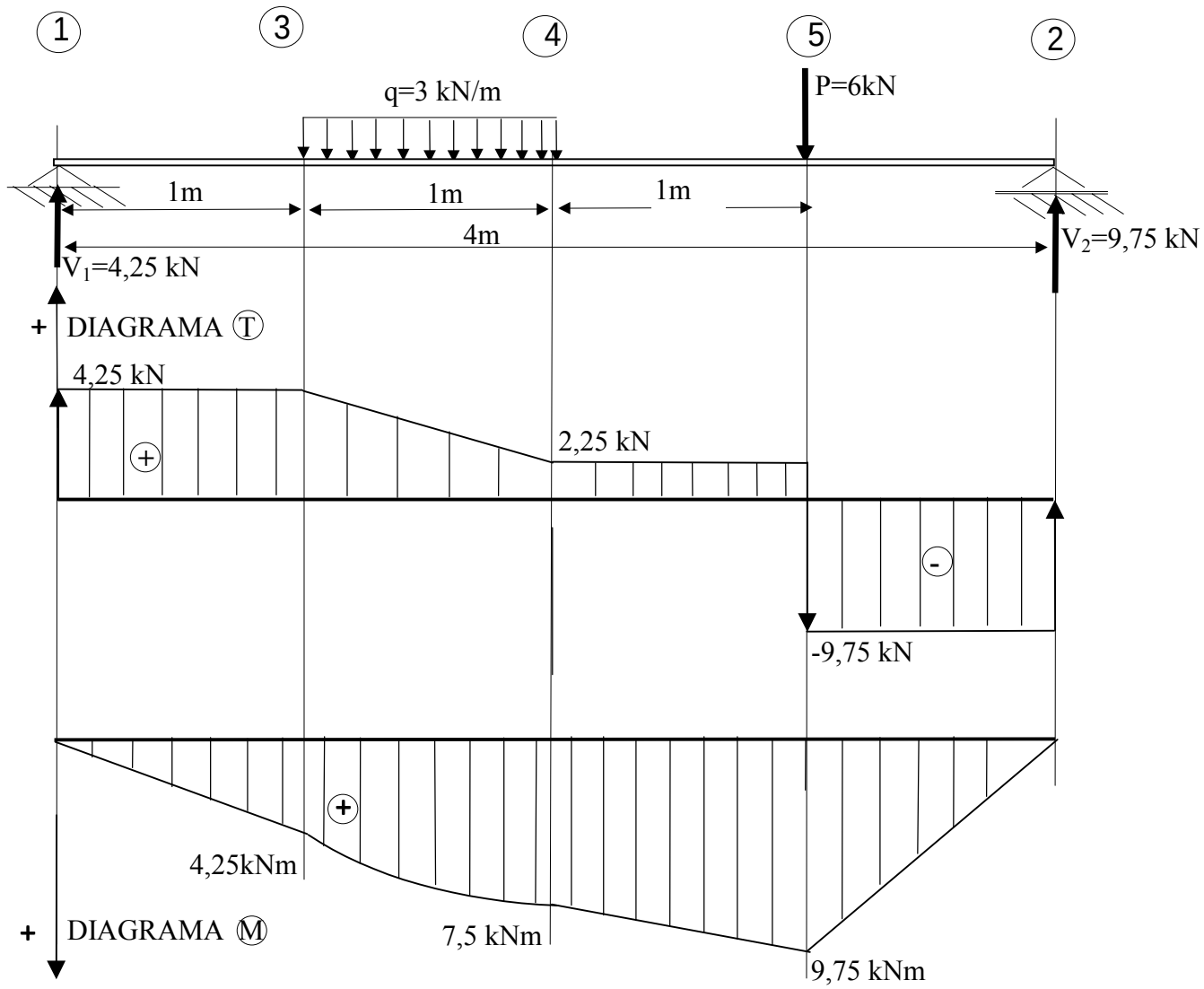
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
3	1	2	2,5	4	12	2	1,2

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
4,25	9,75	9,75	0.796	0.0525	0.066	108	8.693	-0.104	9,75	3.362

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.12

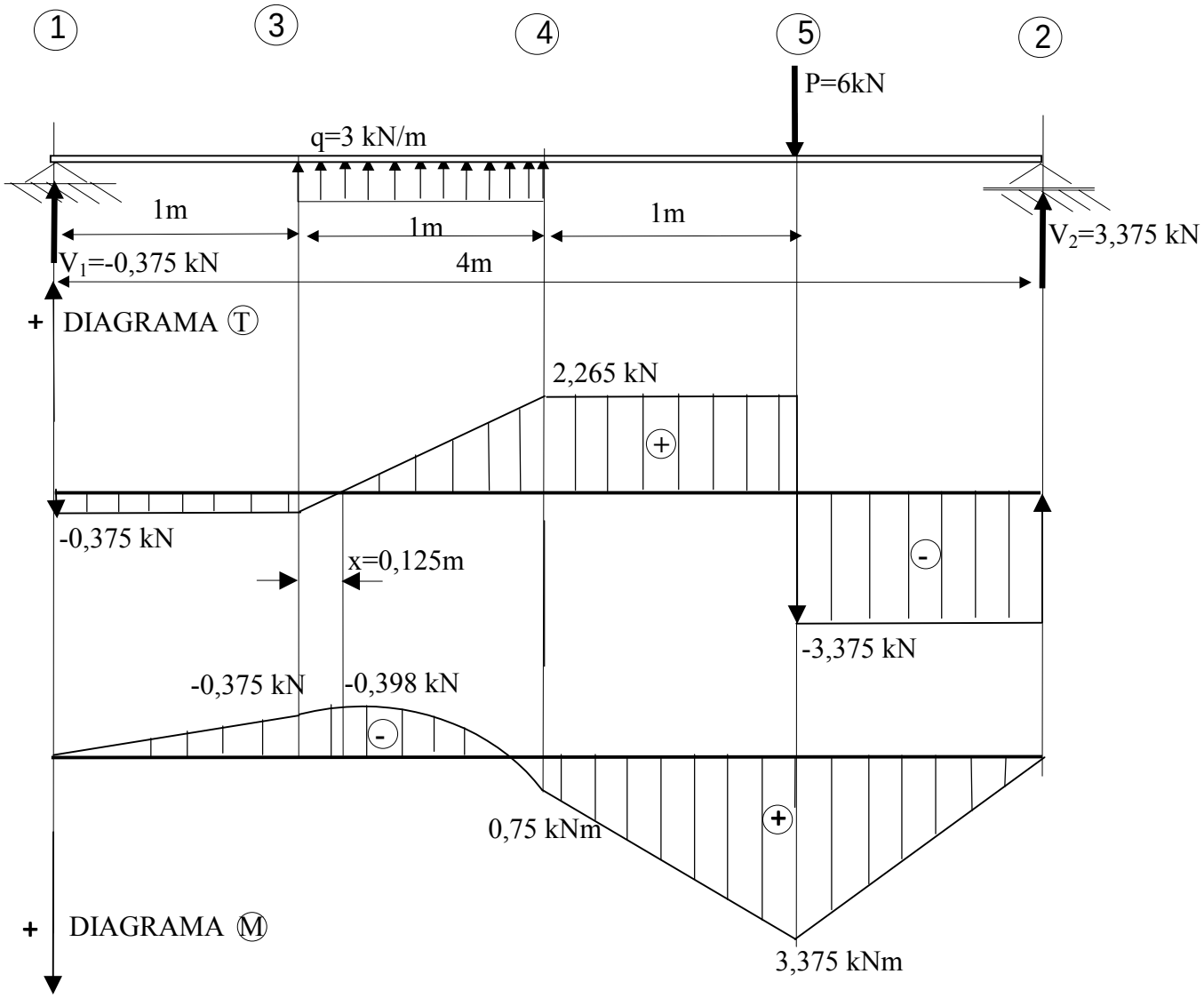
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
3	1	2	2.5	4	6	-3	1.5

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-0.375	3.375	3.375	0.995	0.1026	0.1031	65	5.992	0.049	3.375	2.571

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.13

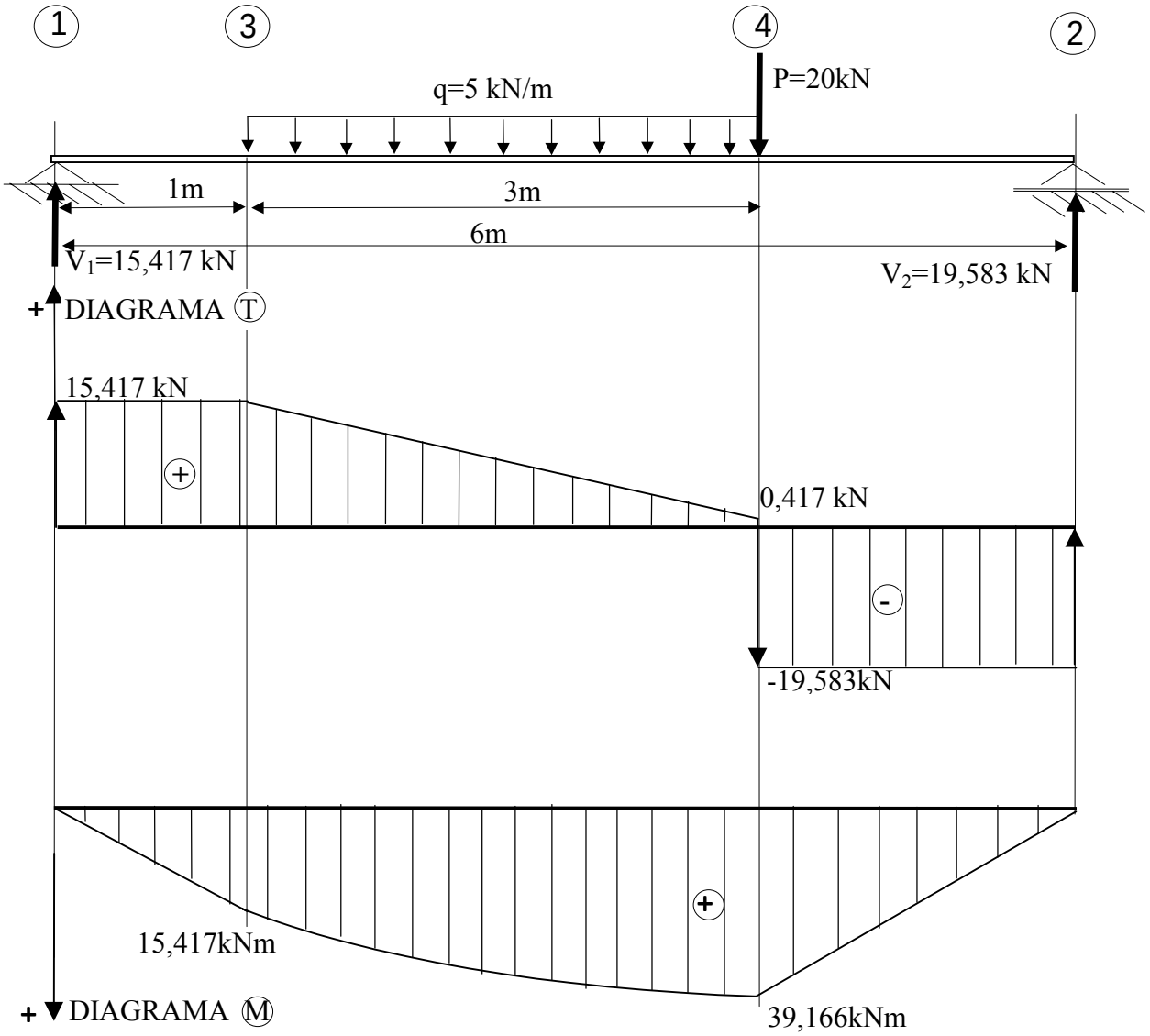
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
4	1	4	5	6	20	5	2,25

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
15,417	19,583	39,167	1.493	0.3463	0.2319	113	5.889	-0.306	19,583	3.29

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.14

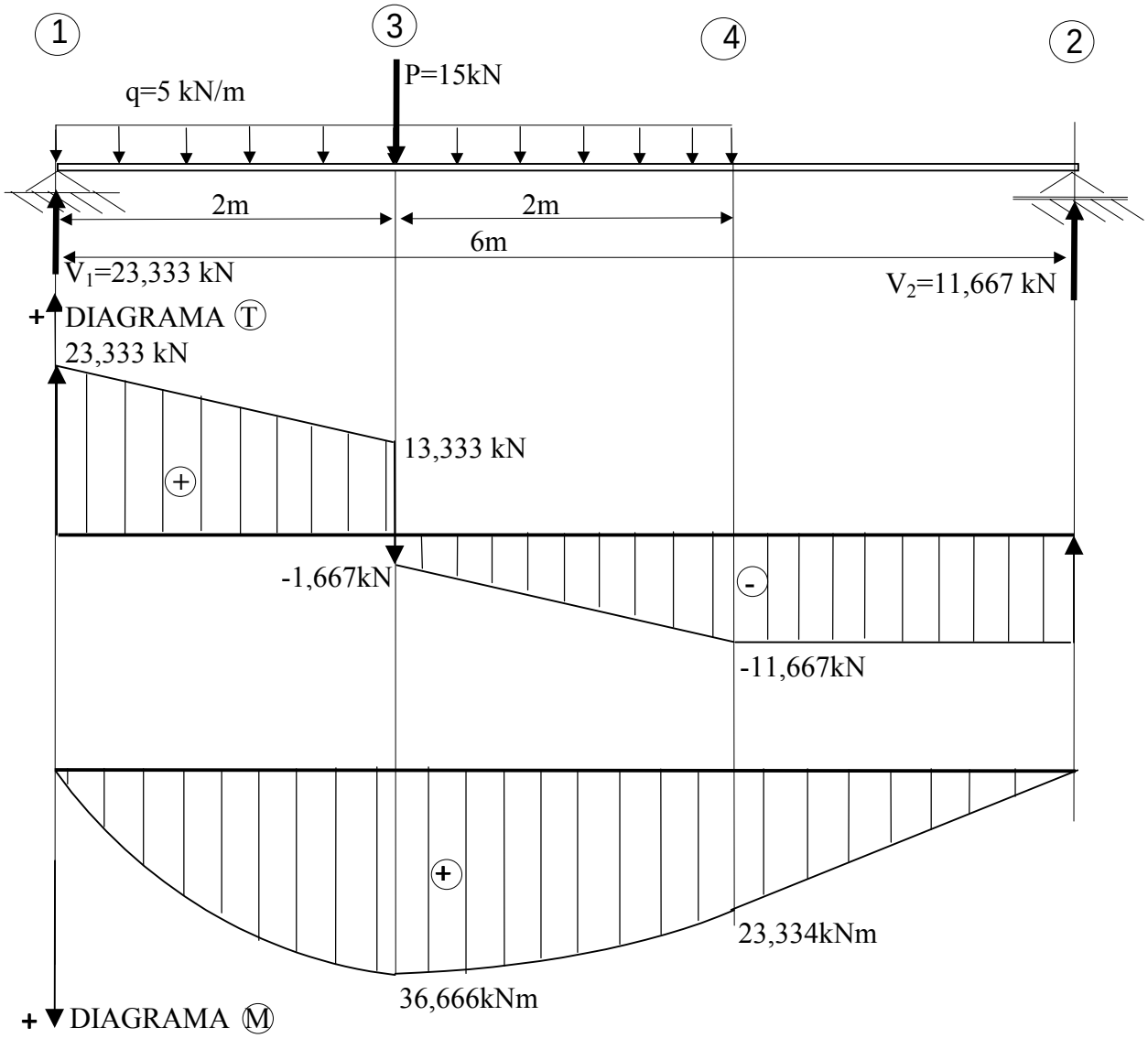
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
2	0	4	5	6	15	5	2,5

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
23,333	11,667	36,667	1.659	0.475	0.2863	103	4.973	-0.265	23,333	4.247

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.15

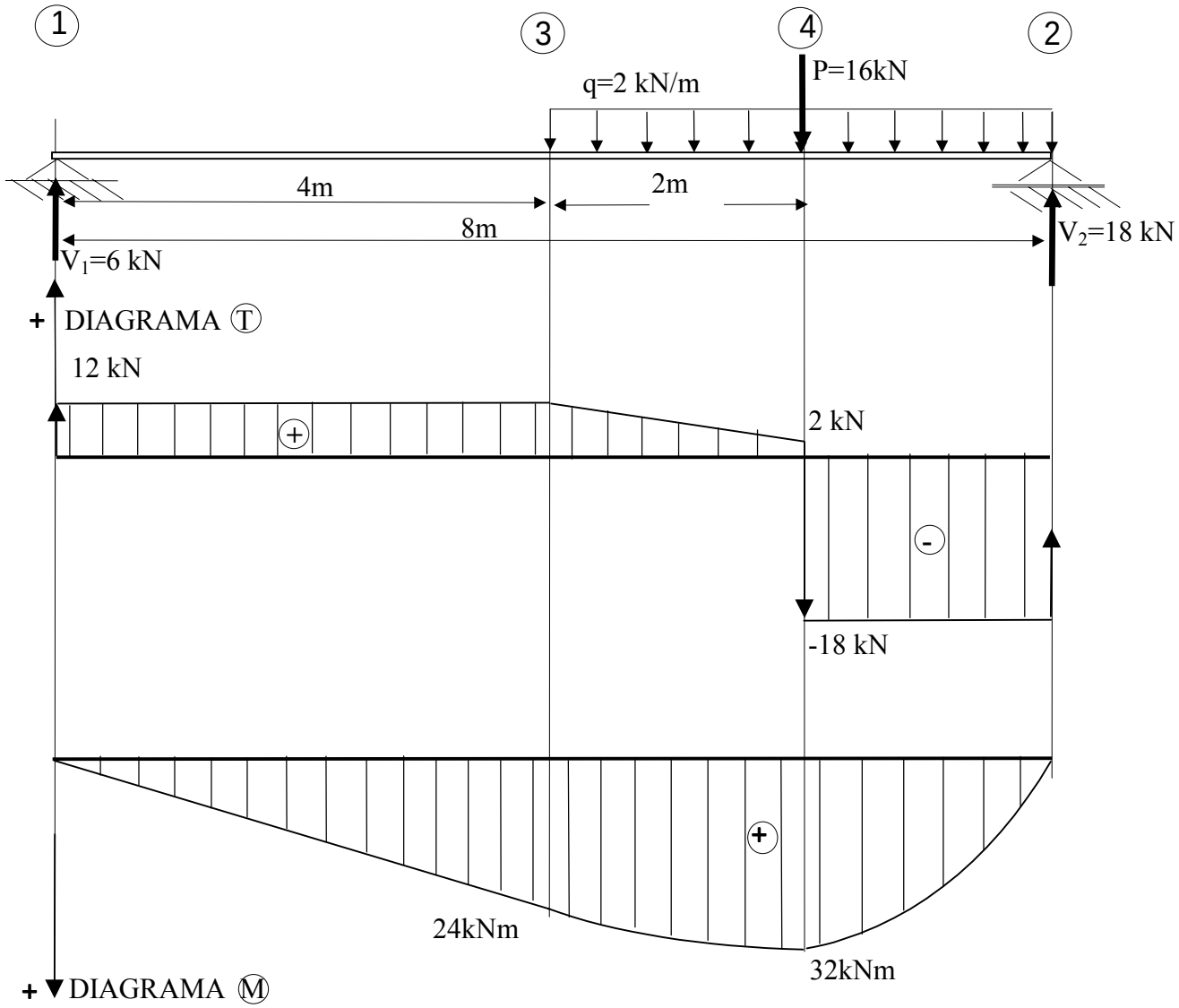
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
6	4	8	7	8	16	2	2,75

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
6	18	32	1.825	0.6322	0.3464	92	8.104	-0.43	18	3.733

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.16

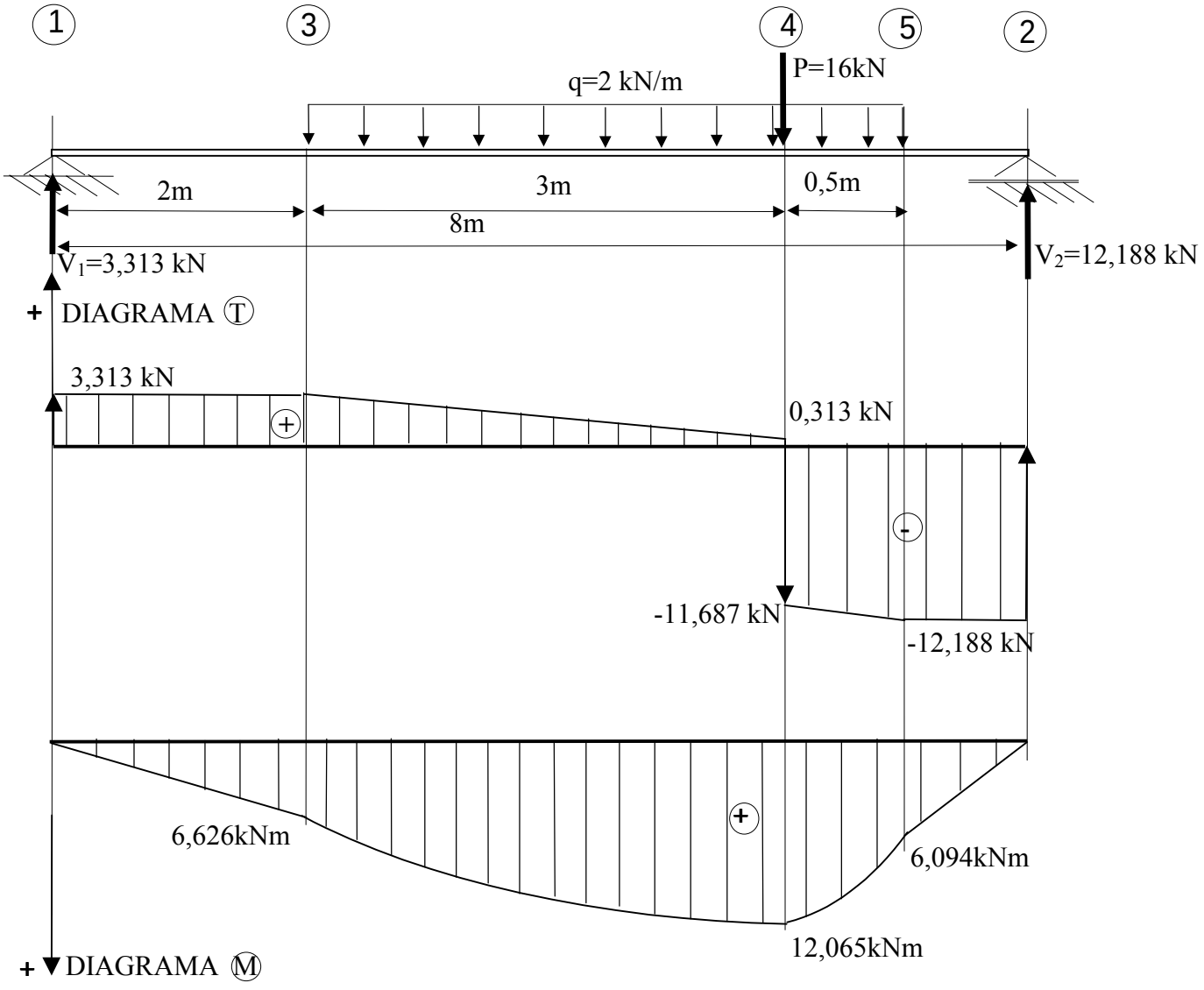
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
5	2	5,5	5,5	6	12	1	3

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
3,313	12,188	12,065	1.991	0.8208	0.4122	63	4.55	-0.5	12,188	4.941

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.17

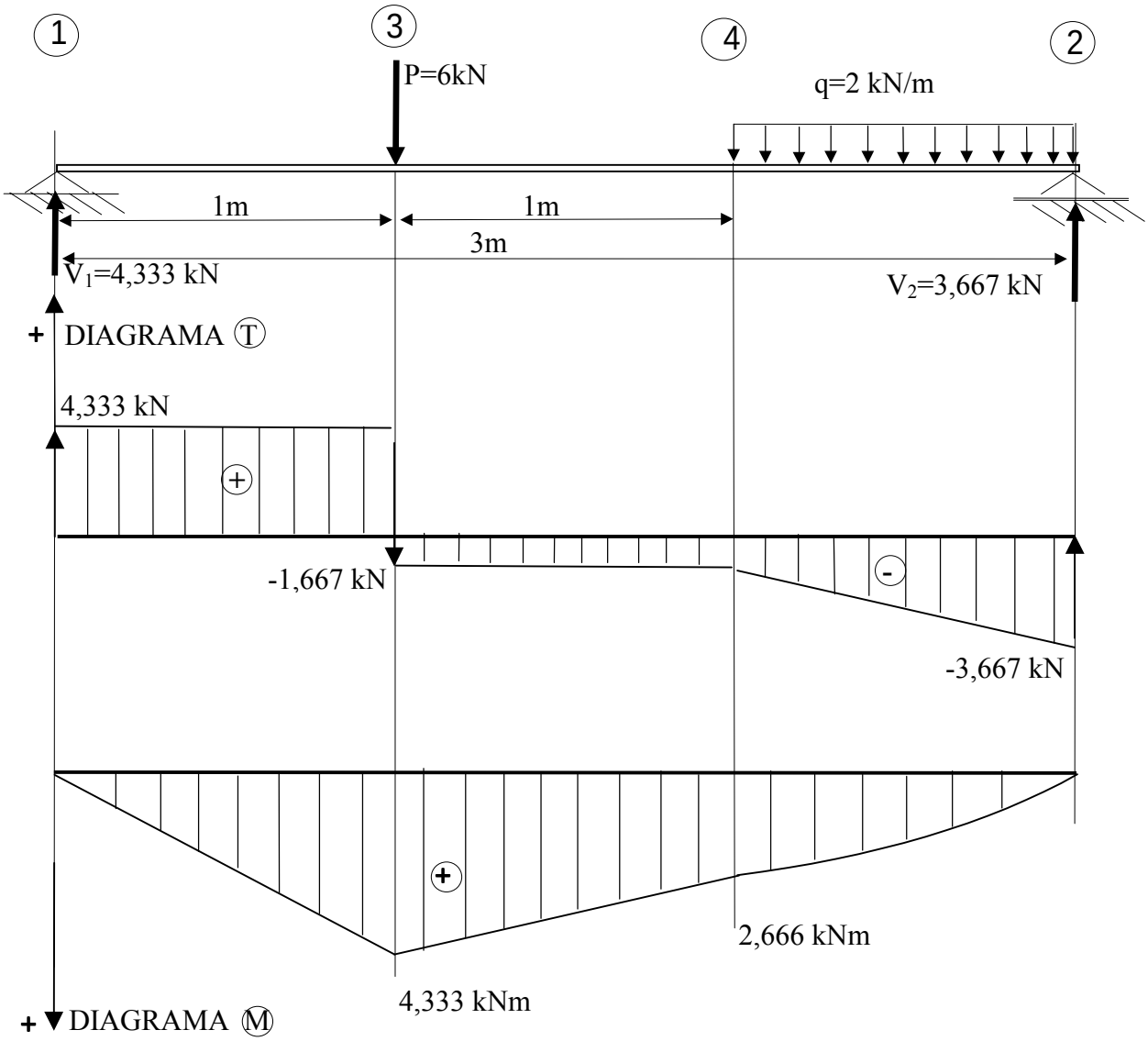
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
1	2	3	2	3	6	2	1,5

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
4,333	3,667	4,333	0.995	0.1026	0.1031	71	5.175	-0.195	4,333	2.766

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.18

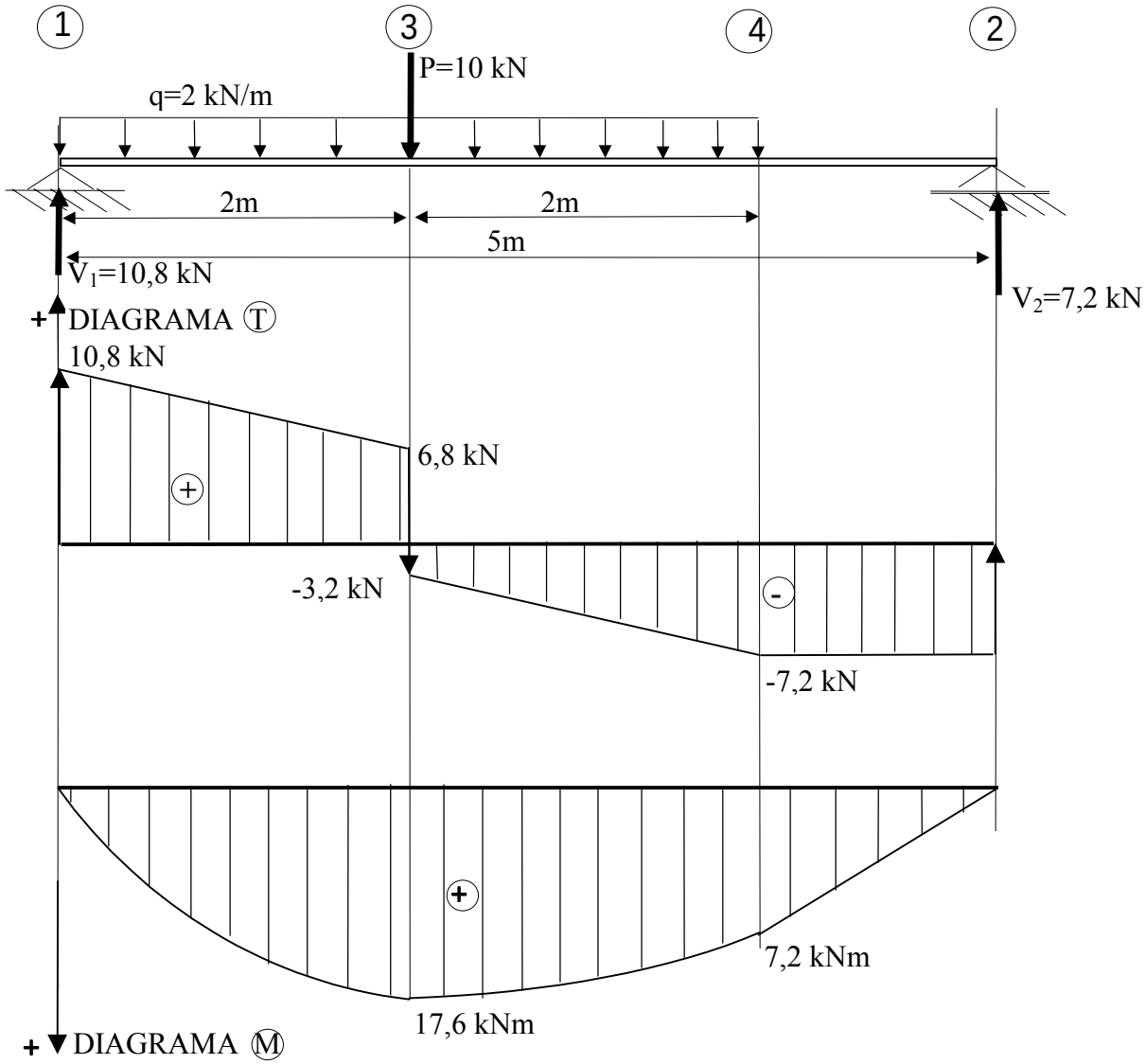
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
2	0	4	4,5	5	10	2	1

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
10,8	7,2	17,6	0.664	0.0304	0.0458	148	3.716	-0.415	10,8	2.38

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.19

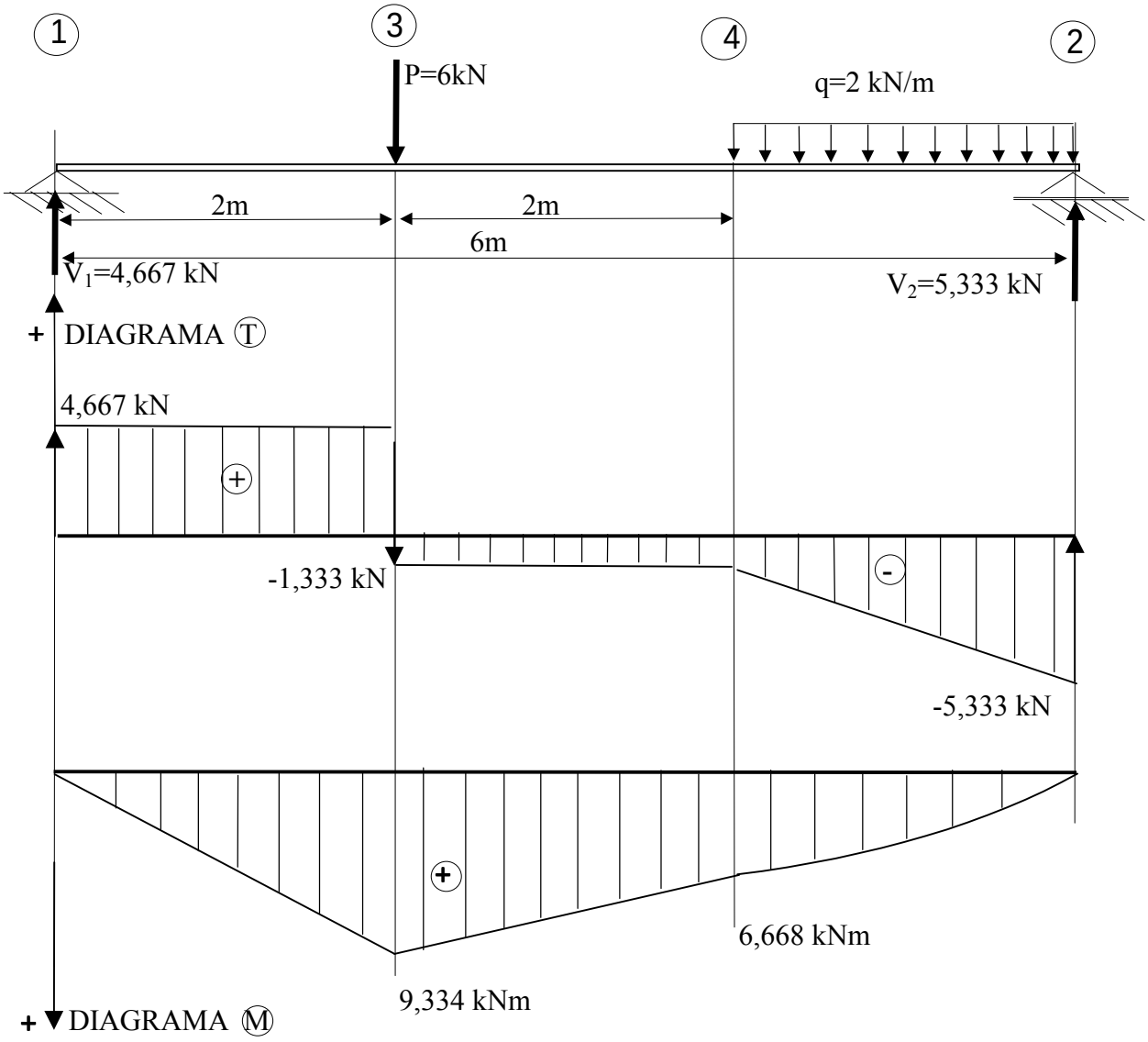
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
2	4	6	5	6	6	2	1

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
4,667	5,333	9,333	0.664	0.0304	0.0458	120	11.646	-0.601	5,333	1.788

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.20

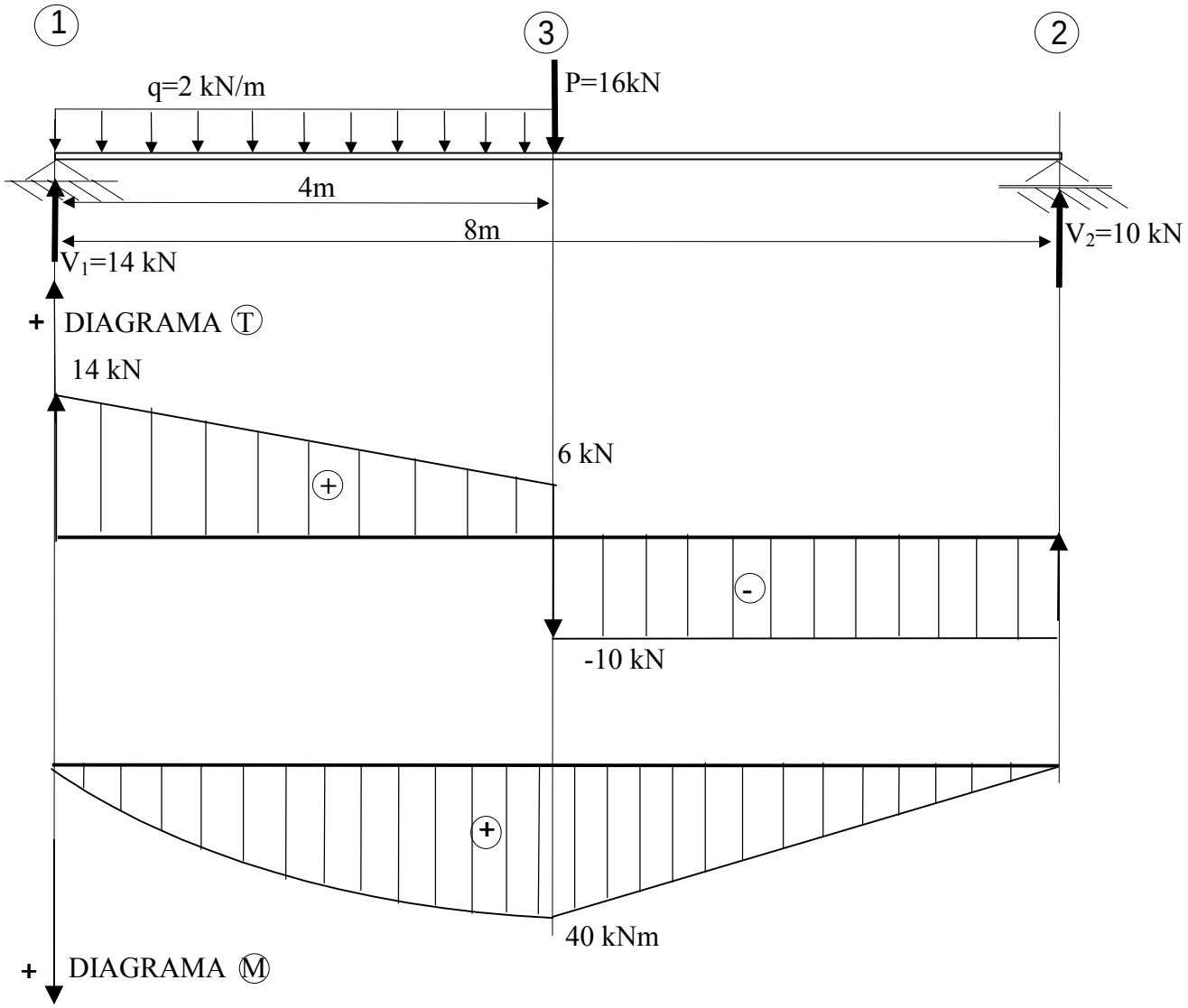
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
4	0	4	6	8	16	2	1

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
14	10	40	0.664	0.0304	0.0458	194	16.809	-0.397	14	1.796

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.21

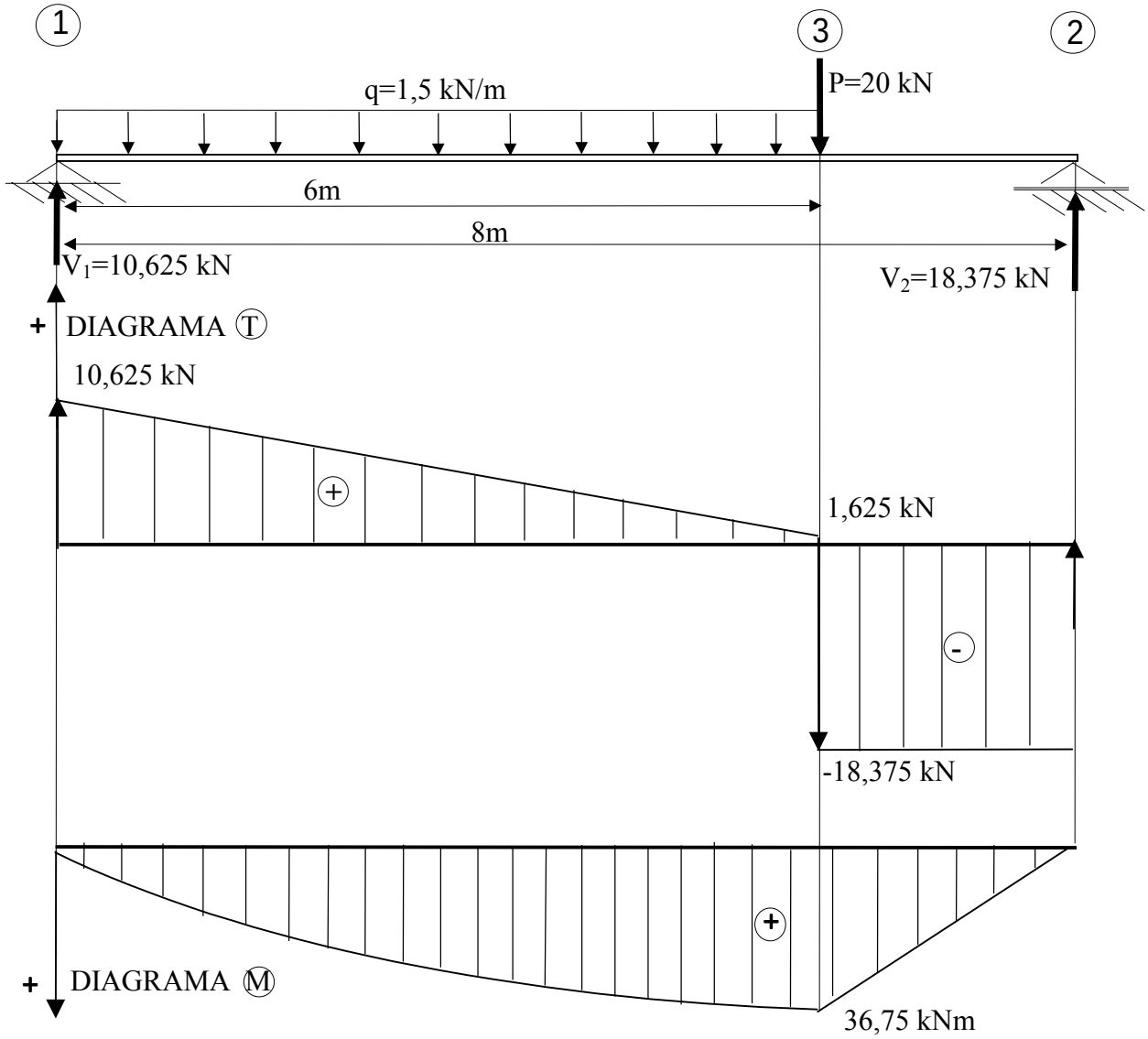
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
6	0	6	7	8	20	1,5	1,5

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	Mpa
10,625	18,375	36,75	0.995	0.1026	0.1031	144	10.018	-0.536	18,375	2.852

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.22

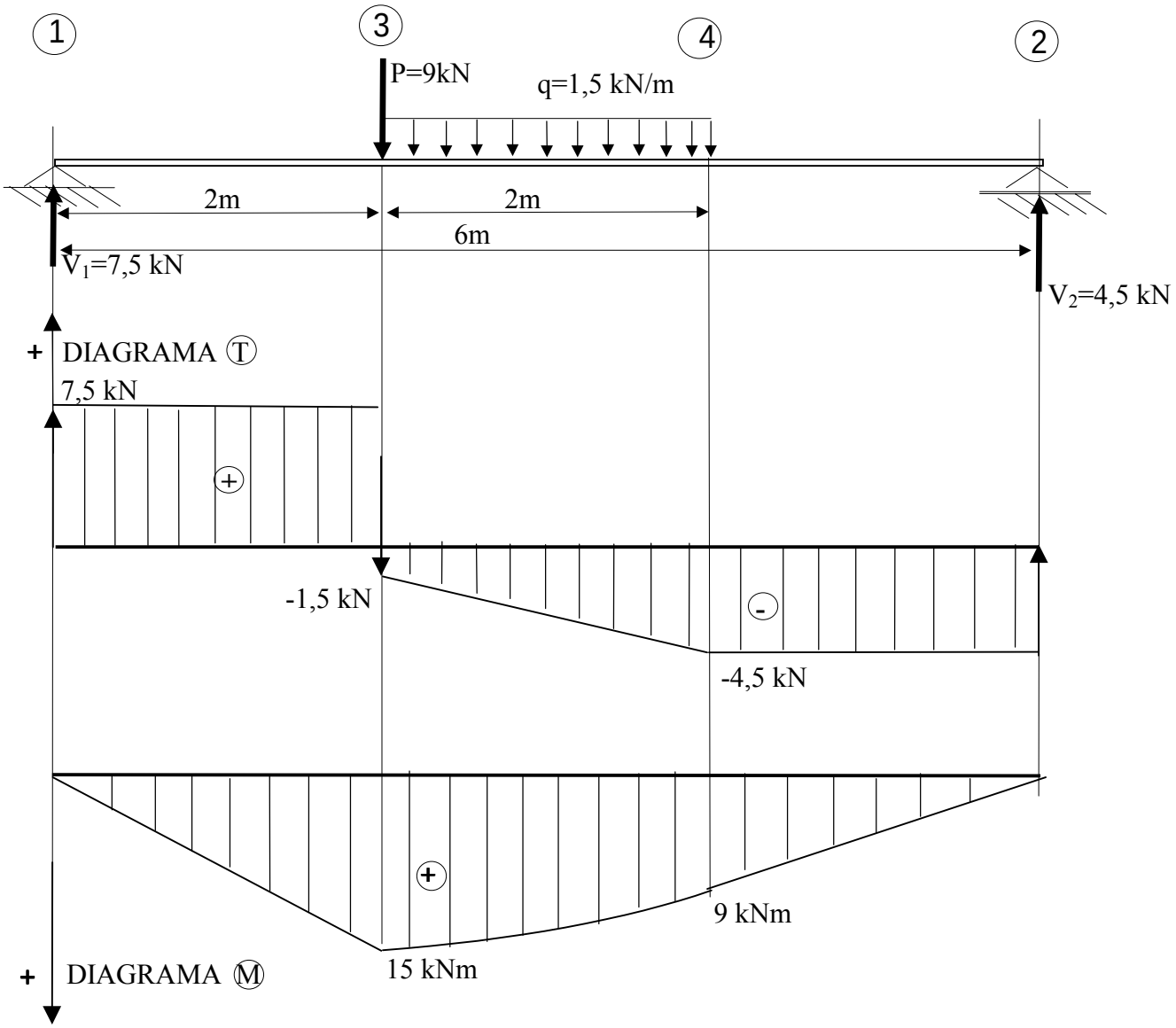
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
2	2	4	5	6	9	1,5	1,5

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
7,5	4,5	15	0.995	0.1026	0.1031	107	7.701	-0.411	7,5	2.108

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.23

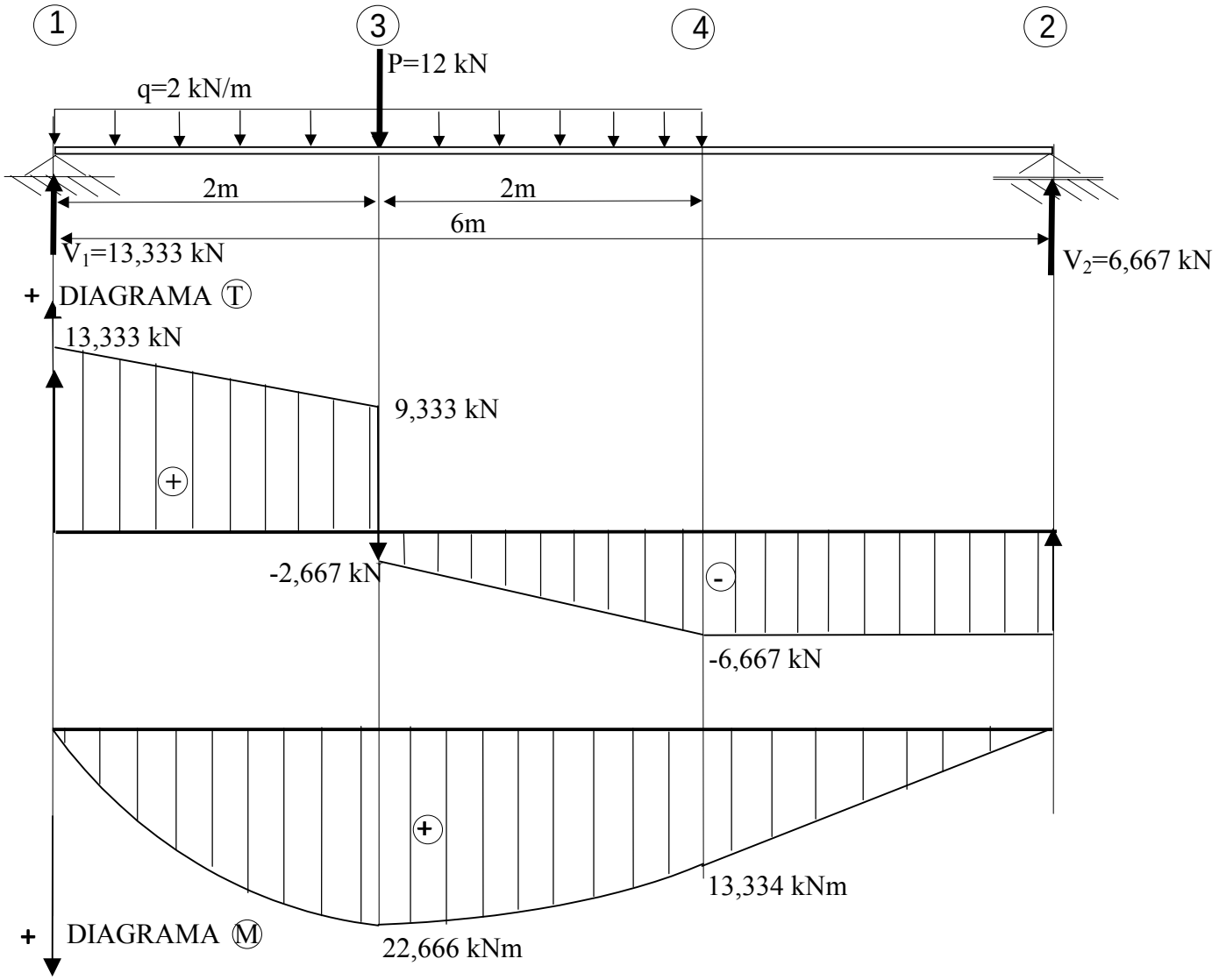
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
2	0	4	5	6	12	2	2

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
13,333	6,667	22,667	1.327	0.2432	0.2432	102	5.909	-0.316	13,333	3.093

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.24

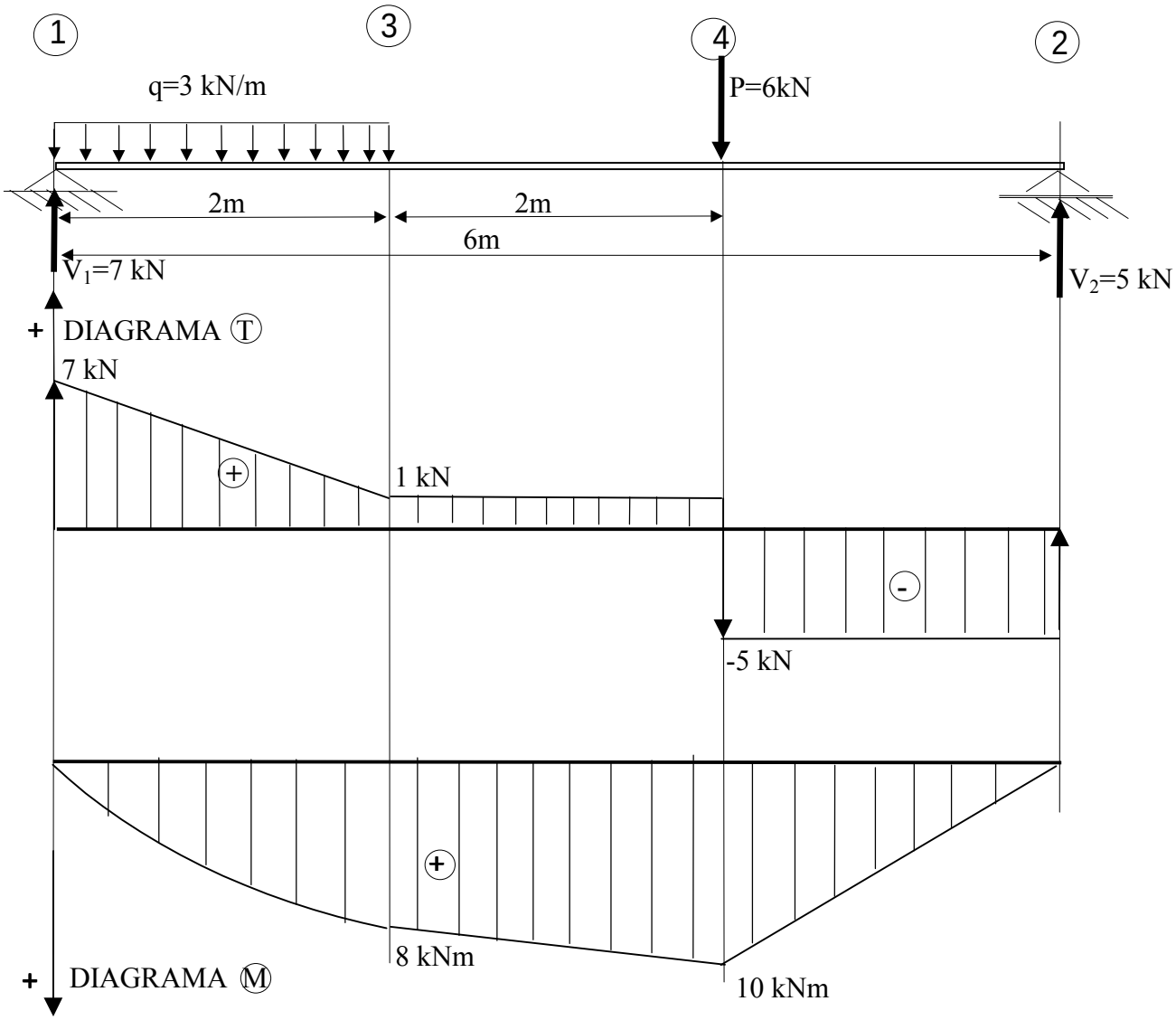
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
4	0	2	5	6	6	3	2

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
7	5	10	1.327	0.2432	0.1832	77	10.119	-0.527	7	2.849

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.25

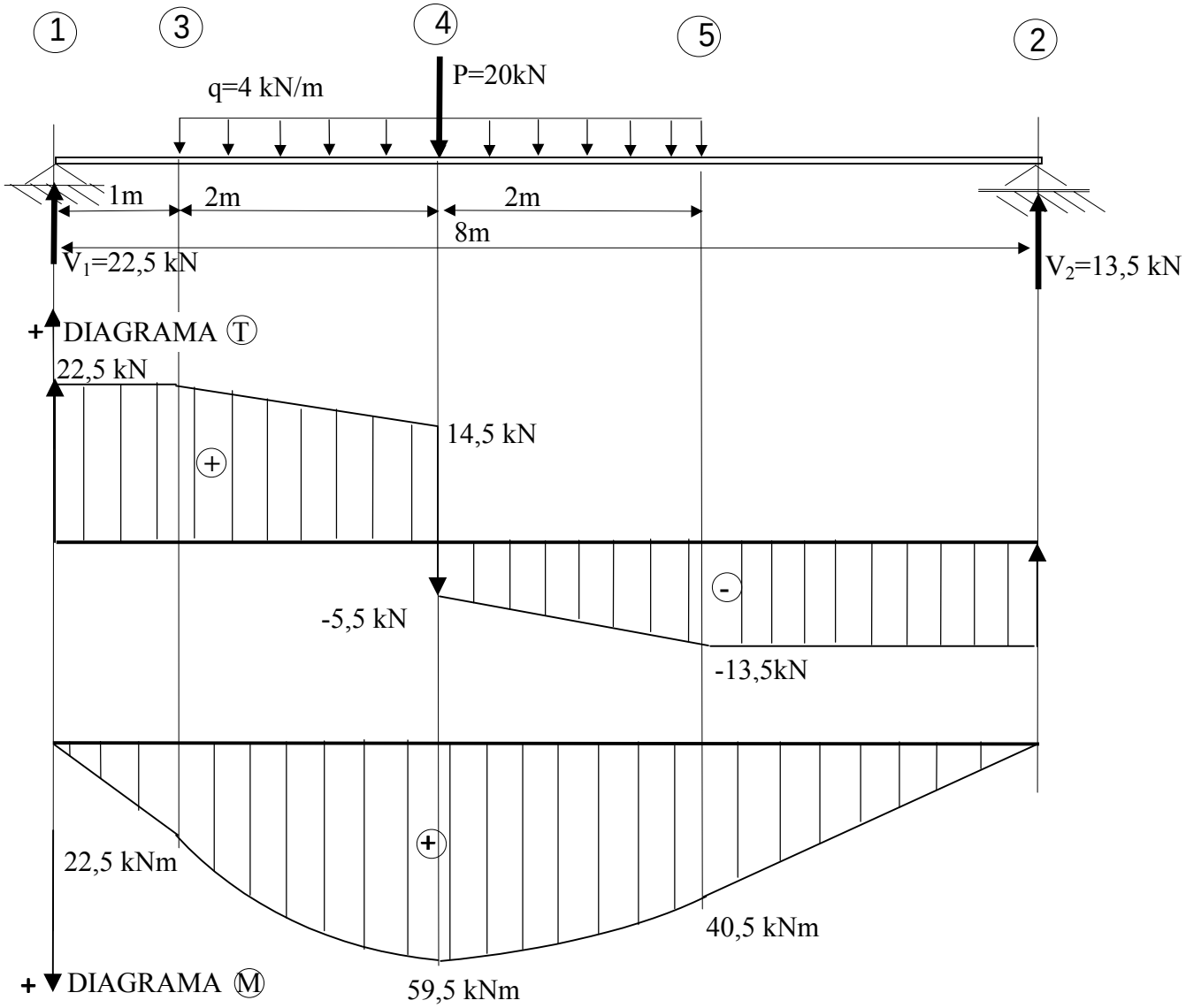
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
3	1	5	4	8	20	4	1,5

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
22,5	13,5	59,5	0.995	0.1026	0.1031	169	19.07	-0.04	22,5	2.535

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.26

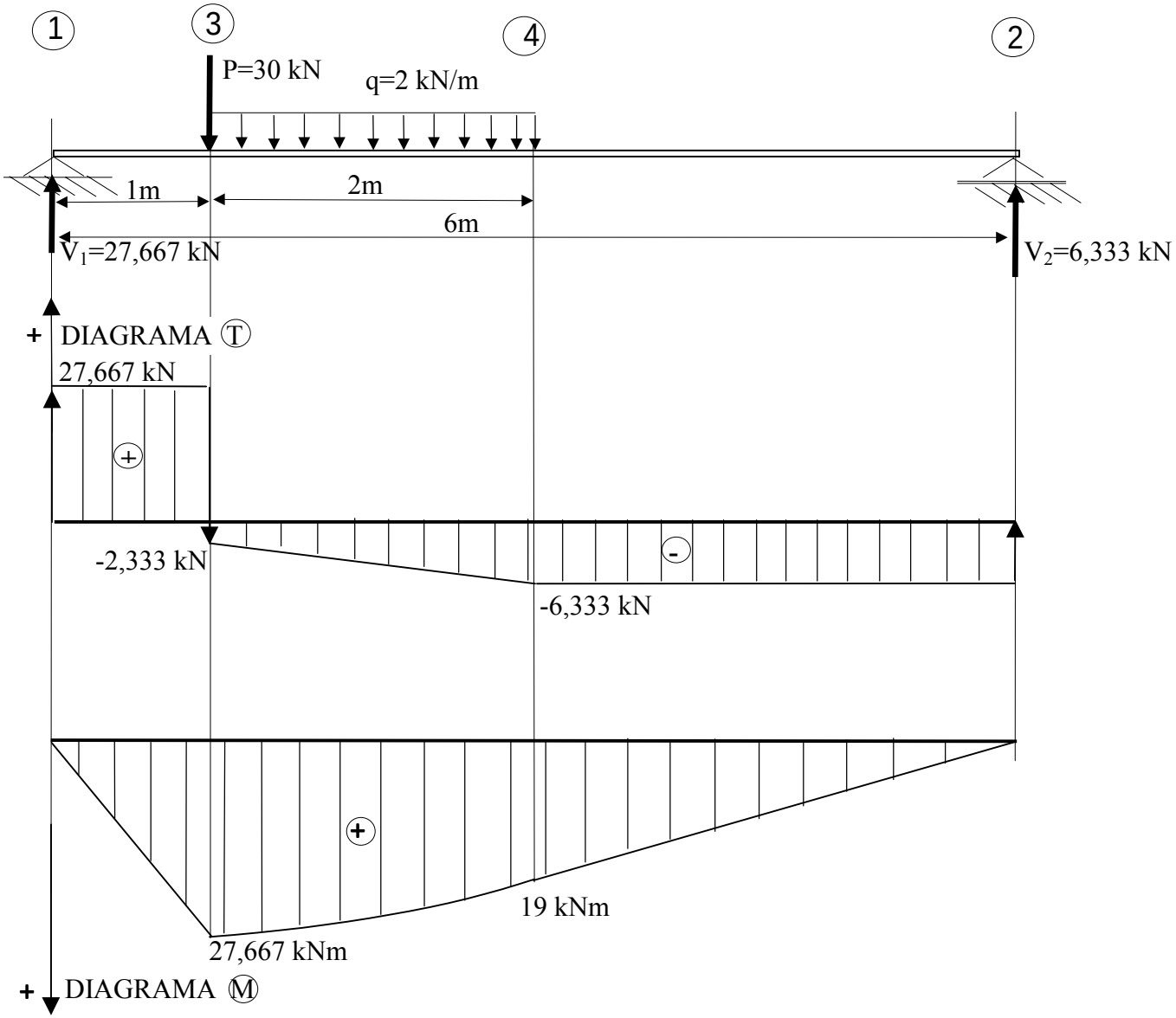
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
1	1	3	4	6	30	2	1,5

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
27,667	6,333	27,667	0.995	0.1026	0.1031	131	10.034	-0.211	27,667	5.188

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.27

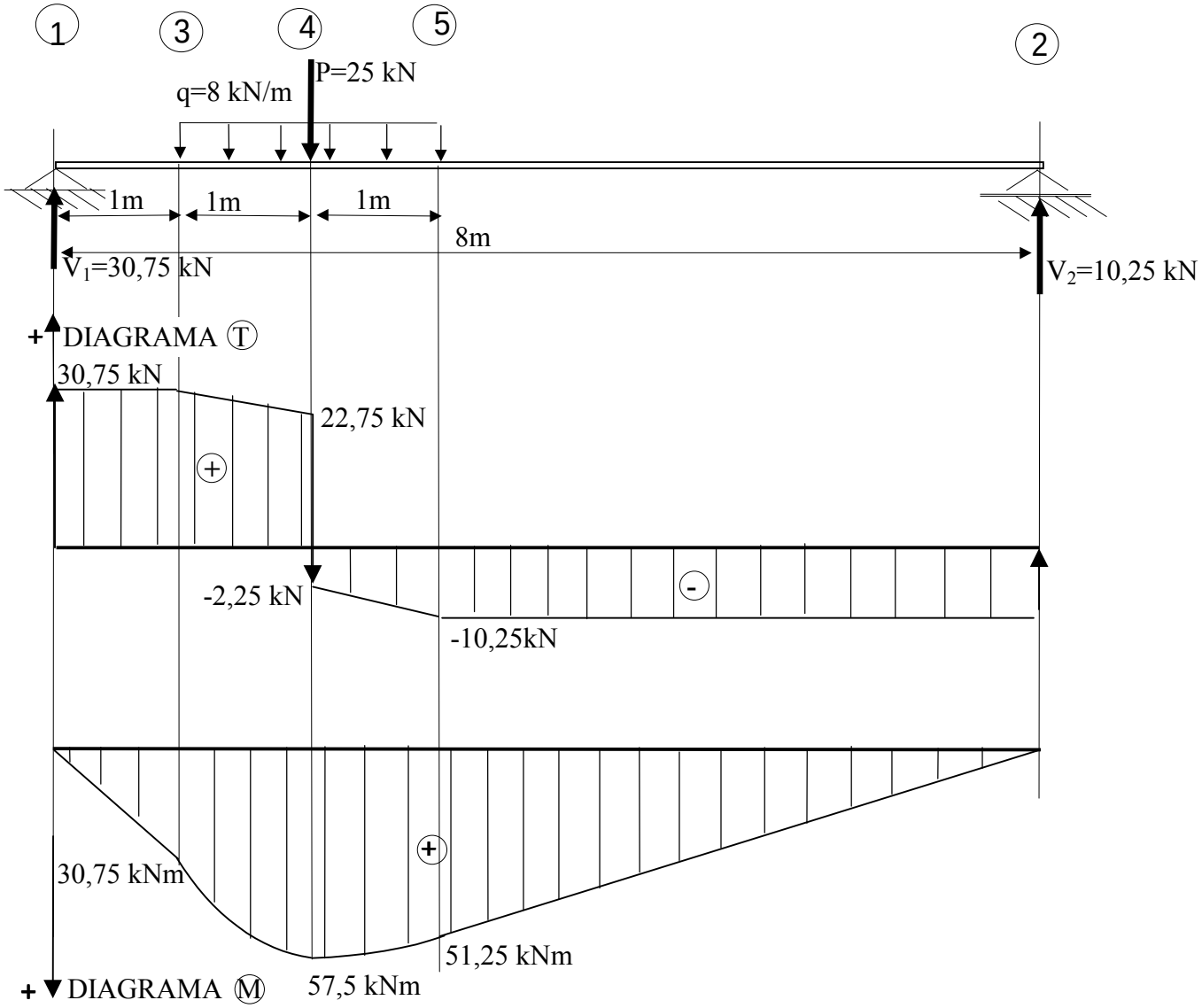
DATE DE INTRARE

A	b	c	d	L	P	q	λ
M	m	m	m	m	kN	kN/m	-
2	1	3	4	8	25	8	1,5

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
30,75	10,25	57,5	0.995	0.1026	0.1031	167	17.782	-0.068	30,75	3.548

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.28

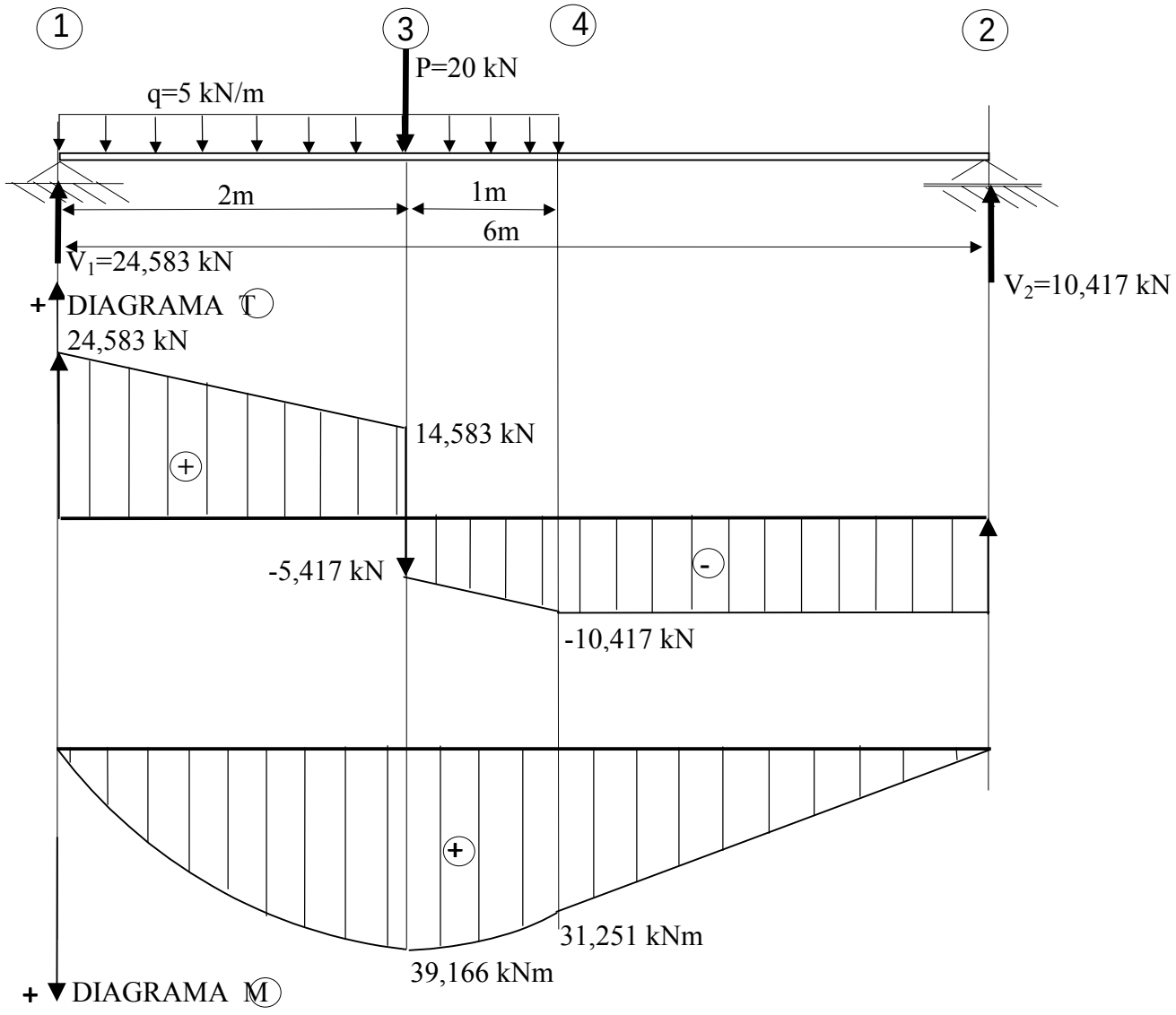
DATE DE INTRARE

A	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
2	0	3	4	6	20	5	2,5

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
24,583	10,417	39,167	1.695	0.475	0.2863	105	7.967	-0.163	24,583	4.305

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.29

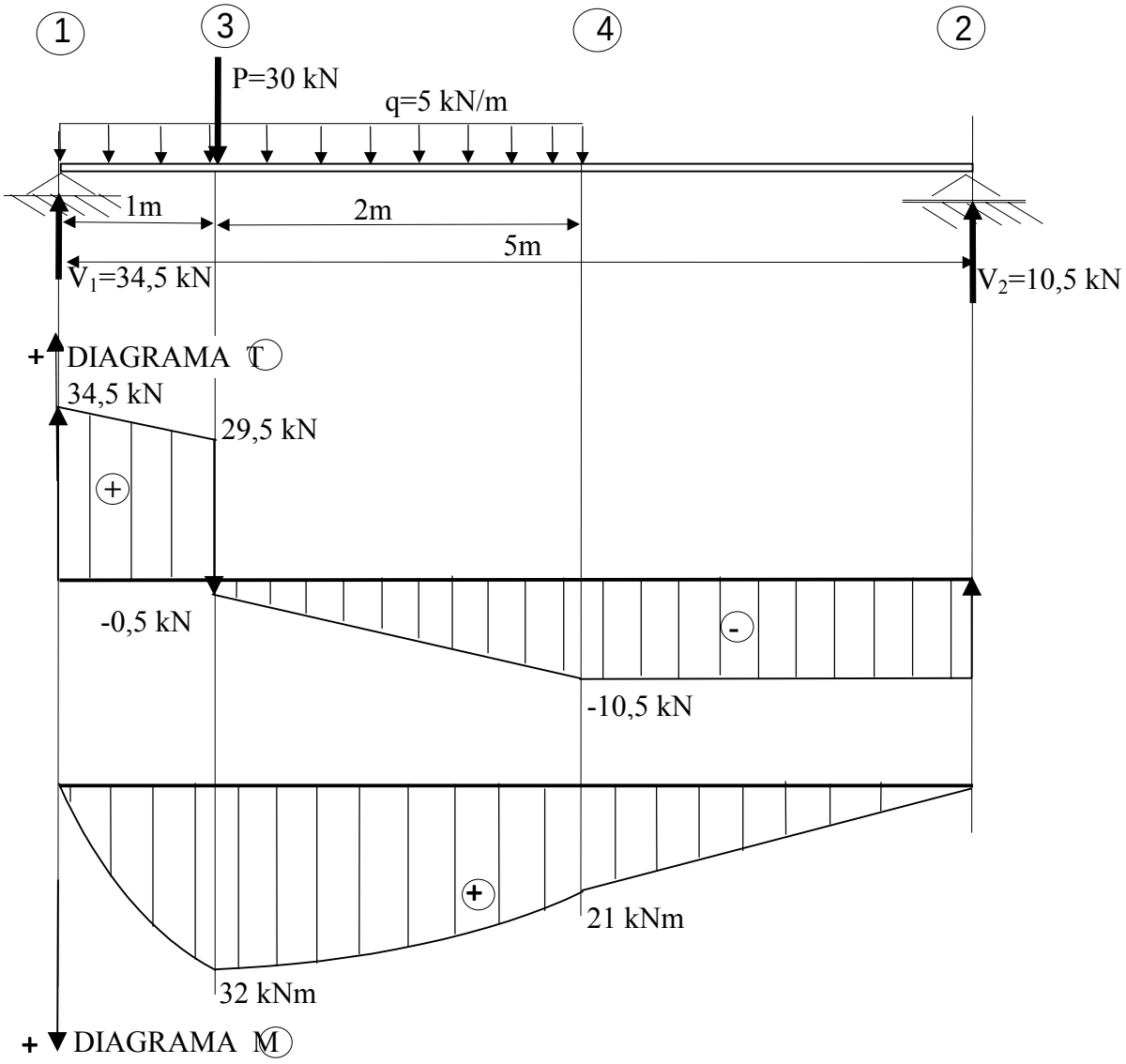
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
1	0	3	3	5	30	5	2

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
34,5	10,5	32	1.327	0.2432	0.1832	114	7.507	-0.122	34,5	6.407

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.30

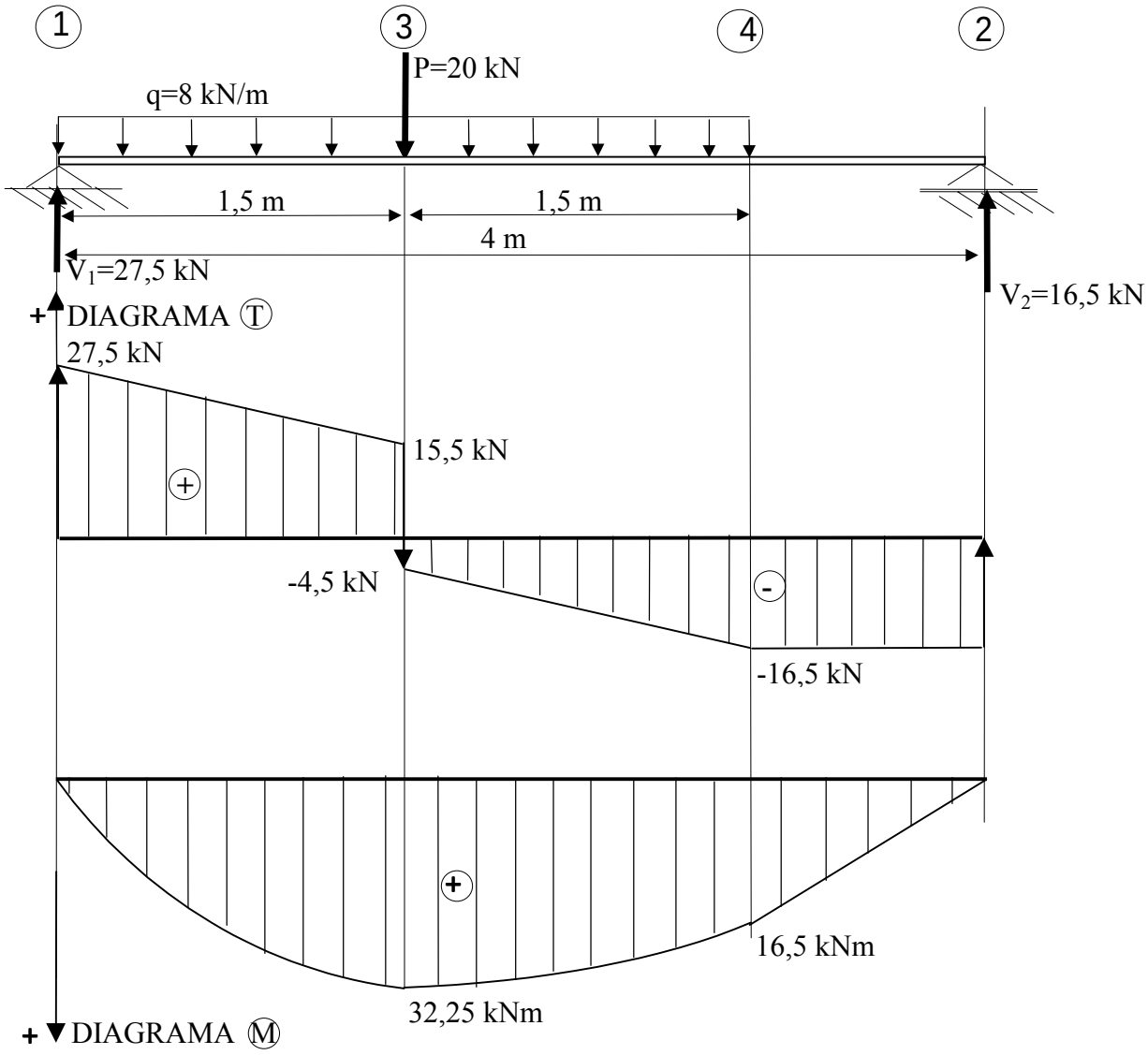
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
1,5	0	3	3	4	20	8	2

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
27,5	16,5	32,25	1.327	0.2432	0.1832	114	3.674	-0.174	27,5	5.107

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1b.31

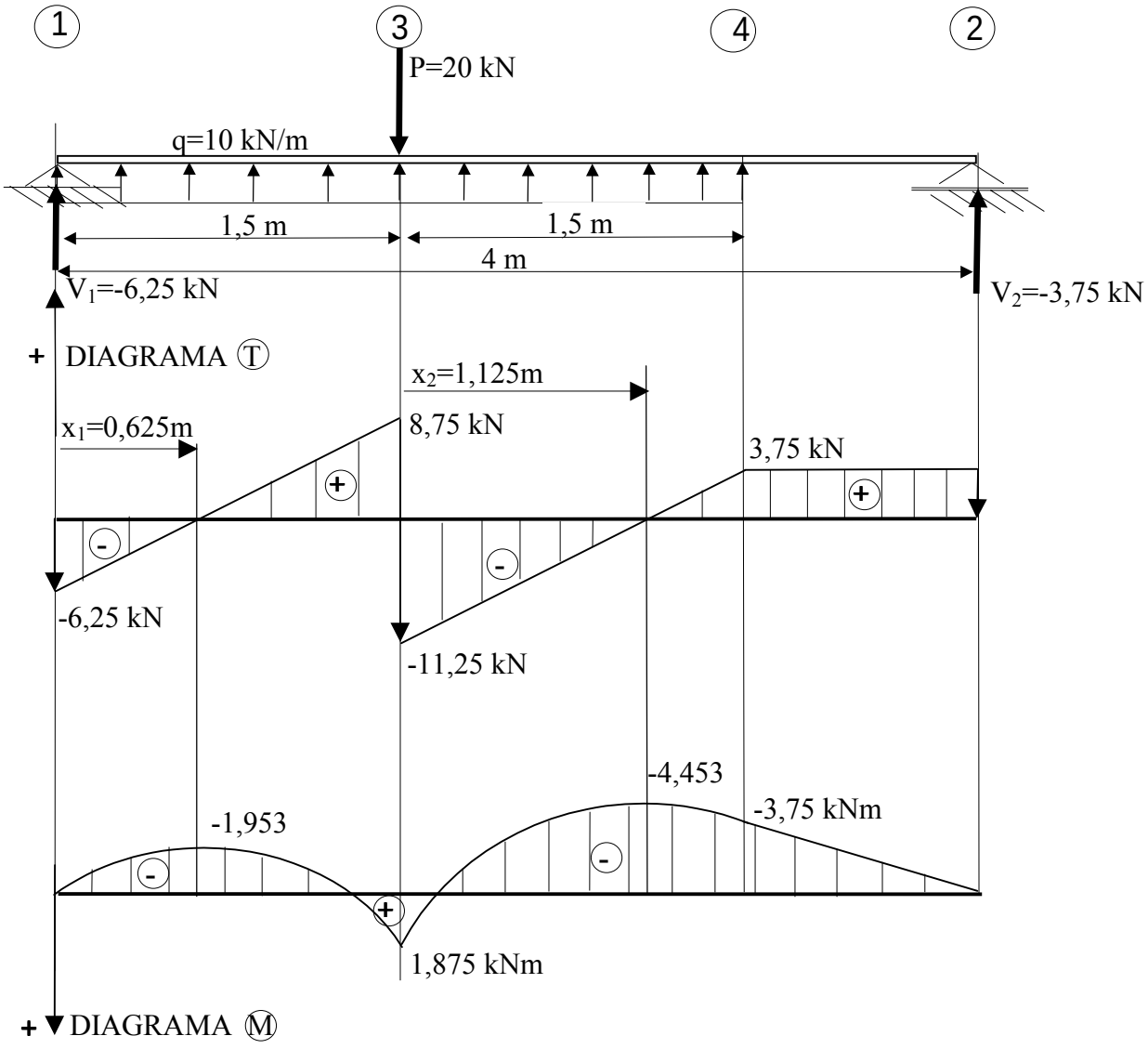
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	L	P	q	λ
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-
1,5	0	3	3	4	20	-10	2,2

DATE DE IEŞIRE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	mm	-	-	mm	mm	grade	kN	MPa
-6,25	-3,75	4.453	1.46	0.3237	0.2217	56	-5.609	0.214	11.25	7.871

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



MODELUL 1c

ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE CU CONSOLE PE DOUĂ REAZEME PUNCTUALE

Enunț

Se consideră o bară dreaptă cu console (fig.1c.1), având secțiunea constantă pe lungimea sa (rigiditate la încovoiere constantă *EI*) şi secțiunea având forma din fig.1c.2, cu două console de lungimi *a* şi *c* şi distanța între reazeme *b*, care este solicitată la încovoiere simplă prin acțiunea următoarelor *sarcini exterioare*: *o forță concentrată* ***P*** ce acționează la distanța *d*; o *sarcină uniform distribuită* ***q*** ce acționează între distanțele *e* şi *f; un cuplu concentrat* ***N*** ce acționează la distanța *g* şi a forțelor de legătură ***(reacțiunilor)*** V_1 ***şi*** V_2 necunoscute, având direcția şi sensul din fig. 1c.1.

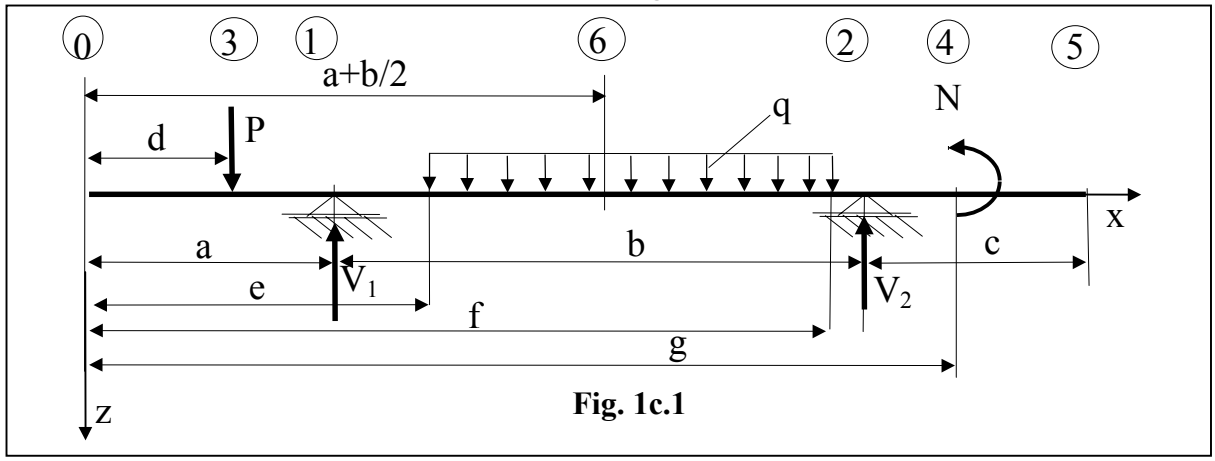


Fig. 1c.1

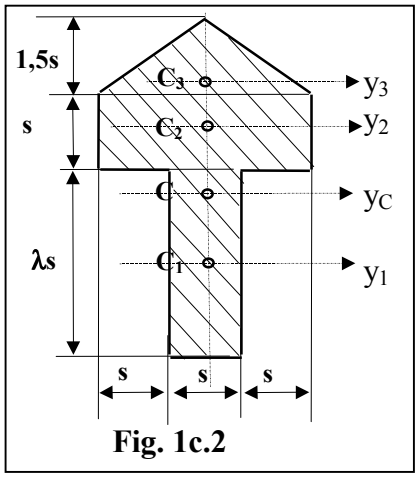


Fig. 1c.2

Se cere:

1. *să se determine reacțiunile* V_1 *şi* V_2
2. *să se traseze diagramele de forțe tăietoare* ***T*** *şi momente încovoietoare* ***M****;*
3. *să se dimensioneze bara (determinarea parametrului* ***s*** *al secțiunii);*
4. *să se determine tensiunea tangențială maximă .*
5. *să se determine deplasările şi rotirile secțiunilor capătului din stânga (*w_0 *şi* φ_0*) şi respectiv cea situată la mijlocul distanței între reazeme (*w_6 *şi* φ_6*).*

CAZ PARTICULAR

Pentru un caz particular se dau valorile parametrilor în tabelul următor:

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
2,45	1,55	4,22	0	3,55	6,44	8,22	2	22,3	5,7	-12

σ_a=120 MPa; E= $2{,}1\cdot10^5$MPa;

Figura corespunzătoare pentru acest caz particular este 1c.3.

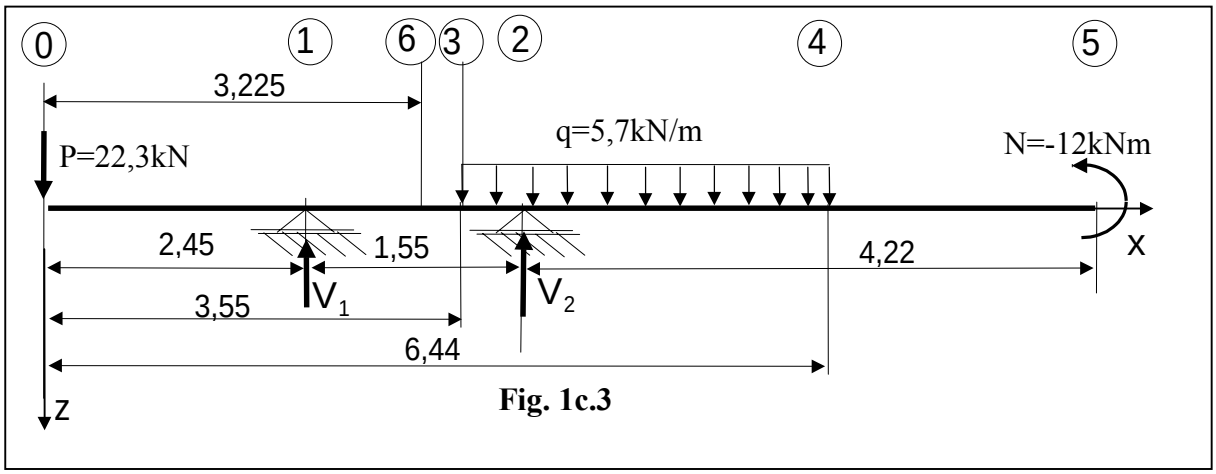


Fig. 1c.3

Determinarea reacțiunilor se face utilizând ecuațiile de echilibru din Mecanică:

$$\sum M_{2y}=0 \Rightarrow V_1=\frac{P\cdot(a+b-d)+N+q\cdot(f-e)\cdot\left(a+b-\frac{e+f}{2}\right)}{b}=39{,}232\,(kN)$$

$$\sum M_{1y}=0 \Rightarrow V_2=\frac{-P\cdot(a-d)-N+q\cdot(f-e)\cdot\left(\frac{e+f}{2}-a\right)}{b}=-0{,}459\,(kN)$$

Relația pentru verificare este: $\sum F_z=0 \Rightarrow P+q(f-e)=V_1+V_2$

$\Rightarrow$ $38{,}733=39{,}232-0{,}459=22{,}3+5{,}7\cdot(6{,}44-3{,}55)$

2. Diagramele de eforturi tăietoare şi momente încovoietoare

Folosind regulile stabilite la construcția diagramelor de eforturi se trasează diagramele *T=T(x)* şi *M=M(x)* din fig.1c.4 şi fig.1c.5 din care rezultă forța tăietoare maximă: $T_{max}=22{,}3$ *kN*, momentul încovoietor maxim $M_{max}=54{,}635$ *kNm,* precum şi poziția secțiunii corespunzătoare momentului maxim față de capătul barei: *x=2,45m.*

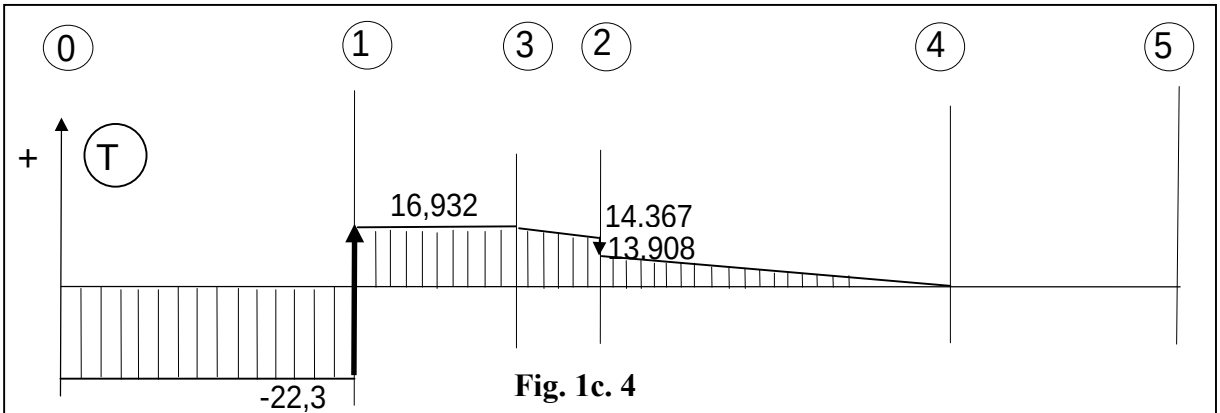


Fig. 1c. 4

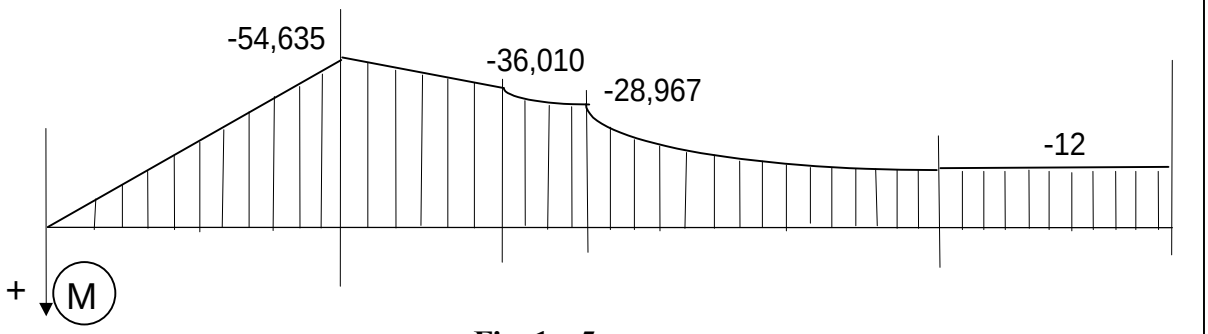


Fig. 1c. 5

3. Dimensionarea barei la încovoiere

Relația de dimensionare la solicitarea de încovoiere este:

$$W_{yznec} = \frac{M_{iy\,max}}{\sigma_a};\ \text{unde}$$

W_y este *modulul de rezistență al barei* şi se calculează astfel: $W_y = \frac{I_y}{z_{max}}$,

$z_{max}= max[z_C; (\lambda s+2{,}5s-z_C)]$ este distanța maximă până la fibra extremă.

În figura 1c.6 este reprezentată secțiunea barei (constantă pe lungimea sa) şi axele y_0, y_1, y_2, y_3, y_C , care trec prin punctele O, C_1, C_2, C_3 şi C unde :

- punctul O este un punct de referință al secțiunii;
- punctul C_1 este centrul de greutate al dreptunghiului 1;
- punctul C_2 este centrul de greutate al dreptunghiului 2;
- punctul C_3 este centrul de greutate al triunghiului 3;
- punctul C este centrul de greutate al secțiunii.

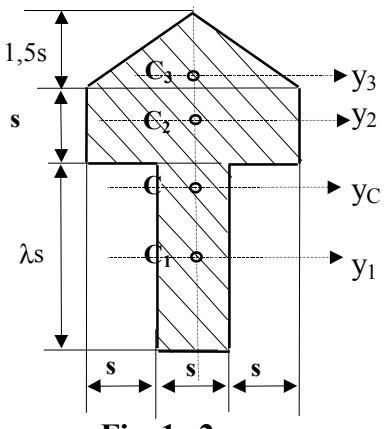


Fig. 1c.2

Centrul de greutate C al suprafeței secțiunii se

determină cu ajutorul relației: $z_C = \dfrac{A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3}{A_1 + A_2 + A_3}$

unde s-a notat cu :

$z_1 = 0{,}5\lambda s$ - *distanța* OC_1; $A_1 = \lambda s^2$ - *aria dreptunghiului 1*

$z_2 = (0{,}5+\lambda)s$ - *distanța* OC_2; $A_2 = 3s^2$ - *aria dreptunghiului 2*

$z_3 = (1{,}5+\lambda)s$ - *distanța* OC_3 ; $A_3 = 2{,}25s^2$ - *aria triunghiului 3*

după înlocuiri rezultă: $z_C = \dfrac{0{,}5\lambda^2 + 5{,}25\lambda + 4{,}875}{\lambda + 5{,}25} s$;

pentru cazul considerat (λ=2) rezultă: $z_C / s = 2{,}397$

Momentul de inerție ale suprafeței I_{yC} în raport cu axa ce trece prin centrul ei de greutate se determină astfel: $I_{yC} = I_{y1C} + I_{y2C} + I_{y3C}$, unde:

$$I_{y1C} = \frac{s \cdot (\lambda s)^3}{12} + A_1 \cdot d_1^2;$$

$$I_{y2C} = \frac{3s \cdot (s)^3}{12} + A_2 \cdot d_2^2;$$

$$I_{y3C} = \frac{3s \cdot (1{,}5s)^3}{36} + A_3 \cdot d_3^2;$$

$d_1 = z_C - 0{,}5\lambda s$ *este distanța* CC_1

$d_2 = \lambda s + 0{,}5s - z_C$ *este distanța* CC_2

$d_3 = \lambda s + 1{,}5s - z_C$ *este distanța* CC_3

Rezultă după înlocuiri:

$$I_{yC} = \frac{\lambda^3 + 6{,}375}{12} s^4 + \lambda \left(\frac{z_C}{s} - 0{,}5\lambda \right)^2 s^4 + 3 \left(-\frac{z_C}{s} + 0{,}5 + \lambda \right)^2 s^4 + 2{,}25 \left(-\frac{z_C}{s} + 1{,}5 + \lambda \right)^2 s^4$$

înlocuind λ=2 pentru cazul considerat rezultă : $I_{yC} / s^4 = 7{,}87$

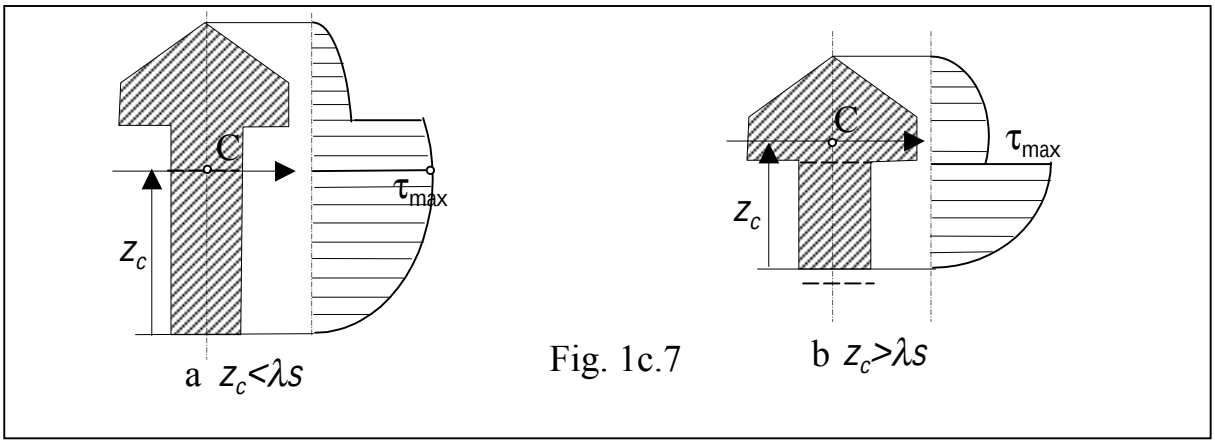
Modulul de rezistență W_y pentru cazul considerat este: $W_y / s^3 = 3{,}284$

Relația de dimensionare la solicitarea de încovoiere

$W_{yznec} = \dfrac{M_{iy\,max}}{\sigma_a}$, devine:

$$3{,}284 s^3 = \frac{M_{iy\,max}}{\sigma_a} \Rightarrow s = \sqrt[3]{\frac{M_{iy\,max}}{3{,}284 \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{54{,}635 \cdot 10^6}{3{,}284 \cdot 120}} = 51{,}756 mm$$

Se adoptă *s=52 mm;*



4. Calculul tensiunii tangențiale maxime

Tensiunea tangențială maxim se calculează cu formula lui Juravski:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot S^*_{cy}}{I_{yef} \cdot b}$$

în secțiunea în care forța tăietoare este maximă T_{max} şi corespunde:

- liniei ce trece prin centrul de greutate, dacă $z_C < \lambda s$, (fig. 1c.7a)
- liniei din dreptul saltului de lățime a secțiunii, dacă $z_C > \lambda s$, (fig. 1c.7b).

Se determină *momentul static al secțiunii* (S^*_{zc}) pentru cele două cazuri:

- *cînd* $z_C < \lambda s$ (fig. 1c.6b): $S^*_{yc} = (z_C)^2 \cdot 0{,}5\ s$
- *cînd* $z_C > \lambda s$ (fig. 1c.6a): $S^*_{yc} = \lambda s^2 (z_C - 0{,}5\lambda s)$

Pentru cazul considerat ($\lambda=2$): $z_C = 2{,}397s > \lambda s$, rezultă

$S^*_{yc} = \lambda s^2 (z_C - 0{,}5\lambda s) = 2{,}794\ s^3$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} \cdot S^*_{cy}}{I_{yef} \cdot b} = \frac{22{,}3 \cdot 10^3 \cdot 2{,}794 \cdot 52^3}{57554834 \cdot 52} = 2{,}928 MPa;$$

5. Calculul deplasării şi rotirii secțiunii 0 (w_0 şi φ_0) şi 6 (w_6 şi φ_6)

Relațiile folosite pentru calculul deplasării /rotirii sunt:

$$EIw = EIw_0 + EI\varphi_0 x + \Phi(x)$$
$$EI\varphi = EI\varphi_0 + \Phi'(x)$$

unde $\Phi(x)$ şi $\Phi'(x)$ este funcția de încărcare, respectiv derivata ei.

- Pentru calculul deplasării/rotirii secțiunii corespunzătoare capătului din stânga al barei w_0, φ_0 se folosesc ecuațiile deplasărilor din dreptul reazemelor 1 şi 2:

$$EIw_1 = 0 = EIw_0 + EI\varphi_0 a + \Phi_1$$
$$EIw_2 = 0 = EIw_0 + EI\varphi_0 (a+b) + \Phi_2$$
$$\Rightarrow \quad EI\varphi_0 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{b}; \quad EIw_0 = -\Phi_1\left(1 + \frac{a}{b}\right) + \Phi_2 \frac{a}{b};$$

- Cu valorile $EI\varphi_0$ şi EIw_0 astfel calculate se determină deplasarea/rotirea secțiunii ***6*** (EIw_6 *şi* $EI\varphi_6$) :

$$EIw_6 = EIw_0 + EI\varphi_0 (a + b/2) + \Phi_6 \quad \Rightarrow \quad EIw_6 = -\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} + \Phi_6$$
$$EI\varphi_6 = EI\varphi_0 (a + b/2) + \Phi_6' \quad \Rightarrow \quad EI\varphi_6 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{b} + \Phi_6'$$

Pentru cazul considerat, valorile funcțiilor de încărcare Φ_1 , Φ_2, Φ_6 *şi* Φ_6' se determină după cum urmează:

$$\Phi_1 = \frac{22{,}3 \cdot 2{,}45^3}{6} = 54{,}658 kNm^3$$
$$\Phi_2 = \frac{22{,}3 \cdot 4^3}{6} - \frac{39{,}231 \cdot 1{,}55^3}{6} + \frac{5{,}7 \cdot (0{,}45^4 - 0)}{24} = 213{,}527 \ \ kNm^3$$
$$\Phi_6 = \frac{22{,}3 \cdot 3{,}225^3}{6} - \frac{39{,}231 \cdot 0{,}775^3}{6} = 121{,}621 \, kNm^3$$
$$\Phi_6' = \frac{22{,}3 \cdot 3{,}225^2}{2} - \frac{39{,}231 \cdot 0{,}775^2}{2} = 104{,}185 \, kNm^2$$

Înlocuind aceste valori în expresiile lui w_0, φ_0, w_6, φ_6, se obține:

$$EIw_0 = -\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{b} \cdot a - \Phi_1 = 196{,}457 kNm^3 = 196{,}457 \cdot 10^{12} \ \ Nmm^3;$$
$$EI\varphi_0 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{b} = -102{,}496 kNm^2 = -102{,}496 \cdot 10^9 \, Nmm^2;$$
$$EIw_6 = -\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} + \Phi_6 = -12{,}472 \ \ kNm^3 = -12{,}472 \cdot 10^{12} \, Nmm^3$$
$$EI\varphi_6 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{b} + \Phi_6' = 1{,}689 \ \ kNm^2 = 1{,}689 \cdot 10^9 \, Nmm^2$$

Înlocuind valorile numerice în expresiile deplasărilor şi rotirilor se obține:

$$w_0 = \frac{196{,}457 \cdot 10^6}{2{,}1 \cdot 7{,}87 \cdot 52^4} = 1{,}7067 \ \ mm; \qquad \varphi_0 = \frac{-102{,}496 \cdot 10^3}{2{,}1 \cdot 7{,}87 \cdot 52^4} \cdot \frac{180}{\pi} = -0{,}051^0$$
$$w_6 = -\frac{12{,}472 \cdot 10^6}{2{,}1 \cdot 7{,}87 \cdot 52^4} = -0{,}1084 \ \ mm; \quad \varphi_6 = \frac{1{,}689 \cdot 10^3}{2{,}1 \cdot 7{,}87 \cdot 52^4} \cdot \frac{180}{\pi} = 0{,}0008^0$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 1c UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 1c s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**λ**	**P**	**q**	**N**
m	m	m	m	m	m	m		kN	kN/m	kNm
2,45	1,55	4,22	0	3,55	6,44	8,22	2	22,3	5,7	-12

DATE DE IESIRE (REZULTATE)

L	M	N	O	P	Q
$\mathbf{V_1}$	$\mathbf{V_2}$	$\mathbf{M_{max}}$	$\mathbf{z_C/s}$	$\mathbf{I_y/s^4}$	$\mathbf{W_y/s^3}$
(I*(A+B-D)+K+J*(F-E)*(A+B-(F+E)/2))/B	(-I*(A-D)-K+J*(F-E)*(-A+(F+E)/2))/B		(0.5*H^2+5.25*H+4.875)/ (H+5.25)	(H^3+6.375)/12 + H*(O-0.5*H)^2 + 3* (-O+0.5+H)^2 + 2.25*(-O+1.5+H)^2	P/MAX(O,(H+2.5-O))
39,232	-0,459	54,635	2,397	7,87	3,284

R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
s	$\mathbf{EIw_0}$	$\mathbf{EI\varphi_0}$	$\mathbf{EIw_6}$	$\mathbf{EI\varphi_6}$	$\mathbf{w_0}$	$\boldsymbol{\varphi_0}$	$\mathbf{w_6}$	$\boldsymbol{\varphi_6}$	$\mathbf{T_{max}}$	$\boldsymbol{\tau_{max}}$
(M*1e6/120*Q)^(1/3)	$-\Phi_1-(\Phi_1-\Phi_2)*A/B$	$(\Phi_1-\Phi_2)/B$	$-(\Phi_1+\Phi_2)/2+\Phi_6$	$-(\Phi_1+\Phi_2)/B+\Phi'_6$	1e6*S/(2.1*P*R^4)	1e3*T*180/(2.1*3.14*P*R^4)	1e6*U/(2.1*P*R^4)	1e3*S*180/(2.1*P*R^4)		AA*0.5*O^2/(P*R^4*R)
52	196,475	-102,496	-12,472	1,689	1,7067	-0,051	-0,108	0,0008	22,3	2,928

Rezultatele obținute cu ajutorul acestui program pentru un set de 31 date de intrare sunt prezentate în **Anexa1c,** iar diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare corespunzătoare sunt prezentate în continuare.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1c.1

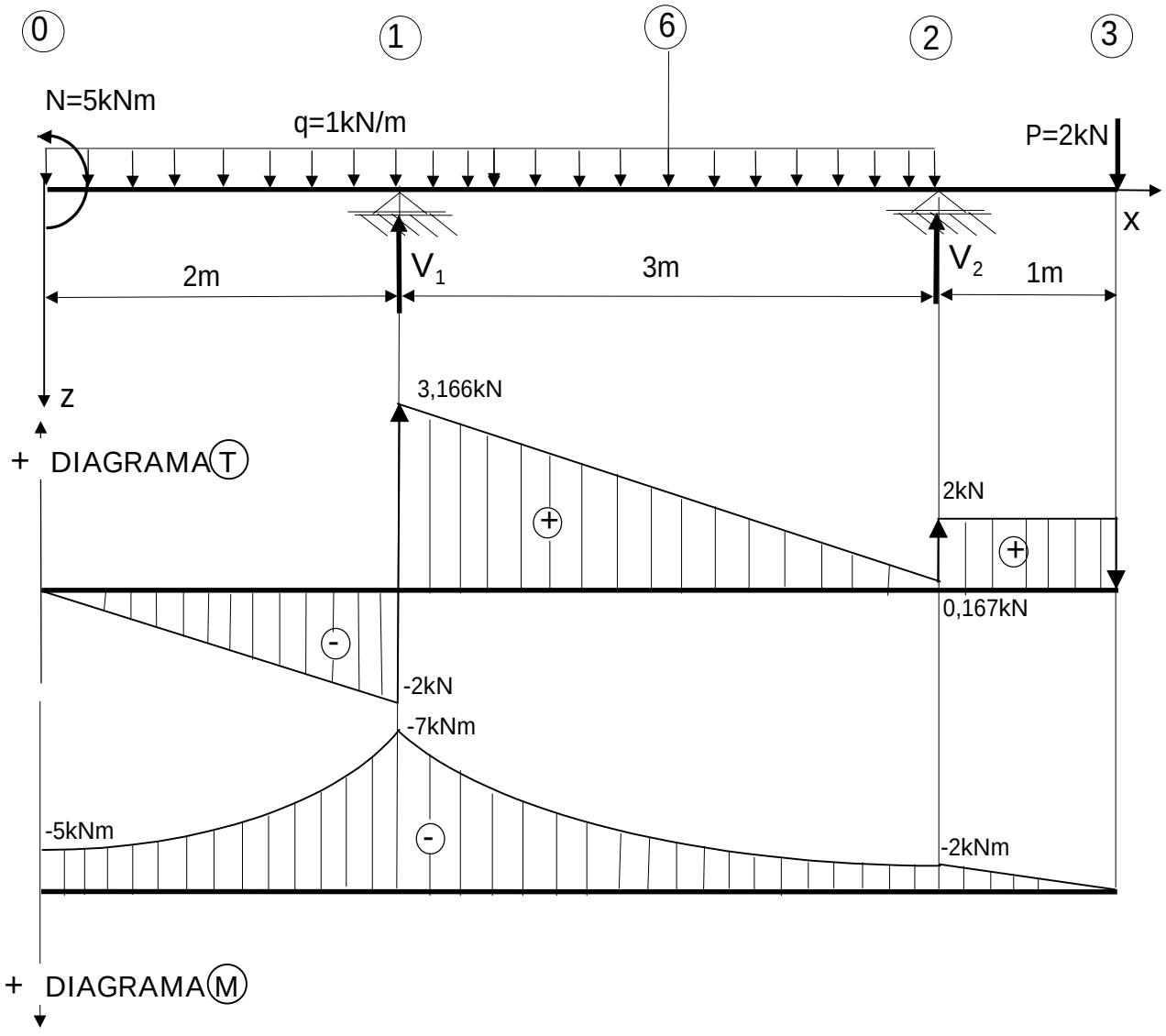
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
2	3	1	6	0	5	0	1	2	1	5

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
5.167	1.833	7	1.7	3.615	2.008	31	36.733	-1.488	-5.72	0.051	3.166	1.094

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1c.2

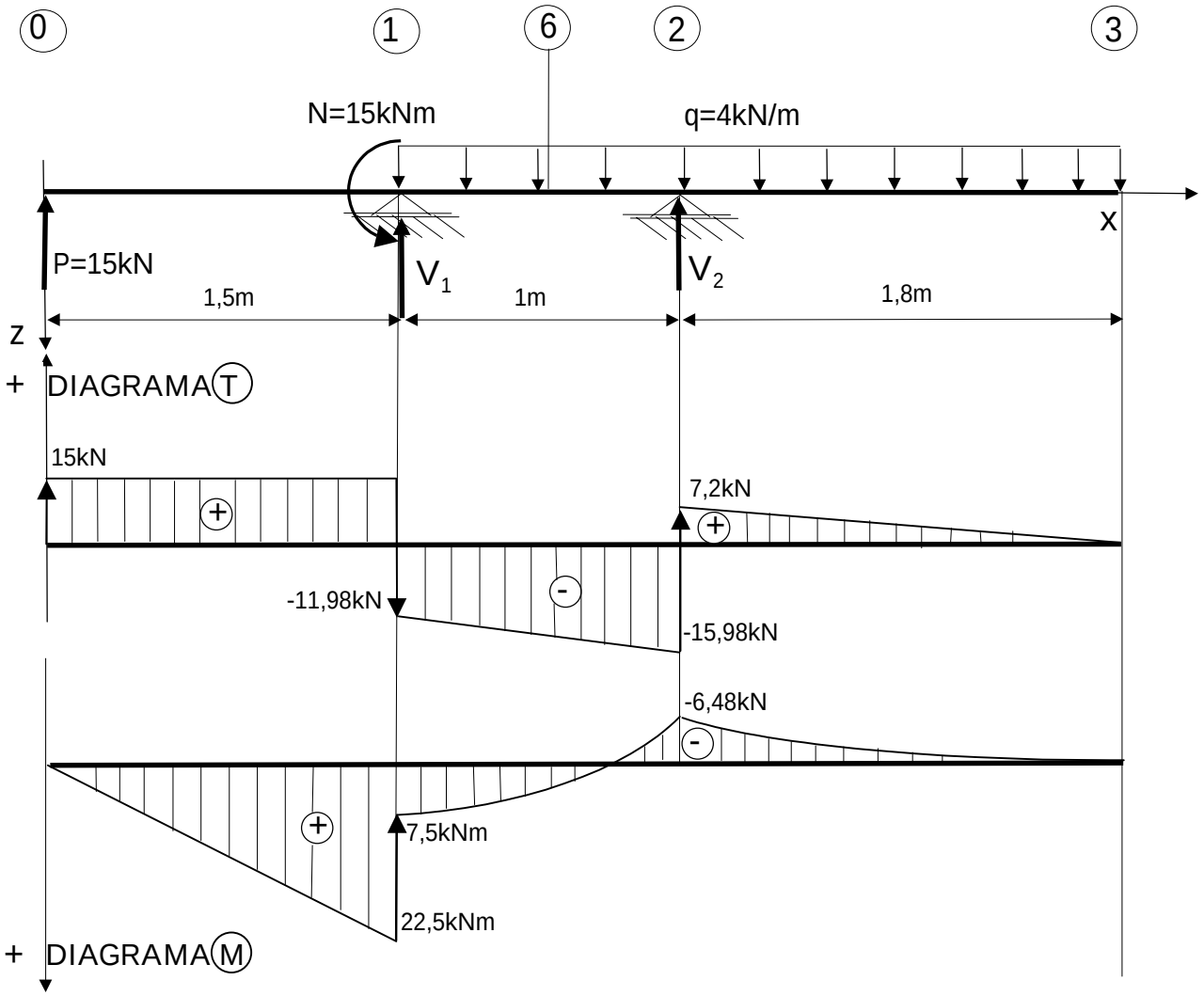
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
1.5	1	1.8	0	1.5	4.3	1.5	2	-15	4	15

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-26.98	23.18	22.5	2.397	7.87	3.284	39	-5.036	0.277	0.03	-0.009	15.98	3.729

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.3

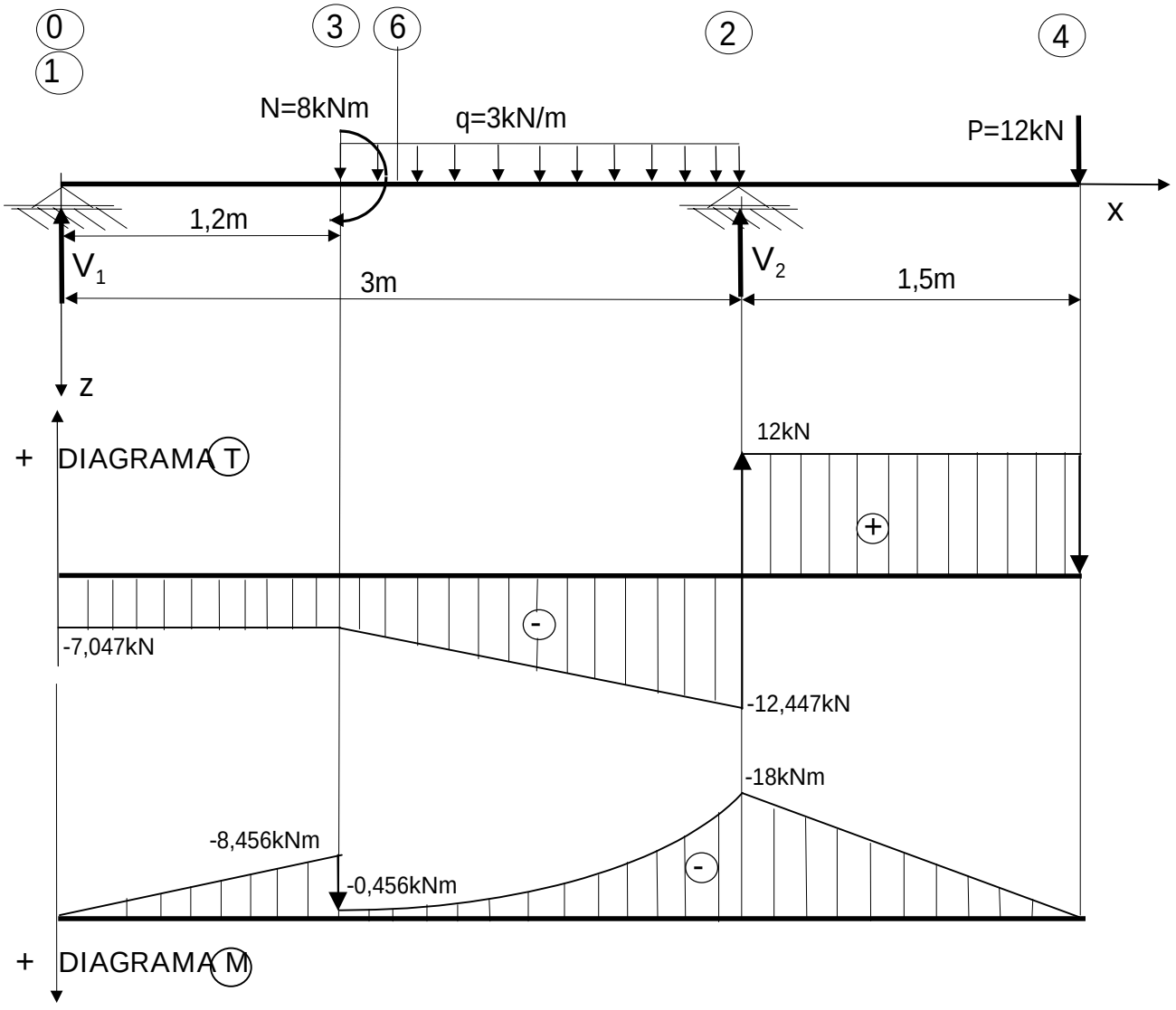
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	3	1.5	4.5	1.2	3	1.2	3	12	3	-8

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-7.047	24.447	18	3.045	15.327	5.033	32	0	-0.114	-1.904	-0.019	12.447	3.677

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1c.4

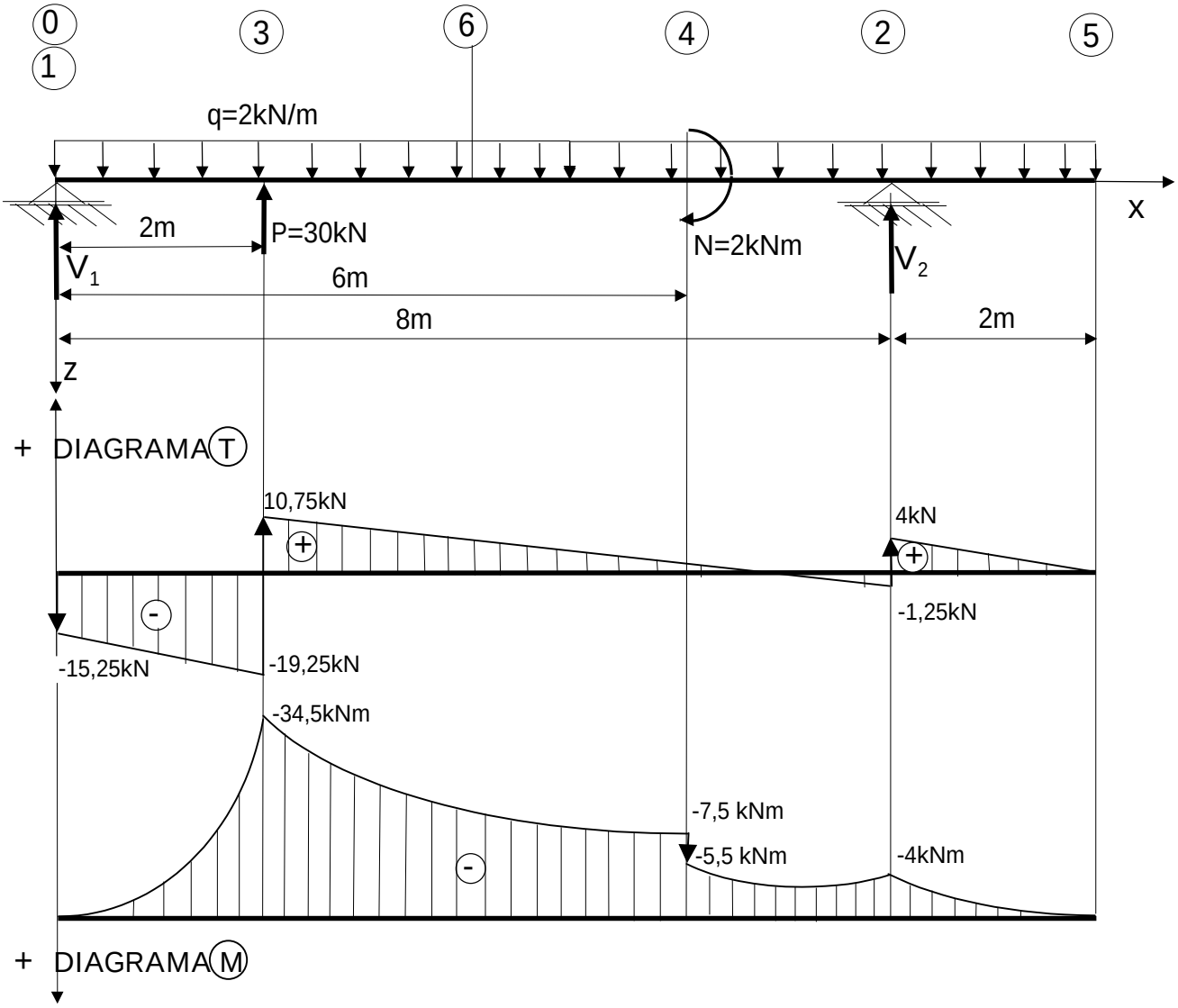
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	8	2	2	0	10	6	4	-30	2	-2

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-15.25	5.25	34.5	3.662	26.621	7.269	35	0	-0.477	-16.13	0.092	19.25	3.958

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1c.5

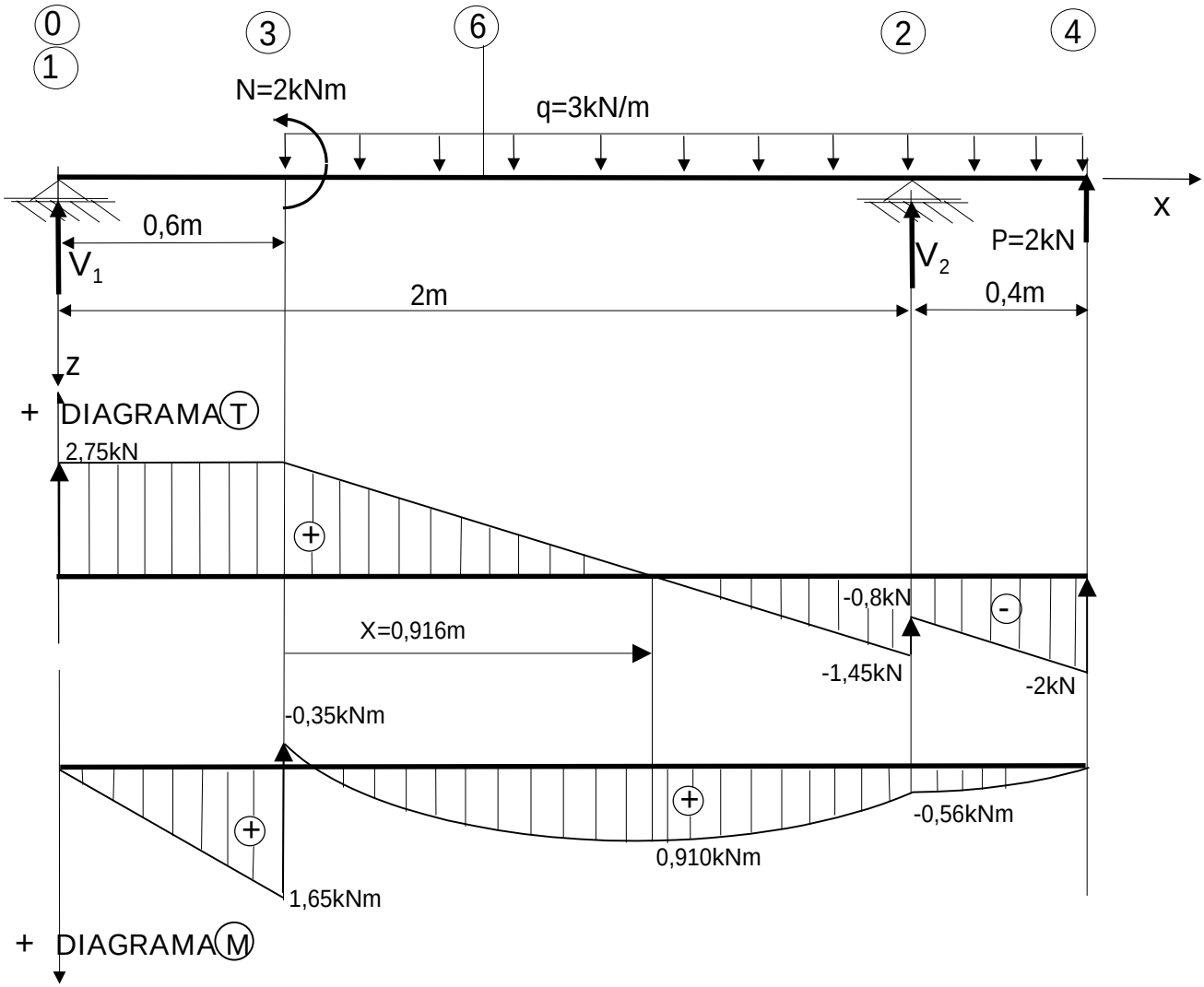
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	2	0.4	2.4	0.6	2.4	0.6	5	-2	3	2

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
2.75	0.65	1.65	4.256	42.338	9.948	12	0	0.191	1.725	0.022	2.75	4.085

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1c.6

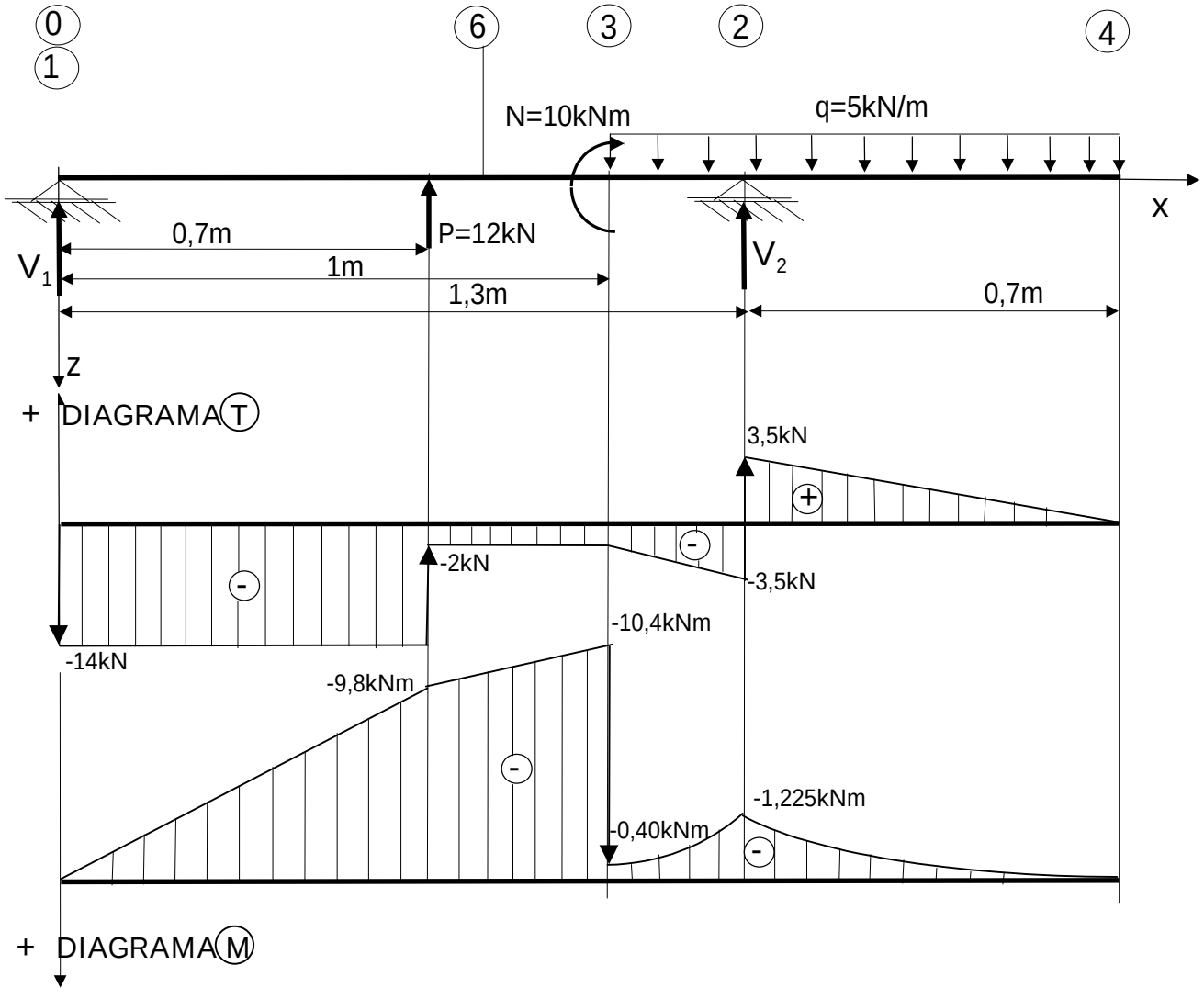
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	1.3	0.7	0.7	1	2	1	1	-12	5	-10

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-14	7	10.4	1.7	3.615	2.008	36	0	-0.147	-1.163	-0.014	14	3.586

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1c.7

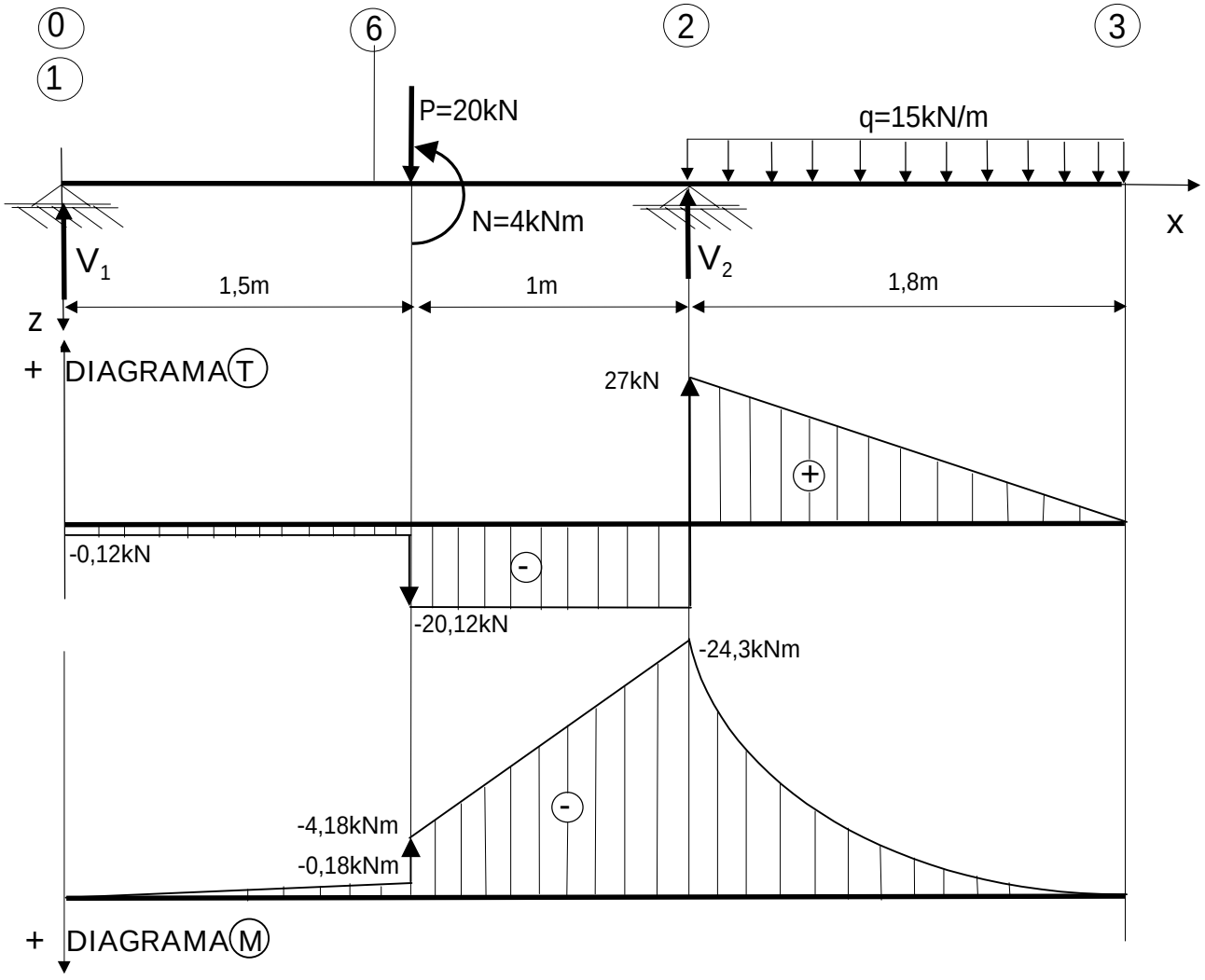
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	2.5	1.8	1.5	2.5	4.3	1.5	2	20	15	4

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-0.12	47.12	24.3	2.397	7.87	3.284	40	0	-0.031	-0.658	-0.029	27	5.989

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.8

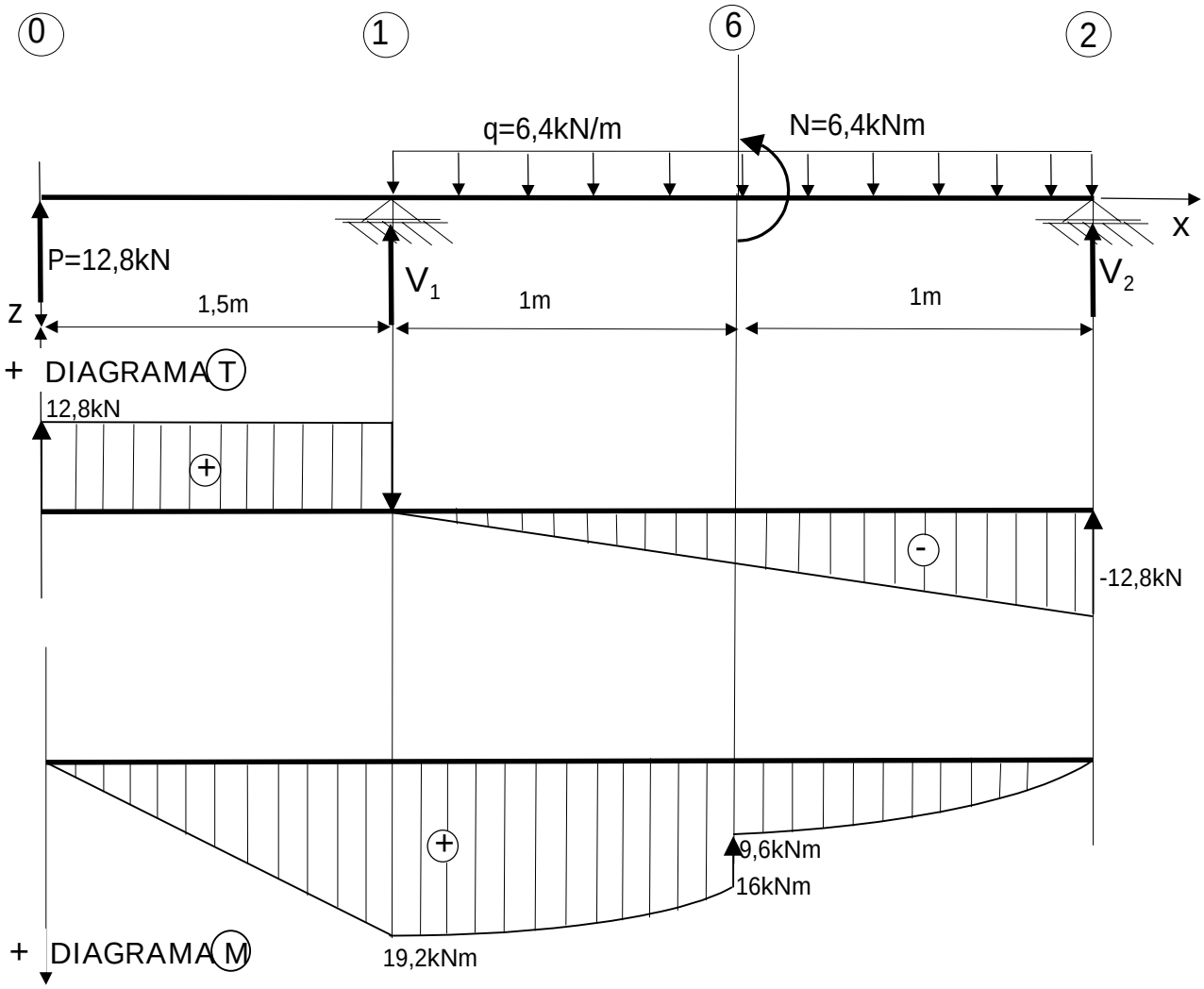
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
1.5	2	0	0	1.5	3.5	2.5	3	-12.8	6.4	6.4

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-12.8	12.8	19.2	3.045	15.327	5.033	32	-11.141	0.507	1.817	-0.045	12.8	3.781

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.9

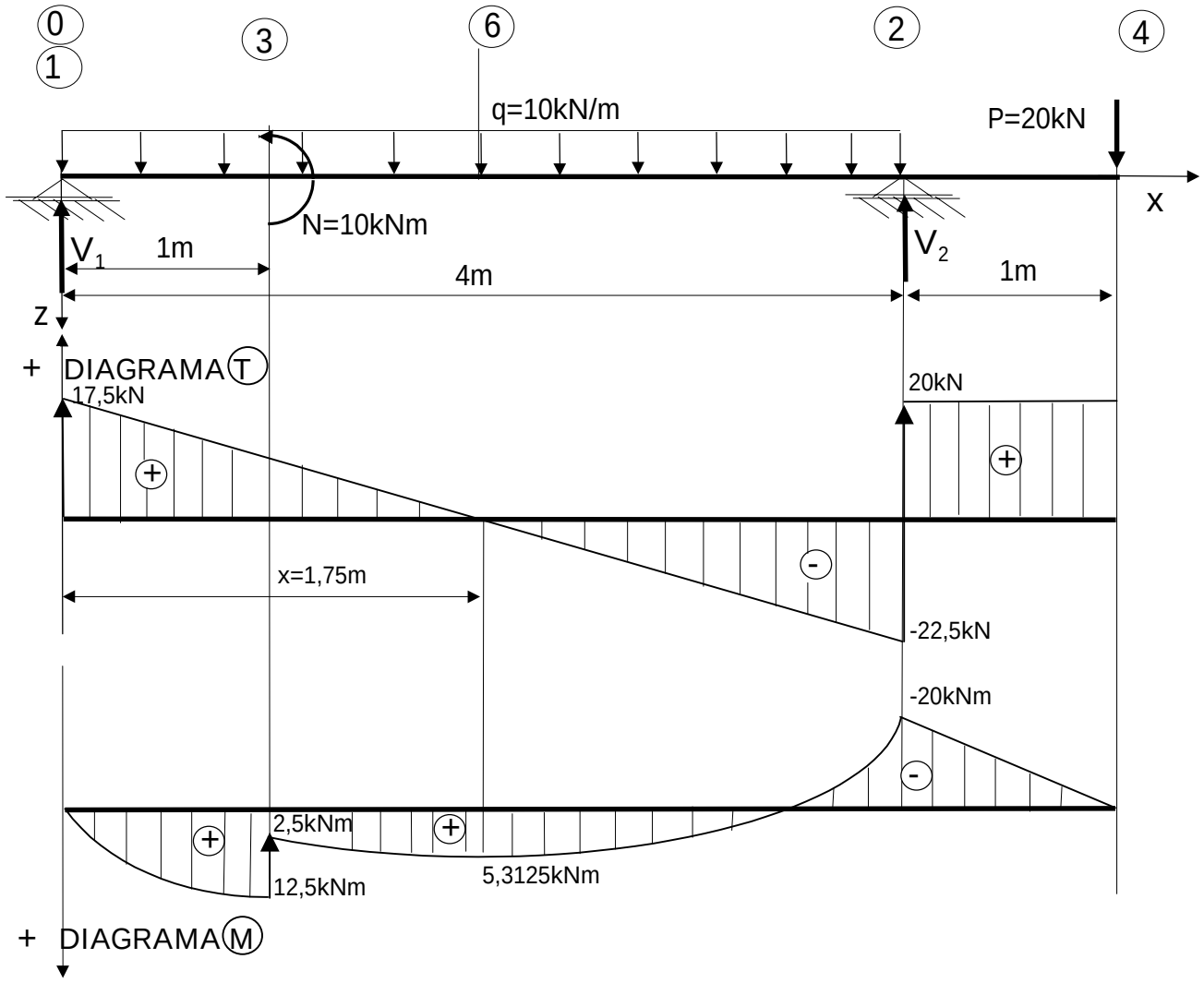
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	4	1	5	0	4	1	4	20	10	10

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
17.5	42.5	20	3.662	26.621	7.269	29	0	0.127	1.475	-0.042	22.5	6.739

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1c.10

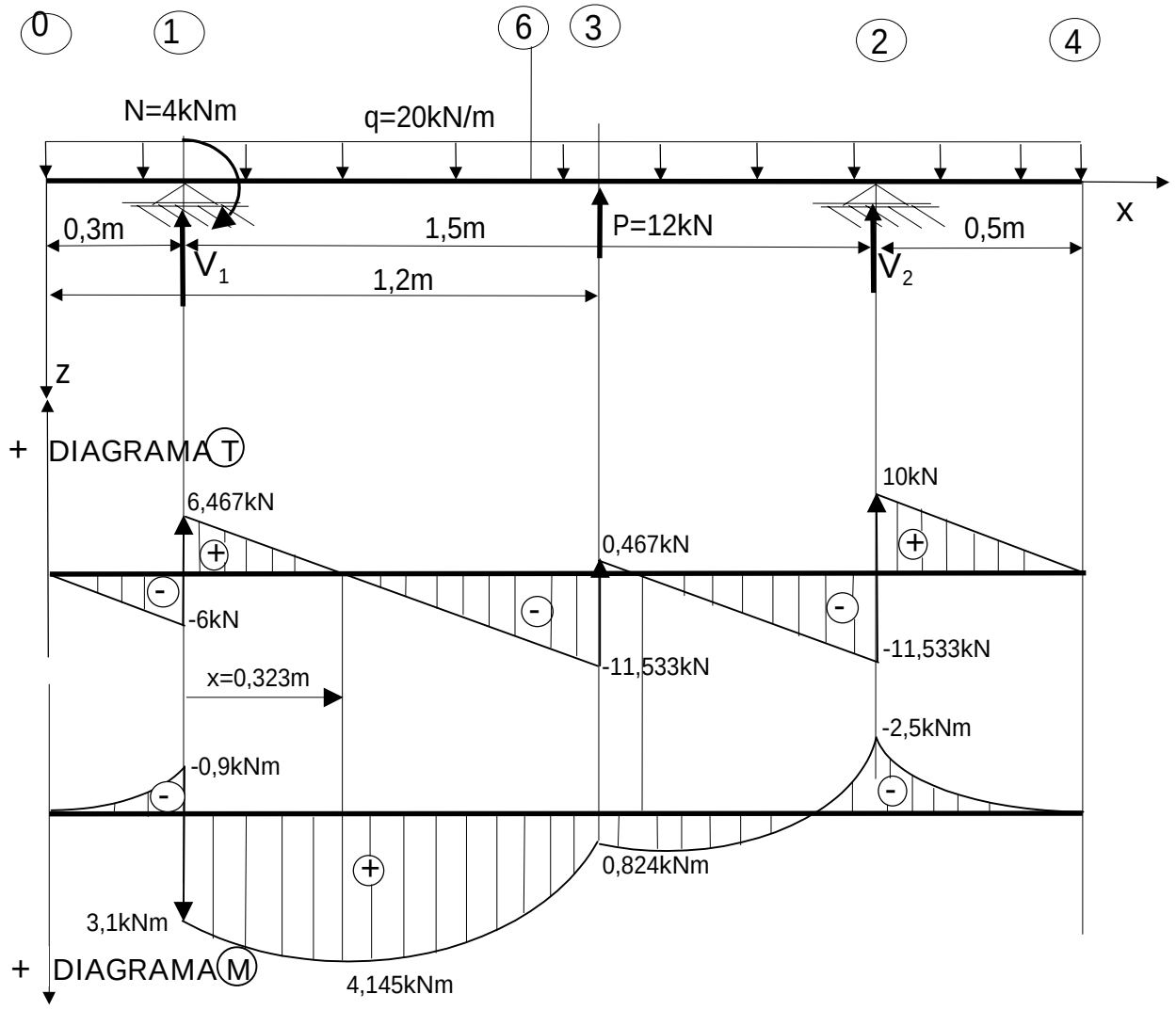
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0.3	1.5	0.5	1.2	0	2.3	0.3	5	-12	20	-4

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
12.467	21.533	4.145	4.256	42.338	9.948	16	-1.111	0.210	1.04	-0.05	11.533	9.637

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1c.11

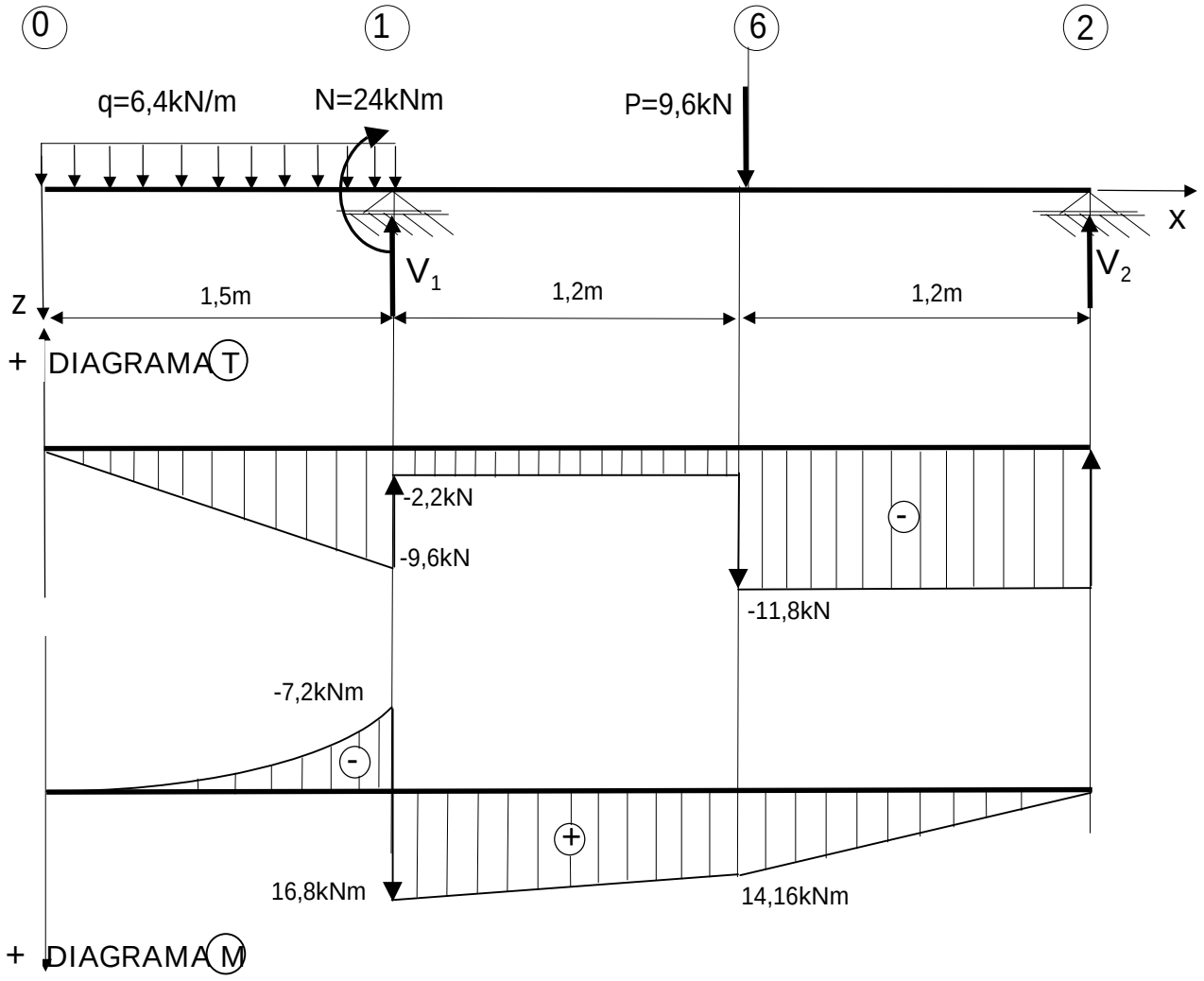
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
1.5	2.4	0	2.7	0	1.5	1.5	1	9.6	6.4	-24

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
7.4	11.8	16.8	1.7	3.615	2.008	42	-9.015	0.323	3.731	-0.041	11.8	2.221

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.12

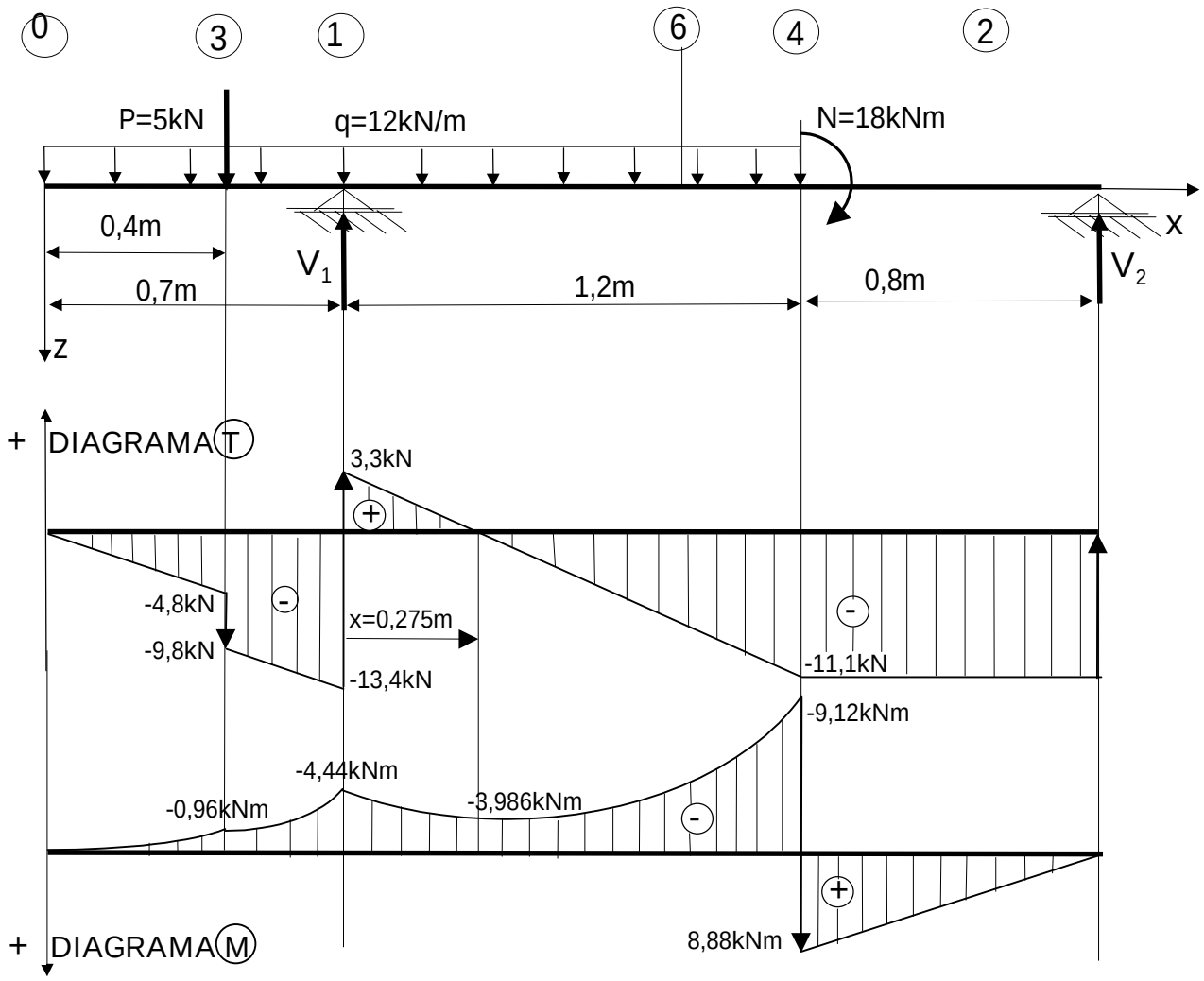
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0.7	2	0	0.4	0	1.9	1.9	2	5	12	-18

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
16.7	11.1	9.12	2.397	7.87	3.284	29	2.374	-0.204	-0.93	0.075	13.4	5.655

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1c.13

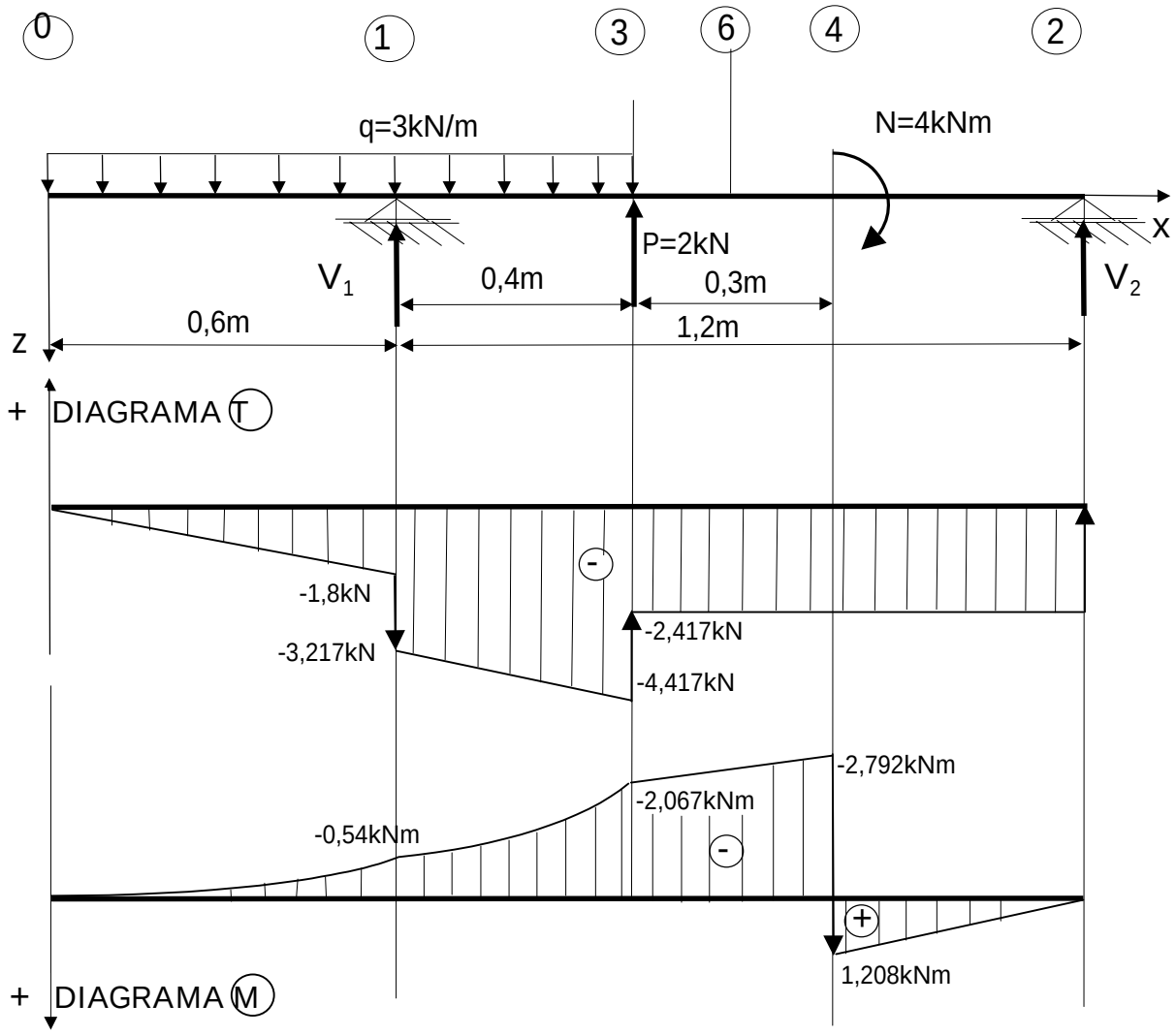
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0.6	1.2	0	1	0	1	1.3	3	-2	3	-4

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-1.417	2.417	2.792	3.045	15.327	5.033	17	1.766	-0.174	-0.744	0.055	4.417	4.623

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1c.14

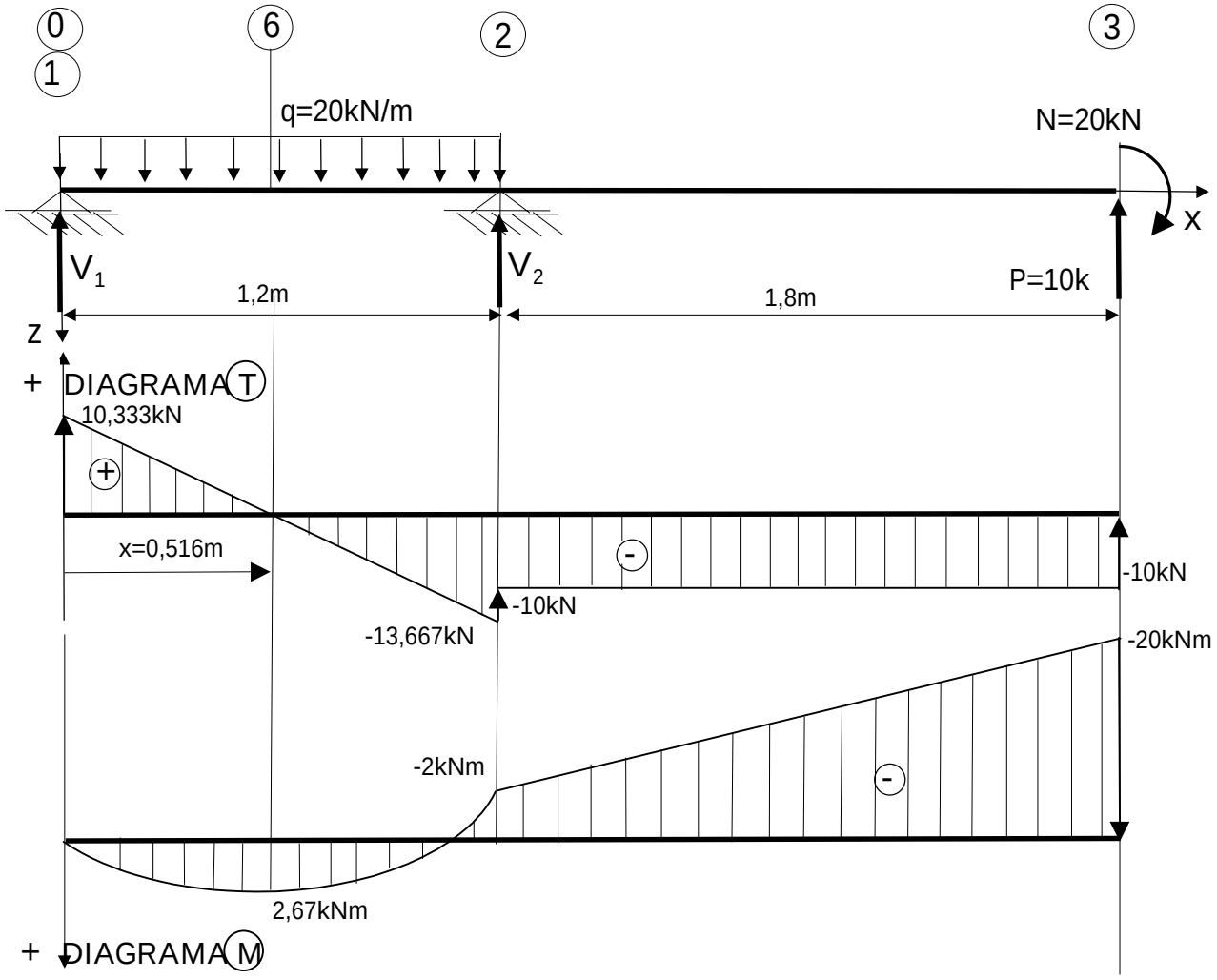
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	1.2	1.8	3	0	1.2	3	4	-10	20	-20

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
10.333	3.667	20	3.662	26.621	7.269	29	0	0.015	0.091	-0.001	13.667	4.093

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.15

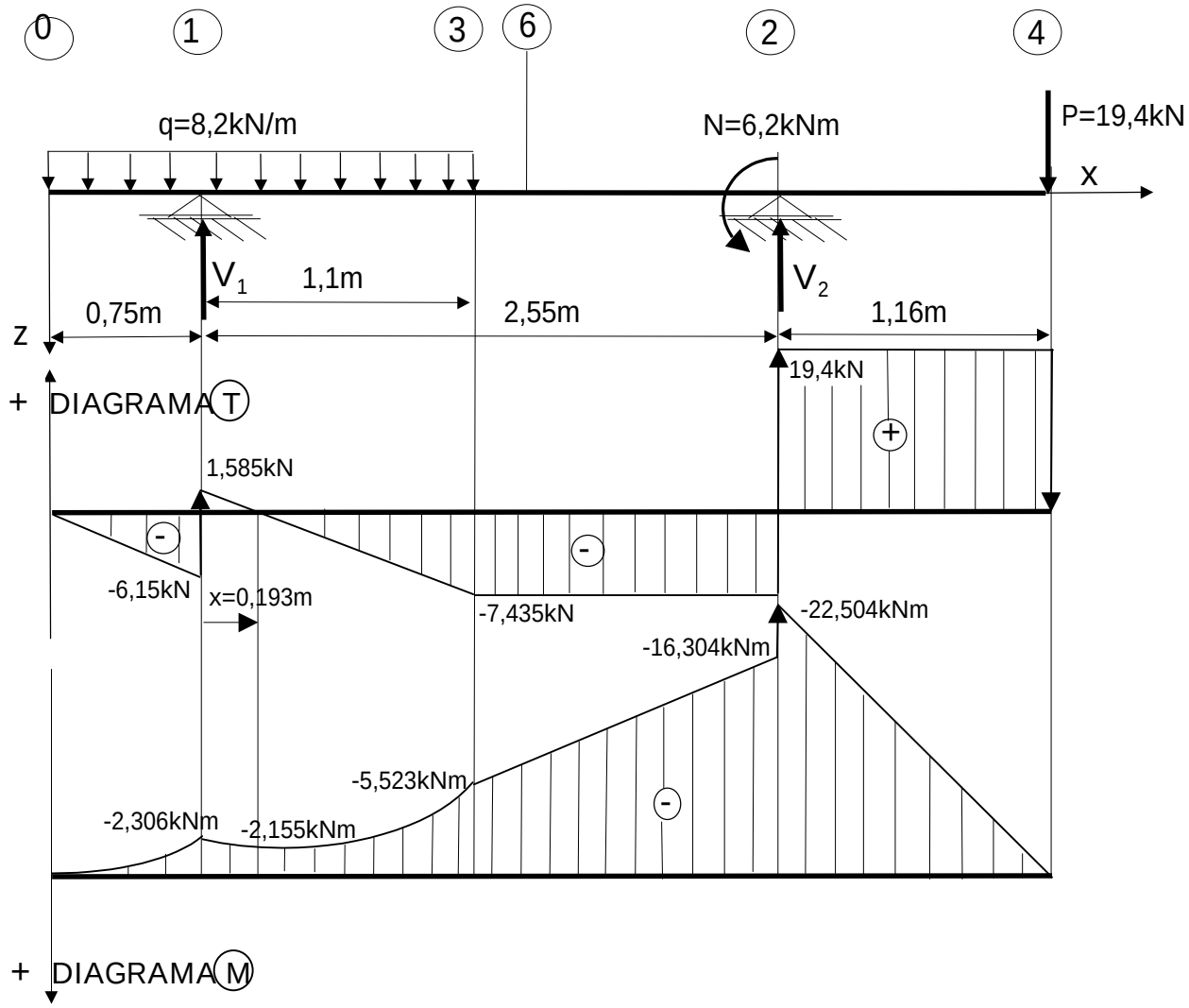
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0.75	2.55	1.16	4.46	0	1.85	3.3	5	19.4	8.2	6.2

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
7.735	26.835	22.504	4.256	42.338	9.948	27	1.068	-0.083	-1.227	-0.022	19.4	5.693

DIAGRAMELE DE EFORTURI TĂIETOARE SI DE MOMENTE



PROBLEMA 1c.16

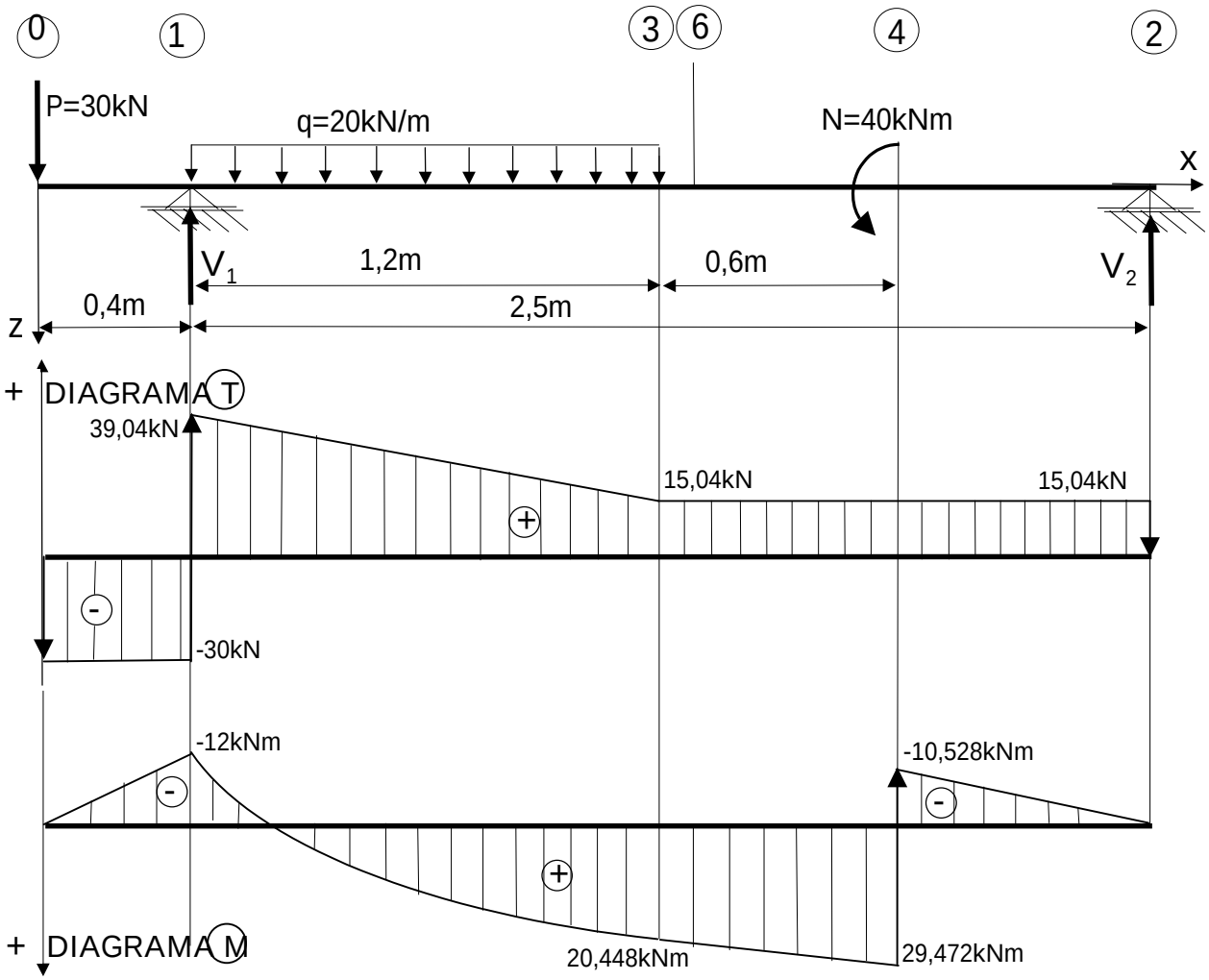
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0.4	2.5	0	0	0.4	1.6	2.2	1	30	20	40

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
69.04	-15.04	29.472	1.7	3.615	2.008	50	-0.681	0.088	2.276	0.008	39.04	5.184

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.17

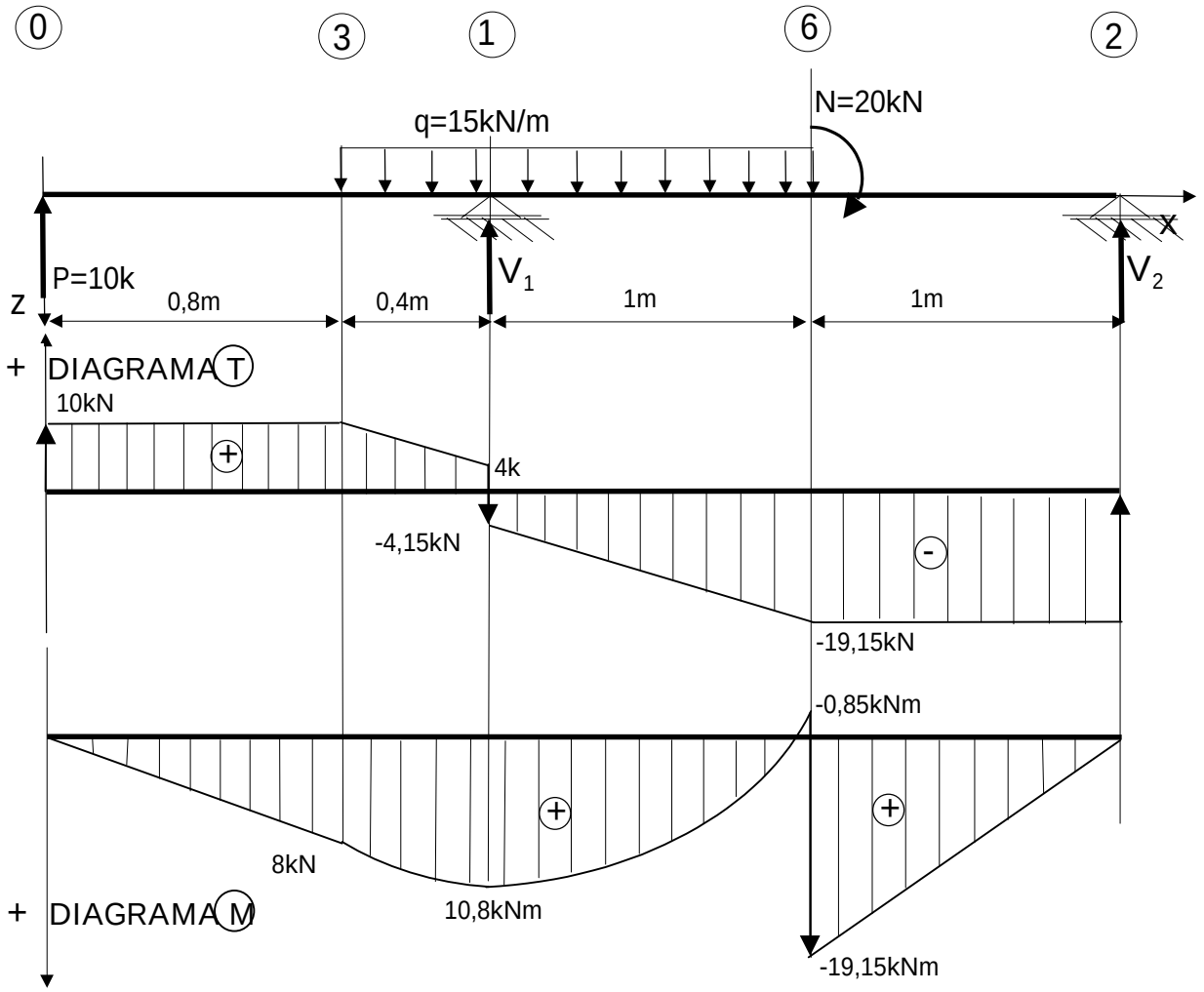
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
1.2	2	0	0	0.8	2.2	2.2	2	-10	15	-20

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-8.15	19.15	19.15	2.397	7.87	3.284	37	-5.036	0.285	1.376	0.039	19.15	4.964

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.18

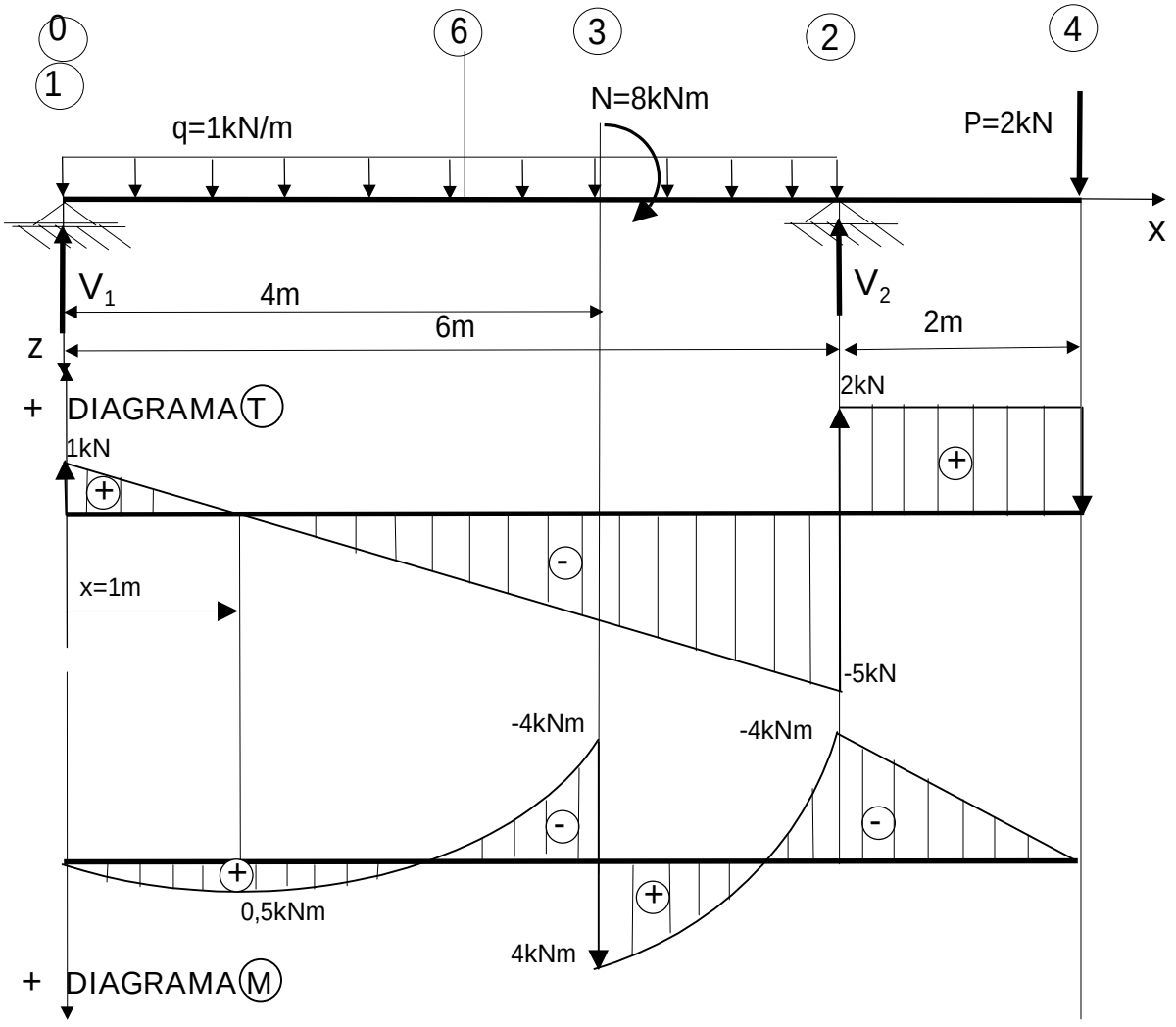
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	6	2	8	0	6	4	3	2	1	-8

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
1	7	4	3.045	15.327	5.033	19	0	-0.046	-5.066	-0.046	5	4.19

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.19

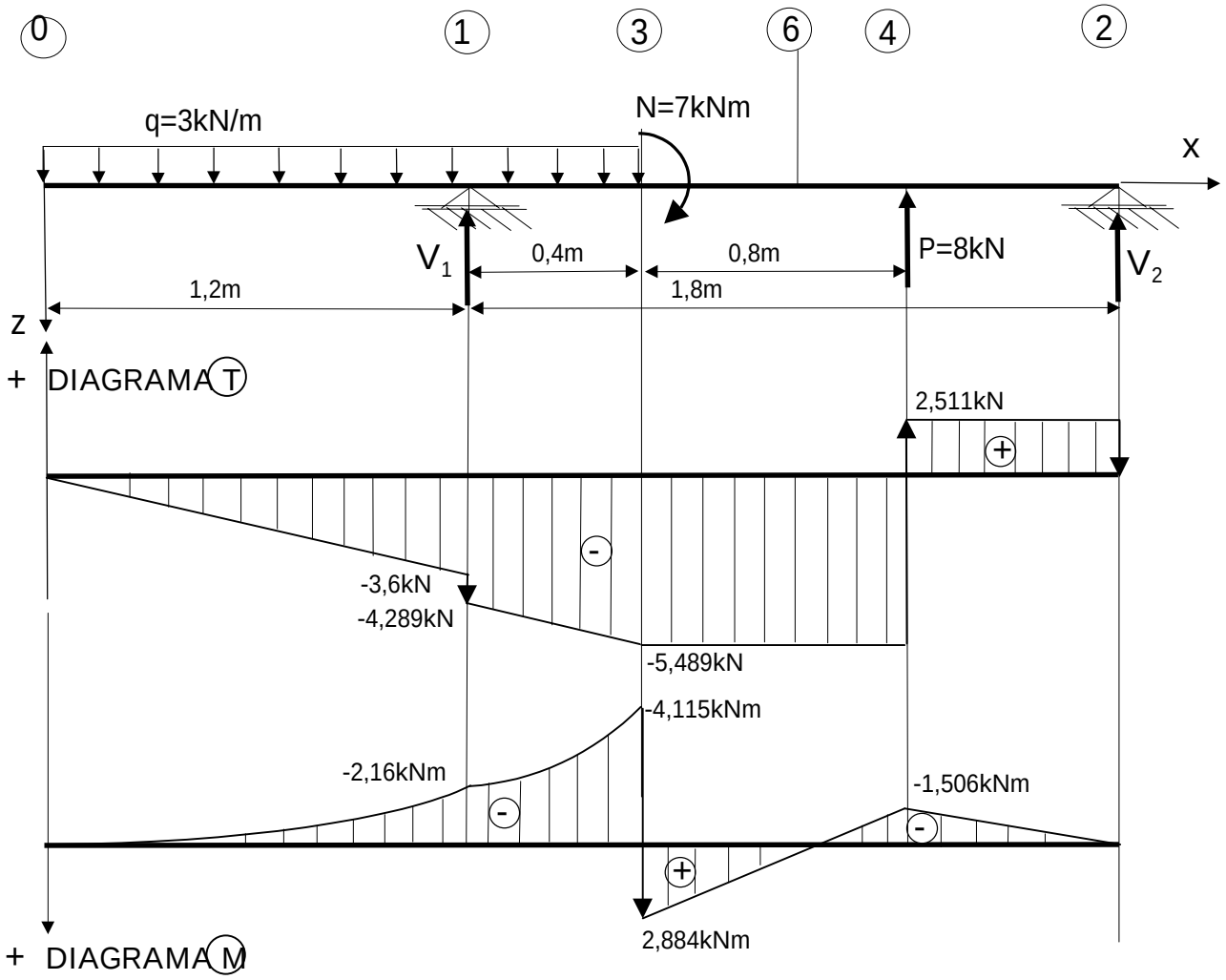
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
1.2	1.8	0	2.4	0	1.6	1.6	4	-8	3	-7

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-0.69	-2.511	4.115	3.662	26.621	7.269	17	3.596	-0.198	-0.173	-0.033	5.489	4.784

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.20

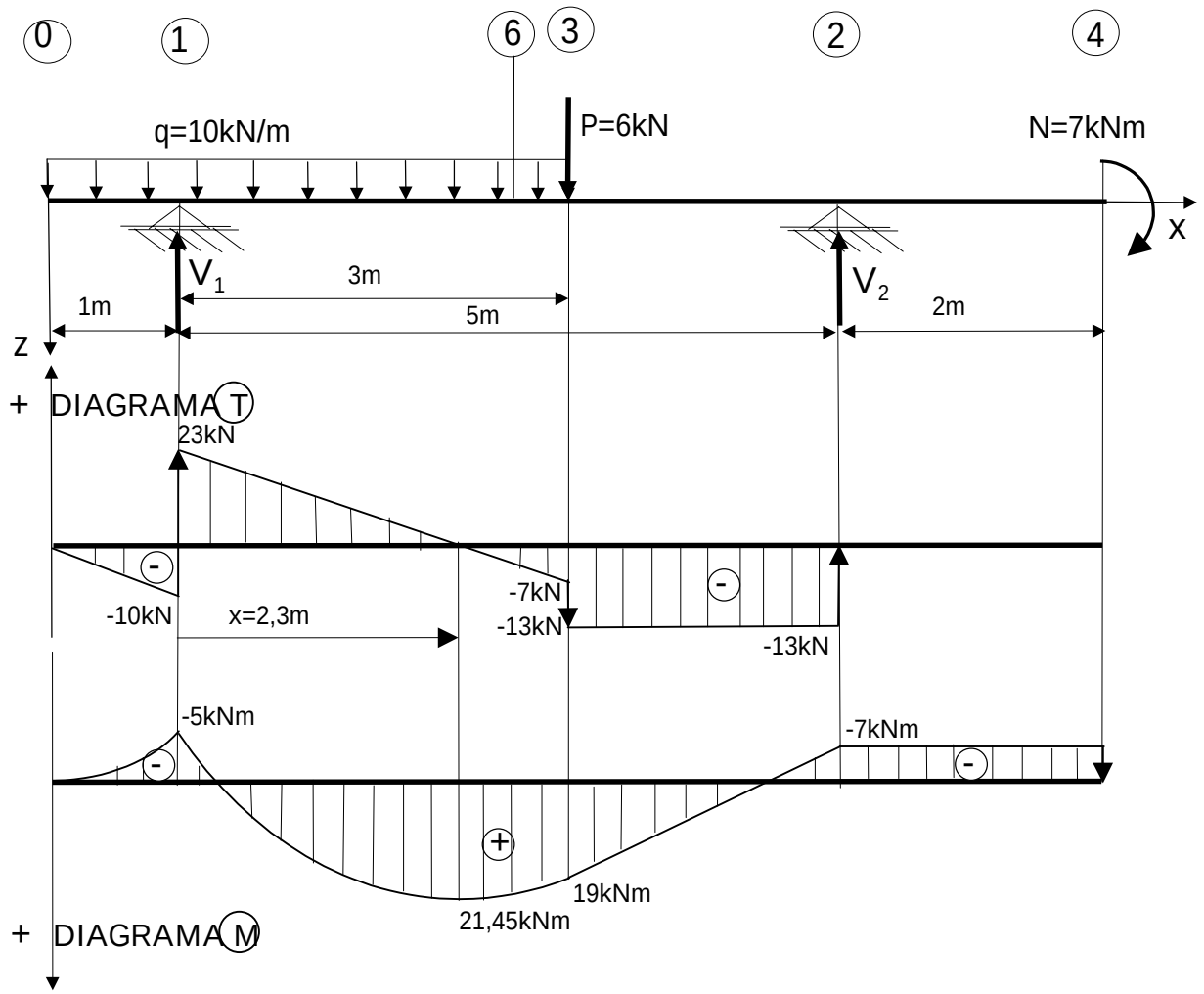
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
1	5	2	4	0	4	8	5	6	10	-7

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
33	13	21.45	4.256	42.338	9.948	27	-6.023	0.355	10.486	-0.028	23	6.749

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.21

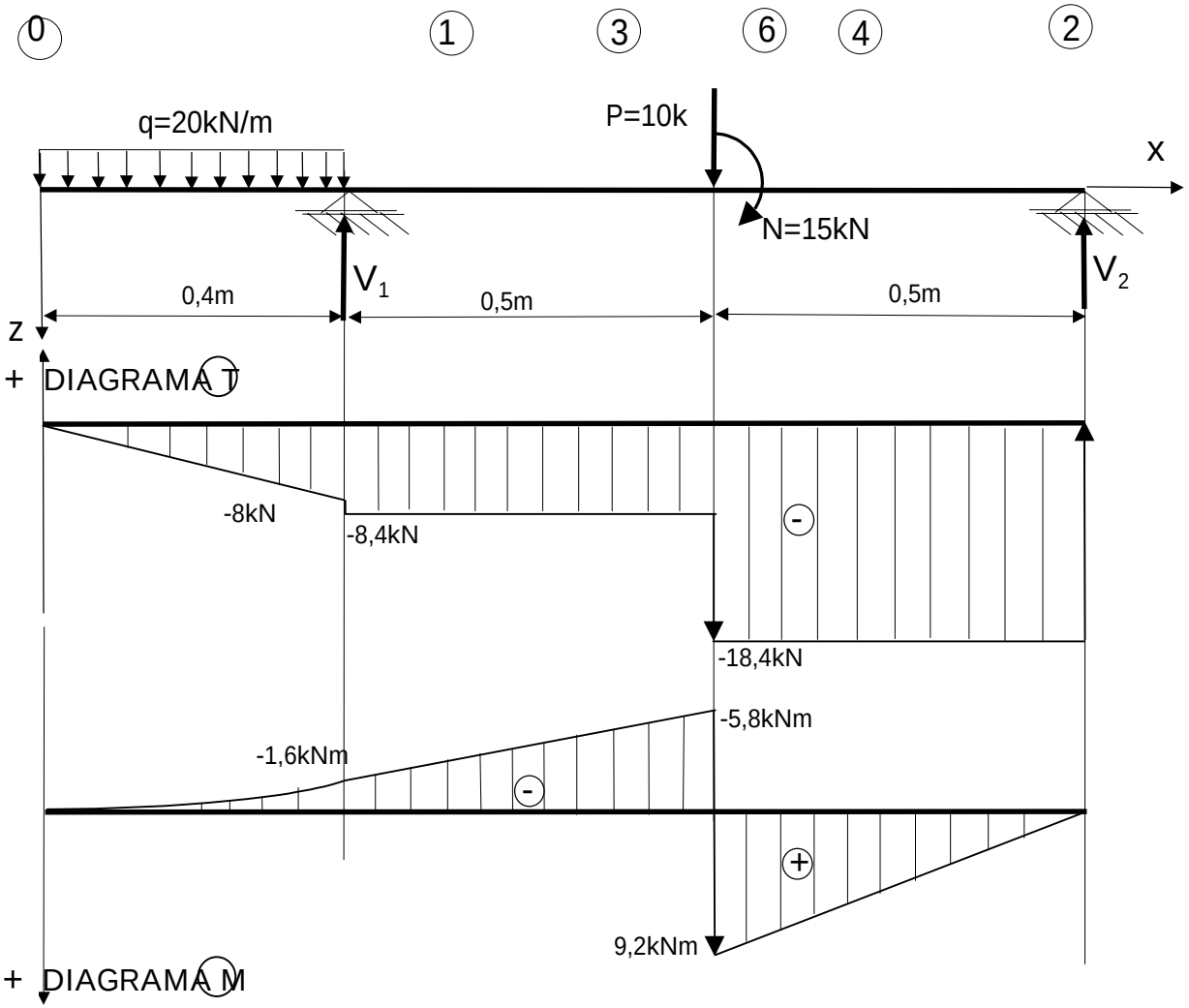
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0.4	1	0	0.9	0	0.4	0.9	1	10	20	-15

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-0.4	18.4	9.2	1.7	3.615	2.008	34	0.273	-0.042	0.107	0.074	18.4	5.284

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.22

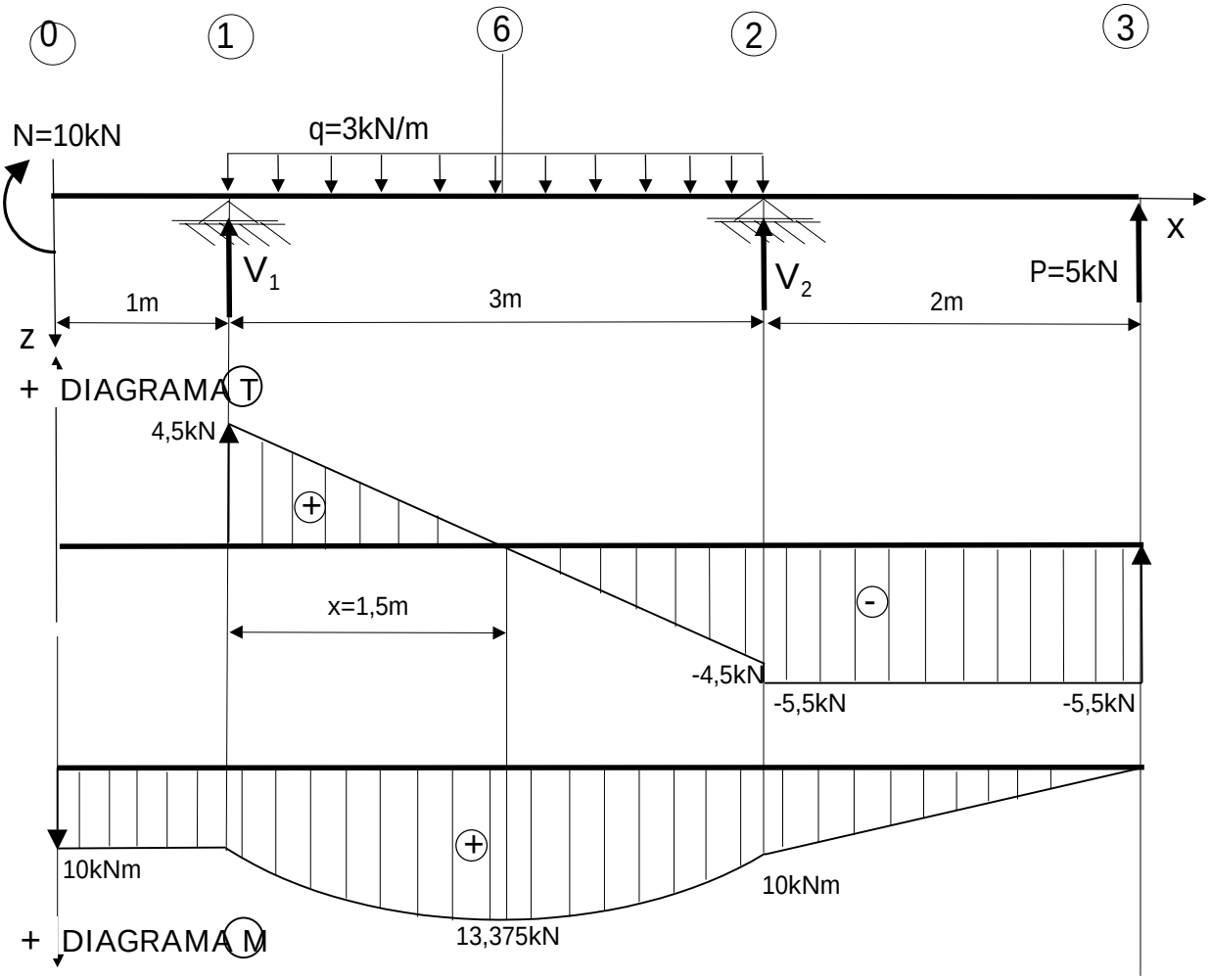
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
1	3	2	6	1	4	0	2	-5	3	-10

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
4.5	-0.5	13.375	2.397	7.87	3.284	33	-11.926	0.829	7.354	0	5	1.629

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.23

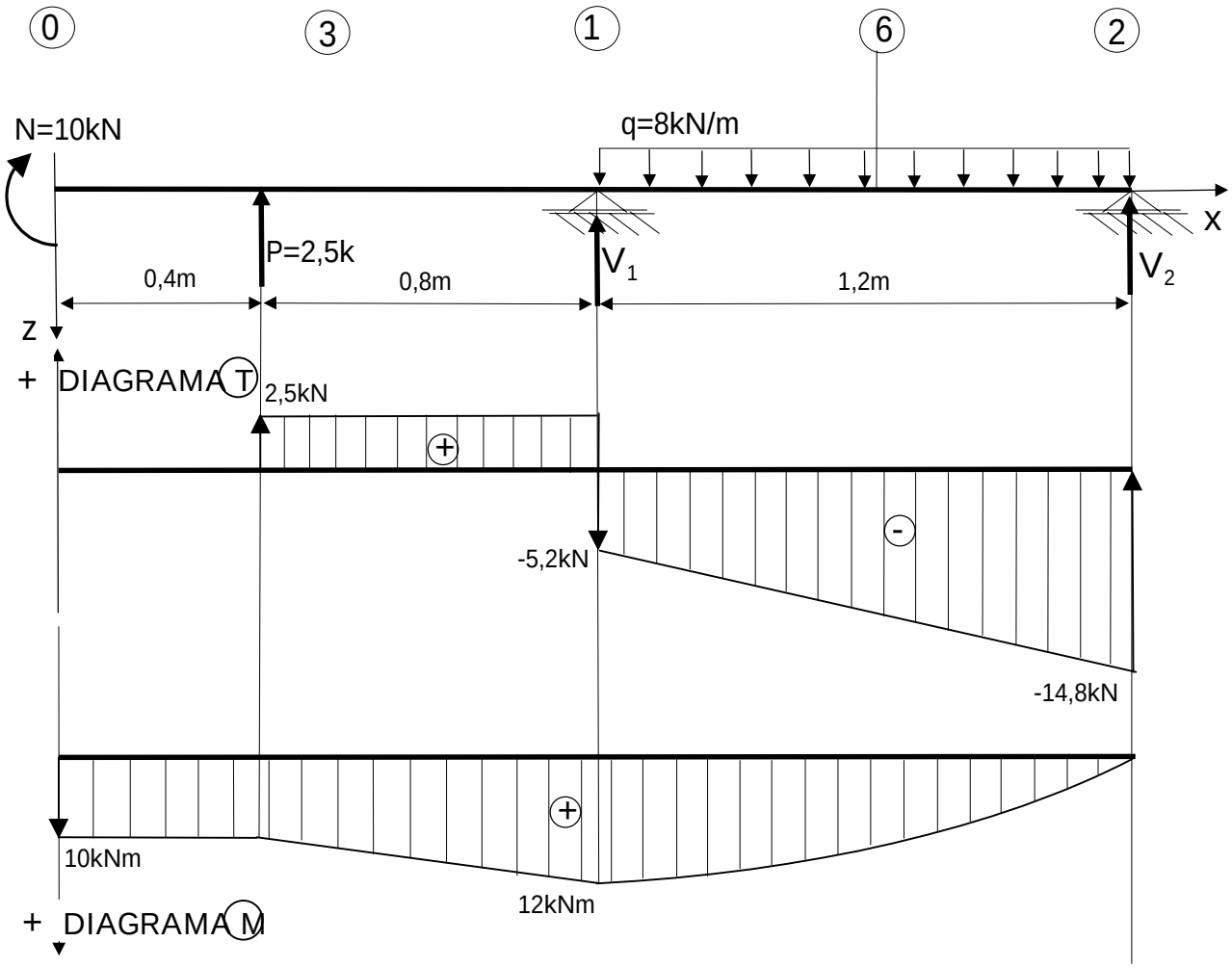
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
1.2	1.2	0	0.4	1.2	2.4	0	3	-2.5	8	-10

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-7.7	14.8	12	3.045	15.327	5.033	28	-7.278	0.526	0.655	-0.017	14.8	5.711

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.24

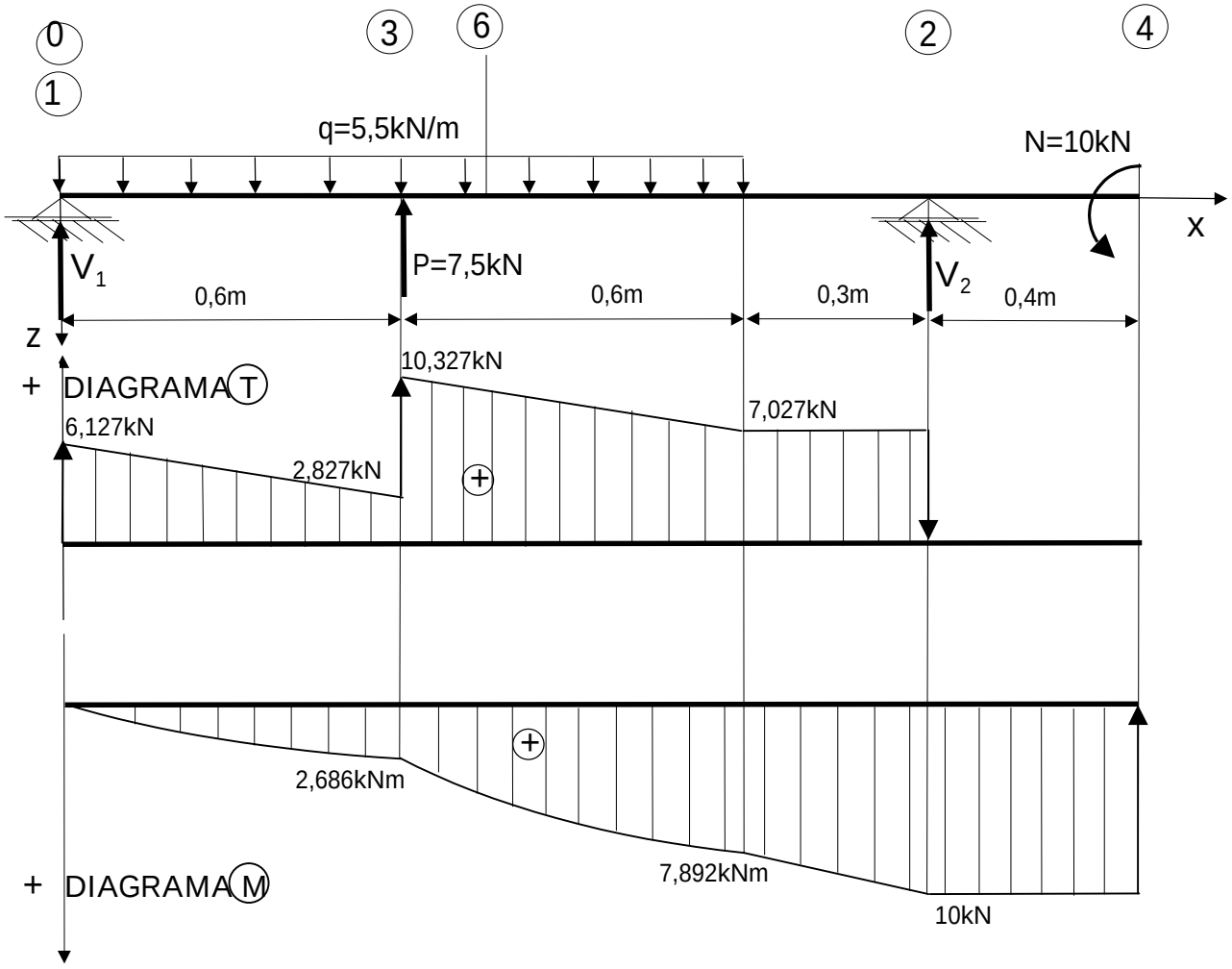
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	1.5	0.4	0.6	0	1.2	1.9	4	-7.5	5.5	10

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
6.127	-7.027	10	3.662	26.621	7.269	23	0	0.078	0.791	0.026	10.327	4.917

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.25

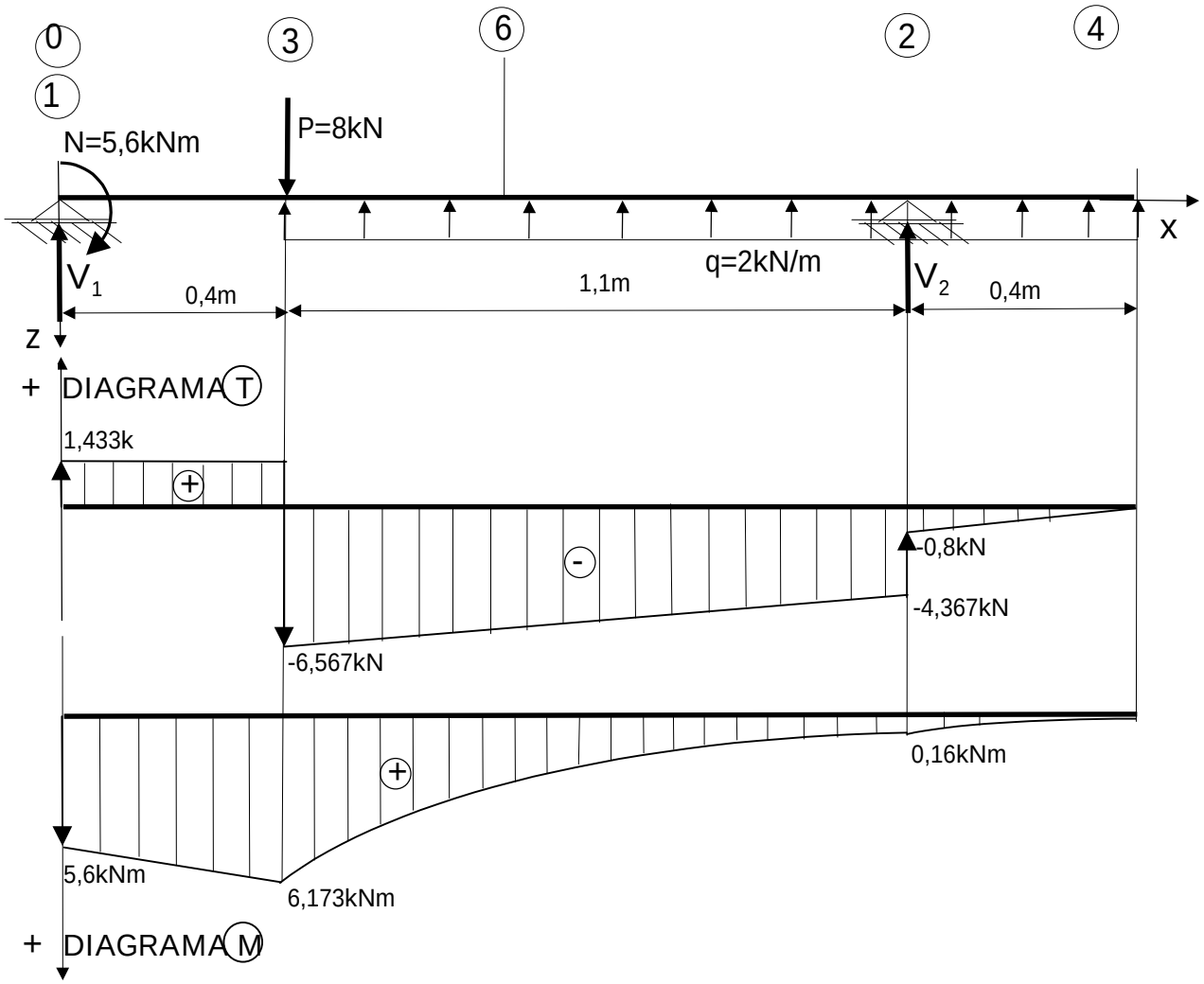
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	1.5	0.4	0.4	0.4	1.9	0	5	8	-2	-5.6

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
1.433	3.567	6.173	4.265	42.338	9.948	18	0	0.223	1.186	-0.03	6.567	4.336

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.26

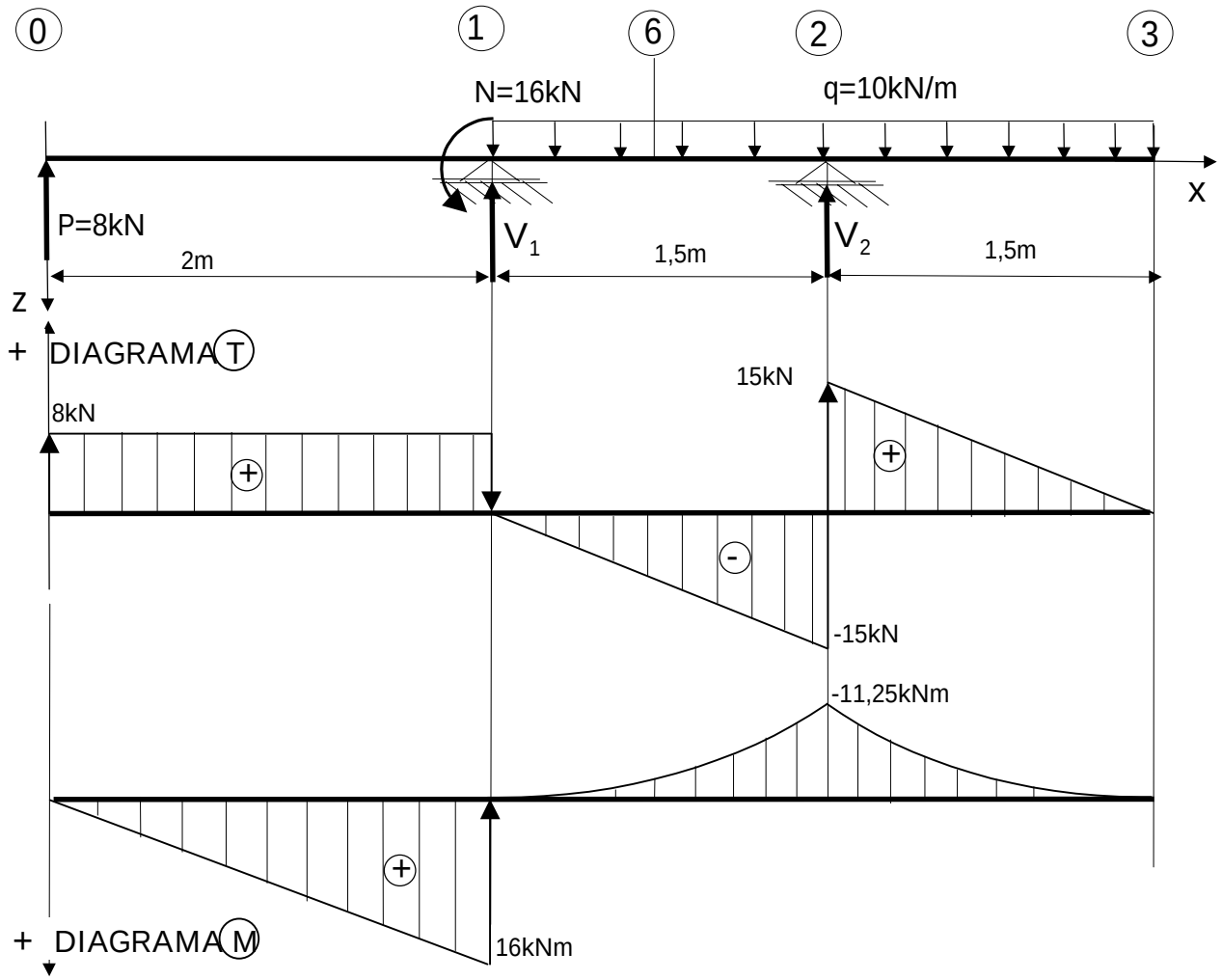
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
2	1.5	1.5	0	2	5	2	1	-8	10	16

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-8	30	16	1.7	3.615	2.008	41	-8.635	0.39	-0.43	-0.019	15	2.962

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.27

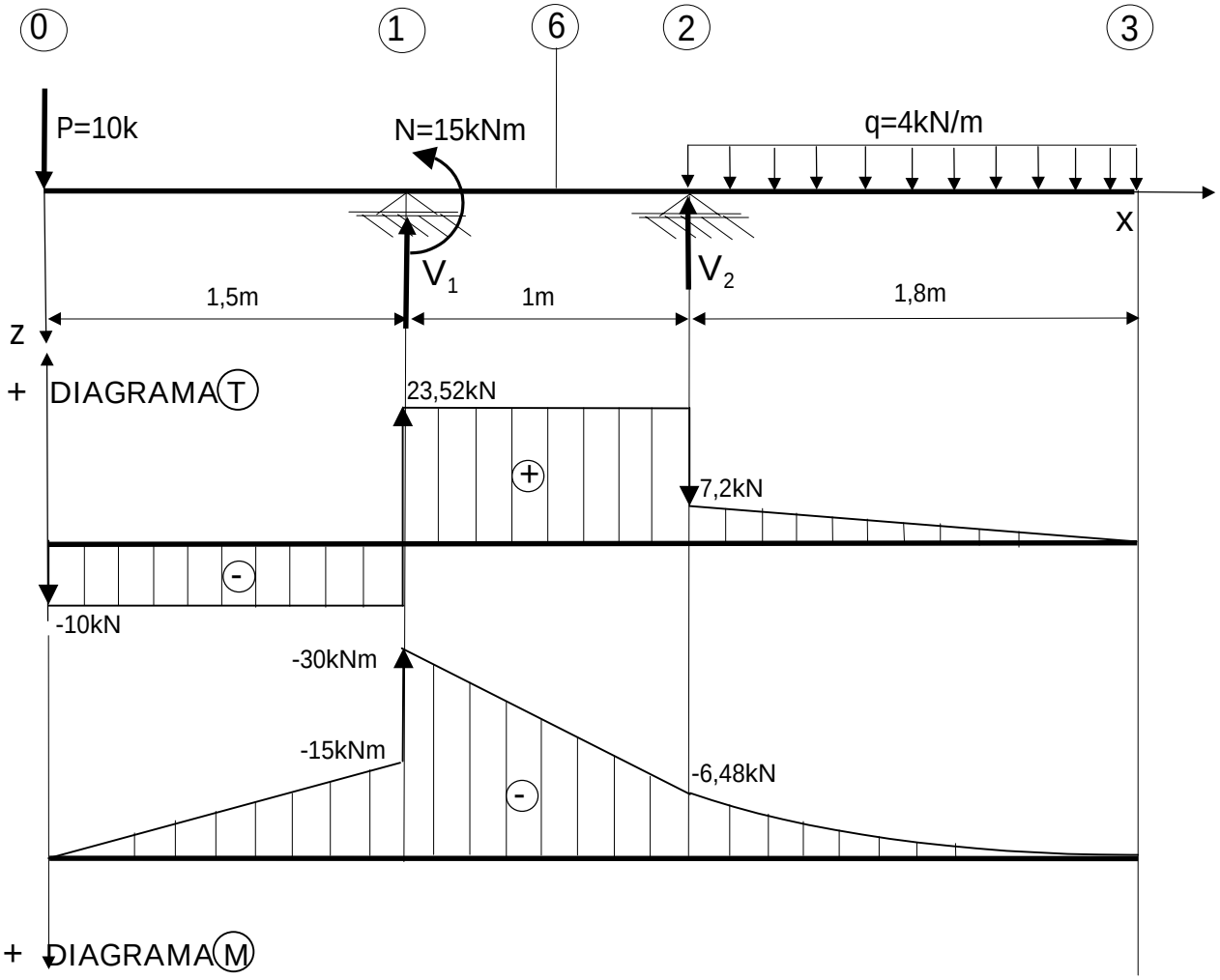
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
1.5	1	1.8	0	2.5	4.3	1.5	2	10	4	15

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
33.52	-16.32	30	2.397	7.87	3.284	43	4.932	-0.226	-0.404	0.01	23.52	4.514

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.28

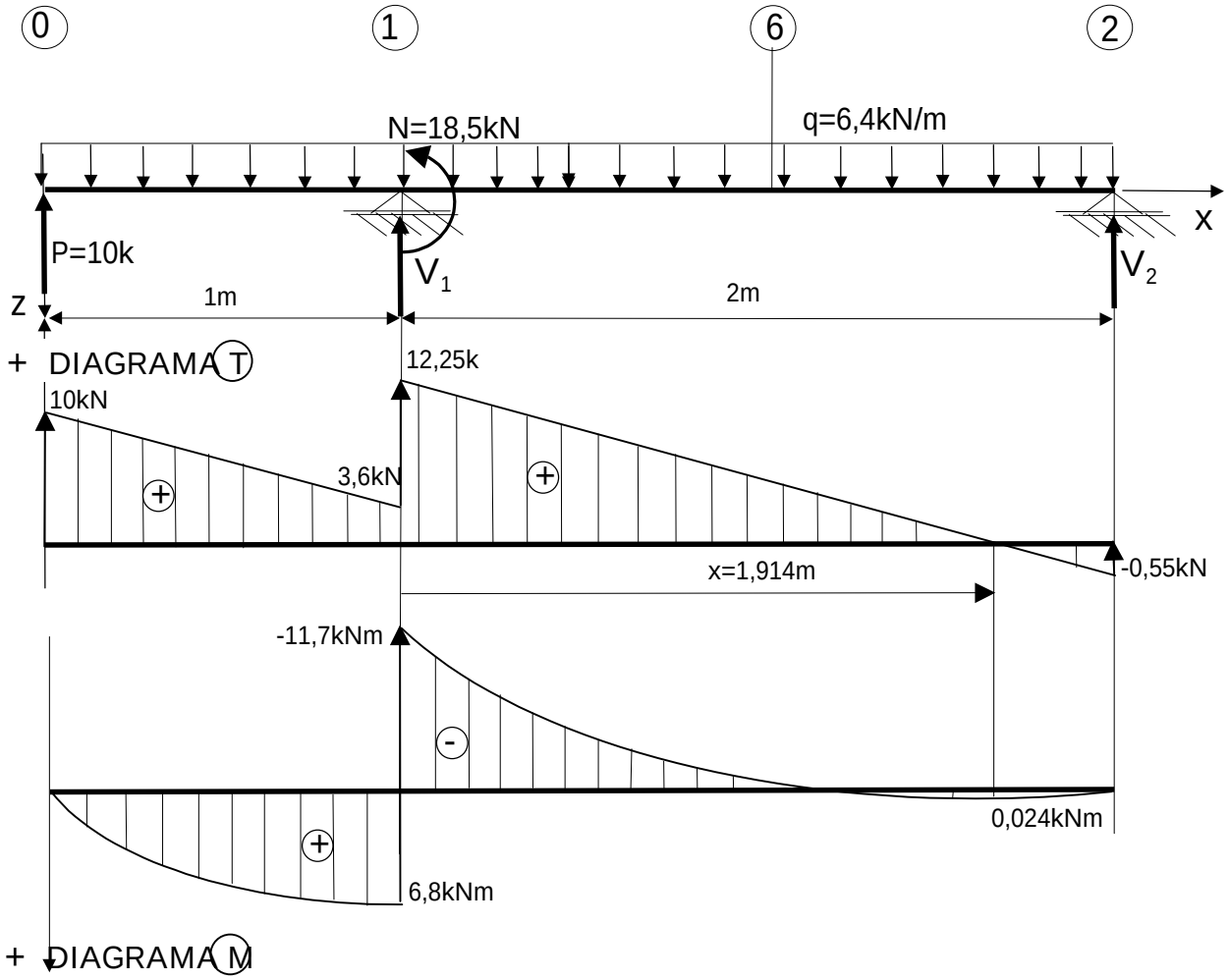
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
1	2	0	0	0	3	1	3	-10	6.4	-18.5

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
8.65	0.55	11.7	3.045	15.327	5.033	27	1.832	-0.058	-0.931	0.033	12.25	5.083

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.29

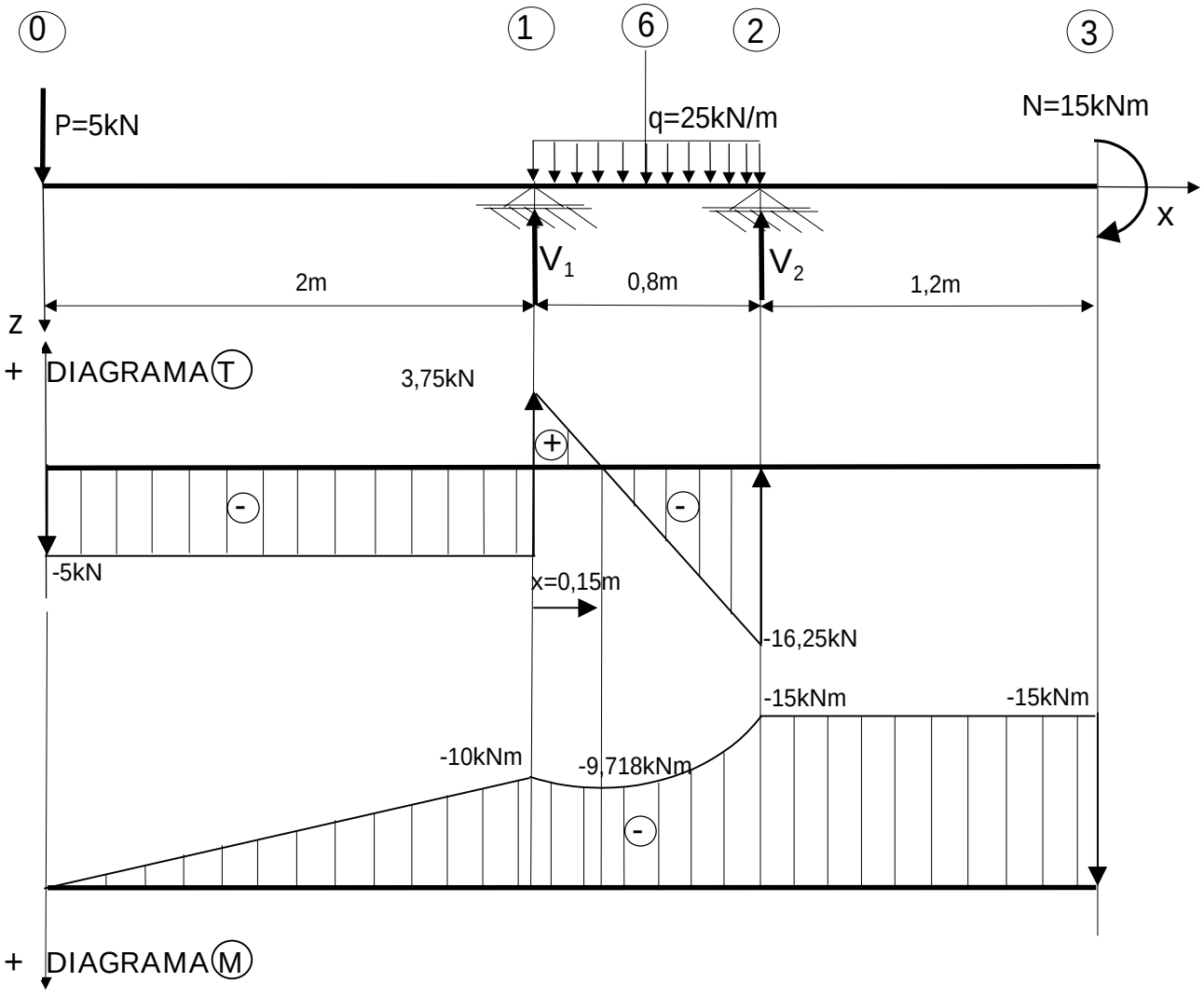
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
2	0.8	1.2	0	2	2.8	4	4	5	25	-15

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
8.75	16.25	15	3.662	26.62	7.269	26	8.455	-0.317	-0.339	-0.004	16.25	6.055

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.30

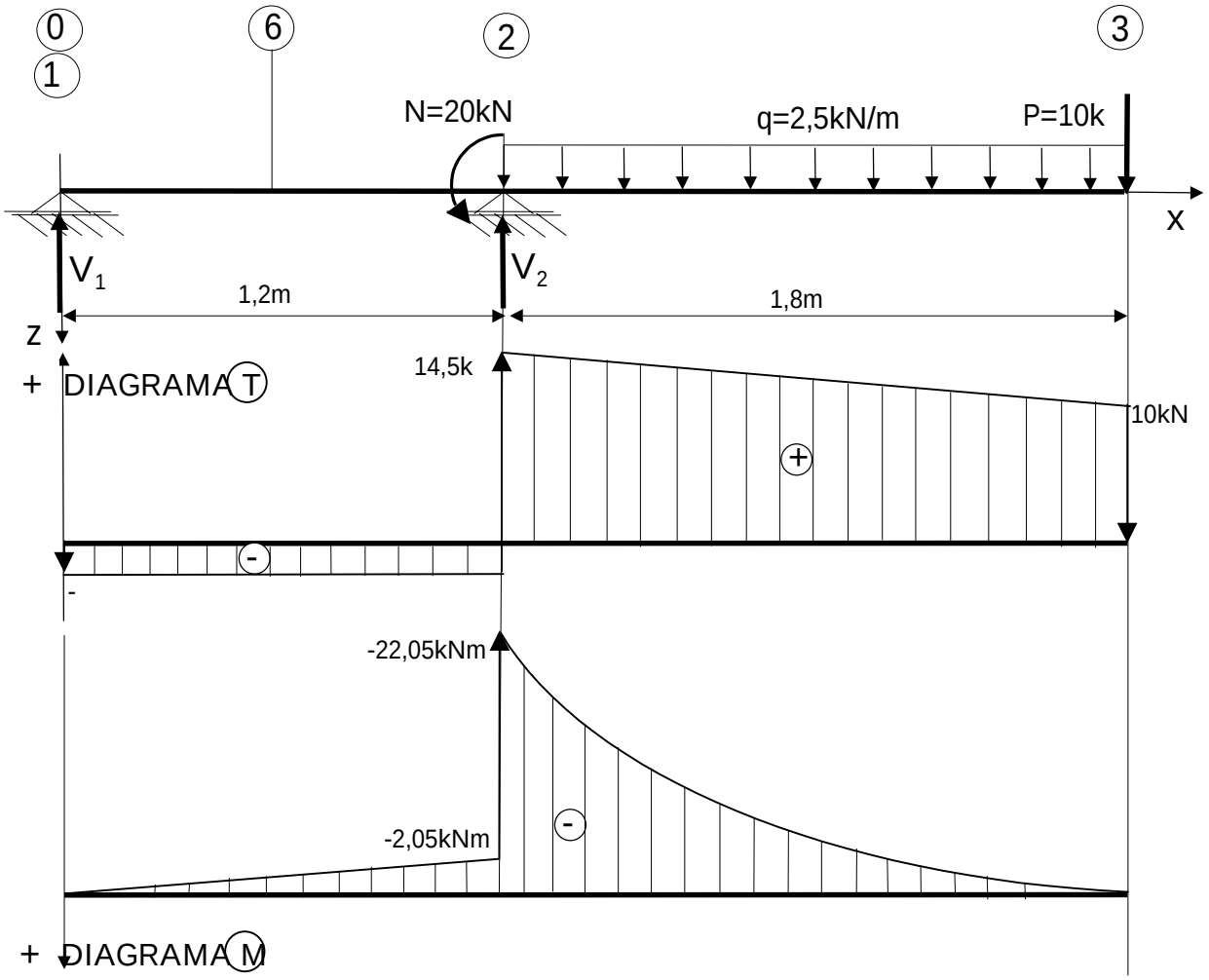
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	1.2	1.8	3	1.2	3	1.2	5	10	2.5	20

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
-1.708	16.208	22.05	4.256	42.338	9.948	27	0	-0.005	-0.039	-0.001	14.5	4.255

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



PROBLEMA 1c.31

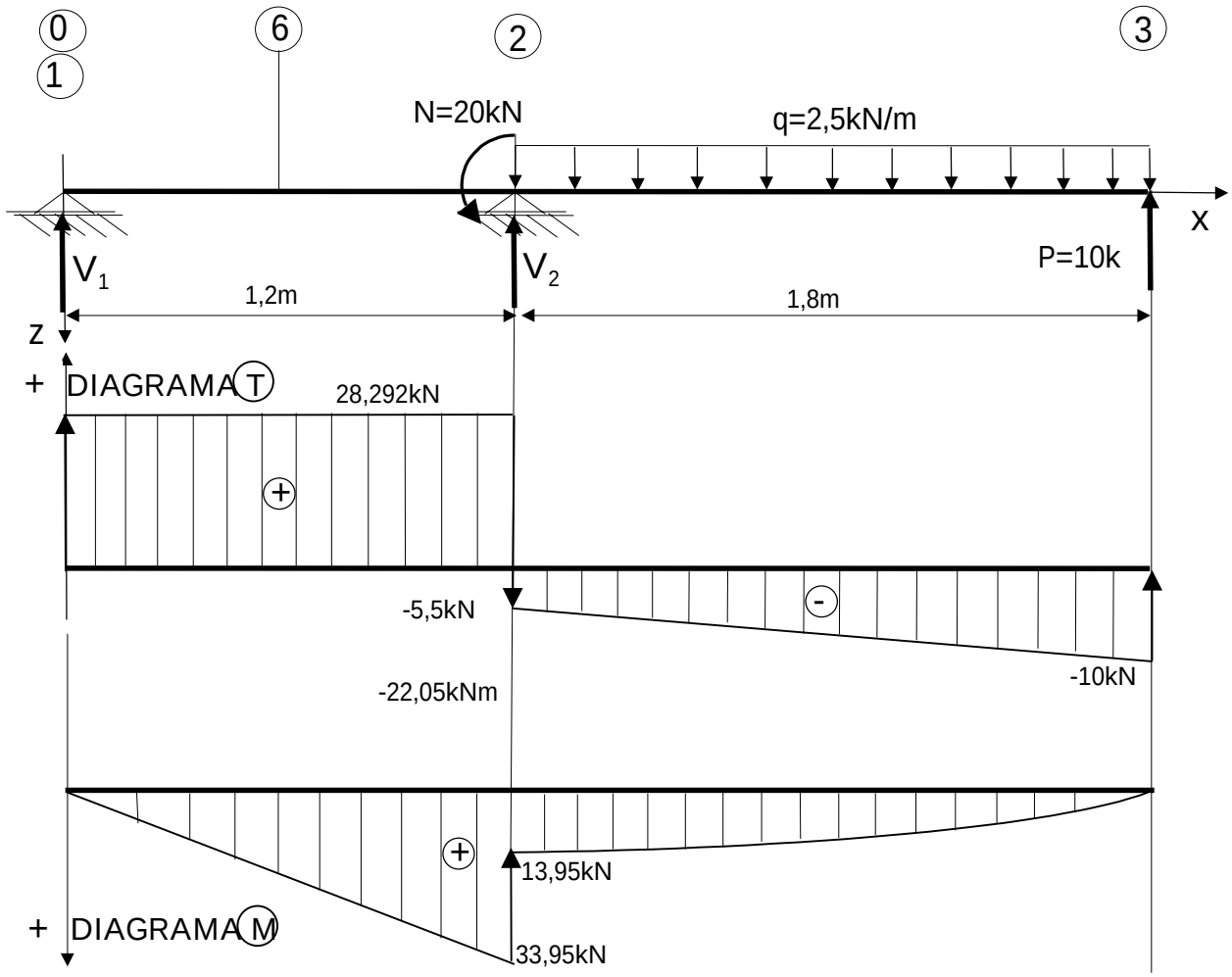
DATE DE INTRARE

a	b	c	d	e	f	g	λ	P	q	N
m	m	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kNm
0	1.2	1.8	3	1.2	3	1.2	5	-10	2.5	20

REZULTATE

V_1	V_2	M_{max}	z_C/s	I_y/s^4	W_y/s^3	s	w_0	φ_0	w_6	φ_6	T_{max}	τ_{max}
kN	kN	kNm	-	-	-	mm	mm	grade	mm	grade	kN	MPa
28.292	-33.792	33.95	4.256	42.338	9.948	31	0	0.047	0.372	0.012	10	2.226

DIAGRAMELE DE EFORTURI T SI M



MODELUL 2a

GRINDA CONTINUĂ PE TREI REAZEME PUNCTUALE RIGIDE SITUATE LA ACELAŞI NIVEL

Enunț

Modelul prezintă rezolvarea unui caz de grindă continuă şi anume o bară dreptă de secțiune constantă, încărcată cu diferite sarcini concentrate şi distribuite uniform, situată pe 3 reazeme punctuale rigide la acelaşi nivel, având configurația generală prezentată în figura 2a.1: bara este supusă la încovoiere simplă prin acțiunea unor *sarcini exterioare* întâlnite curent în aplicații, care sunt cunocute ca module, direcții şi poziție: două forțe concentrate P_1, P_2 acționând normal pe axa barei; două sarcini uniform distribuite q_1, q_2, normale la axa barei ; două cupluri concentrate N_1, N_2 dirijate după axa Oy,cunoscute ca sens şi module.

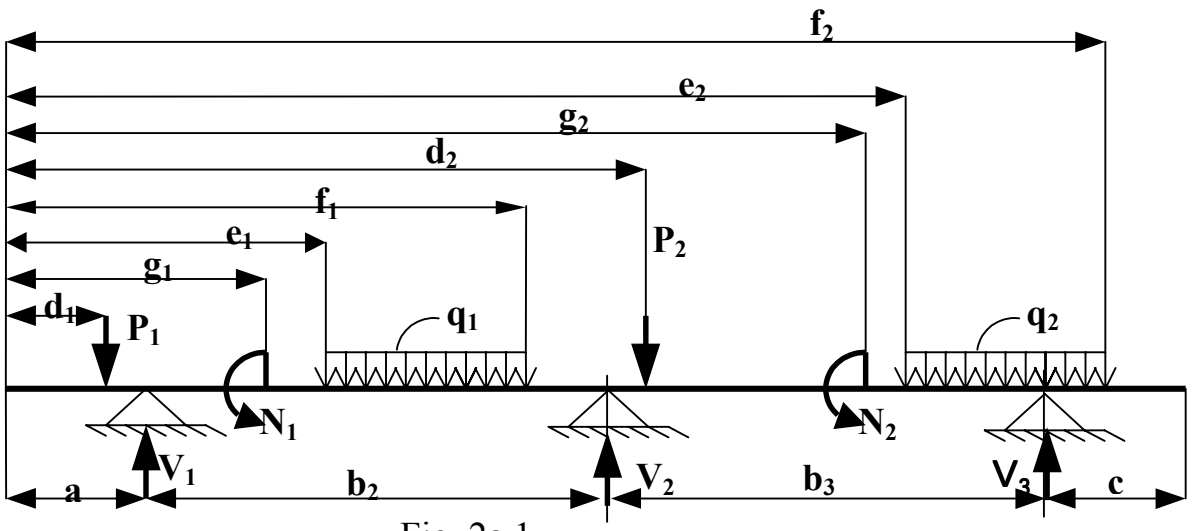


Fig. 2a.1

Conform *axiomei legăturilor* cele trei reazeme punctuale rigide prin care bara este legată de mediul fix, se înlocuiesc cu *reactiunile* V_1, V_2, V_3 cunoscute ca direcție si poziție, dar necunoscute ca module. Pentru determinarea celor 3 reacțiuni se utilizează două ecuații din Mecanică:

$$\Sigma Z_s\downarrow = V_1+V_2+V_3 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_{3s}=V_1\,(b_2+b_3)+V_2\,b_3 \qquad (2)$$

unde ΣM_{3s} reprezintă suma momentelor tuturor sarcinilor exterioare față de reazemul 3 considerate pozitive dacă rotesc în sens trigonometric.

şi o ecuație de deformații şi anume *ecuația celor trei săgeți* (fig.2a.2):

$$EI\left[w_1 b_3 - w_2(b_2+b_3)+w_3 b_2\right] = \Phi_1 b_3 - \Phi_2(b_2+b_3)+\Phi_3 b_2 \qquad (3)$$

Ecuația celor trei săgeți scrisă sub forma generală este:

$$EI\left[w_i L_j - w_j(L_j+L_i)+w_k L_i\right] = \Phi_i\, L_j - \Phi_j(L_j+L_i)+\Phi_k L_i$$

unde Φ_i, Φ_j, Φ_k sunt funcțiile de încărcare din secțiunile aflate la distanțele x_i, x_j, respectiv x_k (fig. 2a.2).

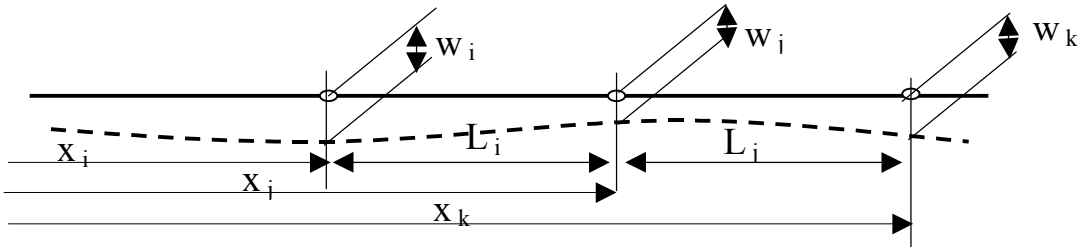


Fig.2a.2

Pentru calculul a funcției de încărcare şi a derivatei ei într-un punct *k* al barei pentru cele trei tipuri de sarcini se folosesc relațiile din fig. 2a.3:

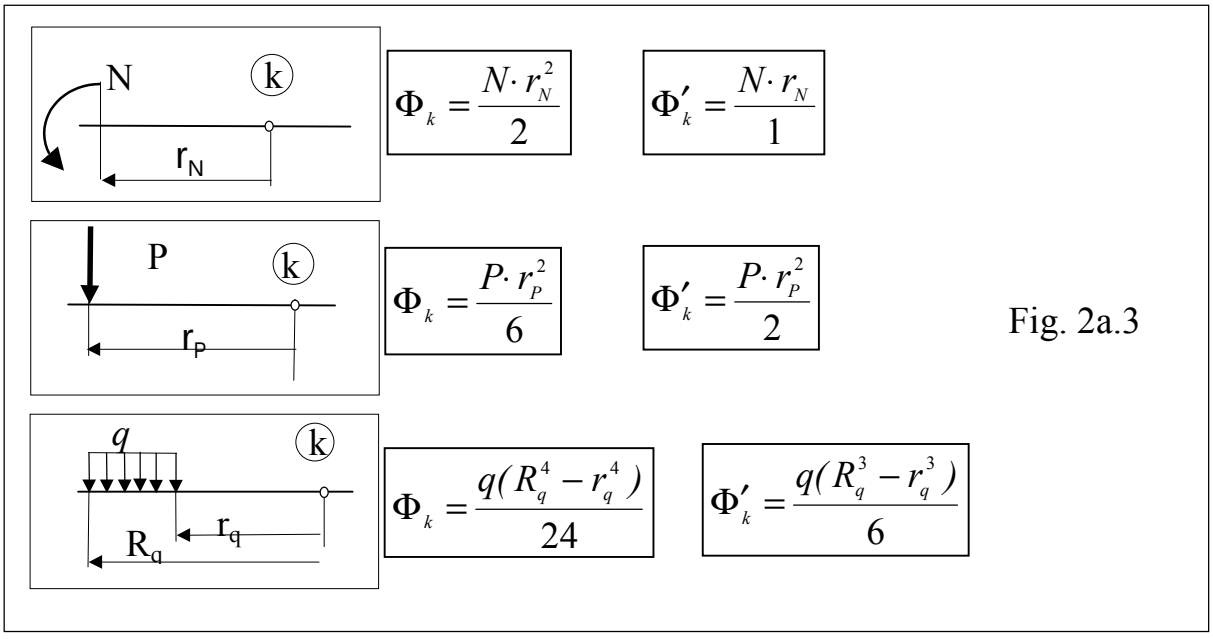


Fig. 2a.3

În ecuația (3) se înlocuiesc valorile săgeților în rezemele punctuale *($w_1=w_2=w_3=0$)* şi funcțiile de încărcare din reazeme :

$$\Phi_1 = \Phi_{1s}\ ;\ \Phi_2 = \Phi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\ ;\quad \Phi_3 = \Phi_{3s} - \frac{V_1 (b_2+b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6} \tag{4}$$

unde Φ_{1S}, Φ_{2S}, Φ_{3S} sunt funcțiile de încărcare pentru sarcinile exterioare cunoscute (fără reacțiuni). După înlocuiri ecuația (3) devine:

$$\Phi_{1s} b_3 - \left(\Phi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\right)(b_2+b_3) + \left(\Phi_{3s} - \frac{V_1 (b_2+b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6}\right) b_2 = 0 \tag{5}$$

Notând cu: $A_{2s} = \Phi_{1s} b_3 - \Phi_{2s}(b_2+b_3) + \Phi_{3s} b_2$ (6), atunci ecuația (5) se scrie:

$$\frac{V_1 b_2^3 (b_2+b_3)}{6} - \frac{V_1 (b_2+b_3)^3 b_2}{6} - \frac{V_2 b_2 b_3^3}{6} = -A_{2s} \tag{7}$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (1), (2) şi (7) rezultă:

$$V_1 = \frac{1}{b_2(b_2+b_3)}\left(\frac{3A_{2s}}{b_2 b_3} - \frac{b_3}{2}\sum \overleftarrow{M}_{3s}\right) \tag{10}$$

$$V_2 = \frac{1}{b_3}\sum \overleftarrow{M}_{3s} - \left(1+\frac{b_2}{b_3}\right) V_1 \tag{11}$$

$$V_3 = \sum Z_i \downarrow - V_1 - V_2 \tag{12}$$

CAZ PARTICULAR

Se consideră valorile parametrilor din tabelul următor:

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	4	2	3	0	20	6	30	0	5	25	6	7	35	5	15	10	-40

Se mai cunosc: tensiunea admisibilă a materialului: $\sigma_a = 150\ MPa$, modulul de elasticitate $E = 2{,}1 \cdot 10^5\ MPa$, secțiunea transversală are forma unei coroane circulare de diametre ***2d*** şi ***3d***; Se cere:

a. să se detremine valorile celor trei reacțiuni: $\boldsymbol{V_1, V_2, V_3}$*;*

b. să se traseze diagramele ***T(x)*** *şi* ***M(x)*** *;*

c. să se dimensioneze barala solicitarea principală de încovoiere (diametrul ***d****)*

d. să se calculeze deplasarea şi rotirea secțiunii din capătul din stânga $\boldsymbol{w_0}$ *şi* $\boldsymbol{\varphi_0}$

e. să se detremine tensiunea tangențială maximă τ_{max} *(formula lui JURAVSKI).*

Înlocuind valorile din tabelul de mai sus rezultă figura particulară 2a.4.

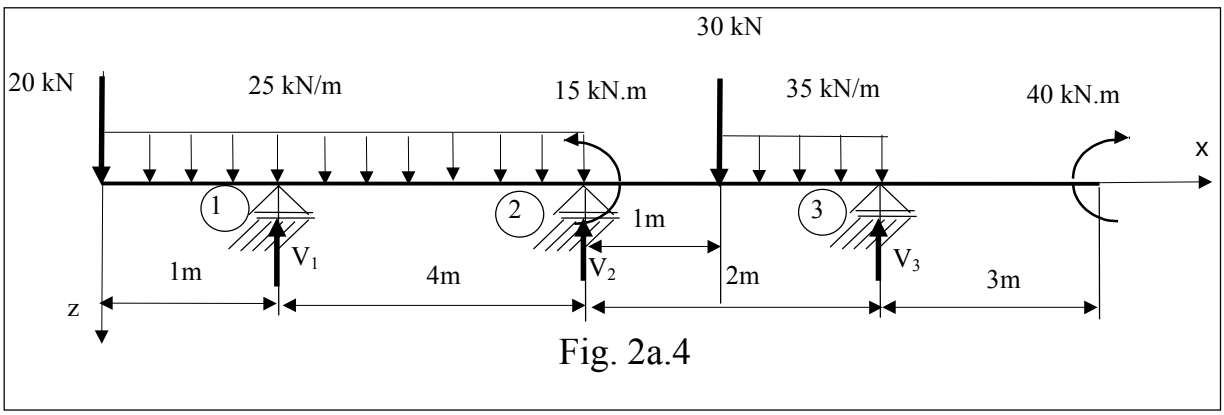


Fig. 2a.4

a. Calculul reacțiunilor

- Se calculează pentru *toate sarcinile* aplicate barei, *suma proiecțiilor pe axa Oz* cu sensul pozitiv în jos:

$$\sum Z_i \downarrow = P_1 + P_2 + q_1 \cdot (f_1 - e_1) + q_2 \cdot (f_2 - e_2) = 210 \quad kN$$

- Se calculează suma momentelor în raport cu reazemul cel mai din dreapta (3), *pentru toate sarcinile* aplicate barei, cu sensul trigonometric pozitiv :

$$\sum \overleftarrow{M}_{3S} = P_1 \cdot (a + b_2 + b_3 - d_1) + P_2 \cdot (a + b_2 + b_3 - d_2) + q_1 \cdot (f_1 - e_1) \cdot [a + b_2 + b_3 - (f_1 + e_1)/2] + q_2 \cdot (f_2 - e_2) \cdot [a + b_2 + b_3 - (f_2 + e_2)/2] + N_1 + N_2 = 725 \quad kN \cdot m$$

- Se calculează valoarea funcției de încărcare Φ_{1S} Φ_{2s} și Φ_{3s} *numai pentru sarcinile aflate în stânga reazemului 1, 2, respectiv 3*:

$$\Phi_{1S} = P_1 \cdot (a - d_1)^3 /6 + q_1 \cdot (a - e_1)^4 /24 = 4{,}375 \; kN \cdot m^3$$

$$\Phi_{2S} = P_1 \cdot (a + b_2 - d_1)^3 /6 + q_1 \cdot (a + b_2 - e_1)^4 /24 = 1067{,}708 \; kN \cdot m^3$$

$$\Phi_{3S} = 20 \cdot 7^3/6 + 30 \cdot 1^3/6 + 25 \, (7^4 - 2^4)/24 + 35 \cdot 1^4/24 + 15 \cdot 2^2/2 = 3664{,}167 \; kN \cdot m^3$$

- Se calculează: $A_{2s} = b_3 \cdot \Phi_{1s} - (b_2 + b_3) \cdot \Phi_{2s} + b_2 \cdot \Phi_{3s} = 8259{,}170 \; kNm^4$
- Se înlocuiesc valorile acestor mărimi în expresiile reacțiunilor (10), (11), (12) se obțin următoarele rezultate :

$V_1 = 98{,}841 kN$; $V_2 = 65{,}977 \; kN$; $V_3 = 45{,}182 \; kN$.

- Pentru verificare se scrie una din ecuațiile de echilibru independentă :

$$\sum M_1 = 20 \cdot 1 - 25 \cdot 5 \cdot 1{,}5 + 15 + 65{,}977 \cdot 4 - 30 \cdot 5 - 35 \cdot 1 \cdot 5{,}5 + 45{,}182 \cdot 6 - 40 = 0$$

b. Diagramele de eforturi tăietoare T(x) şi înconvoietoare M(x)

Diagramele $T=T(x)$ şi $M=M(x)$, sunt date în fig. 2a.5.

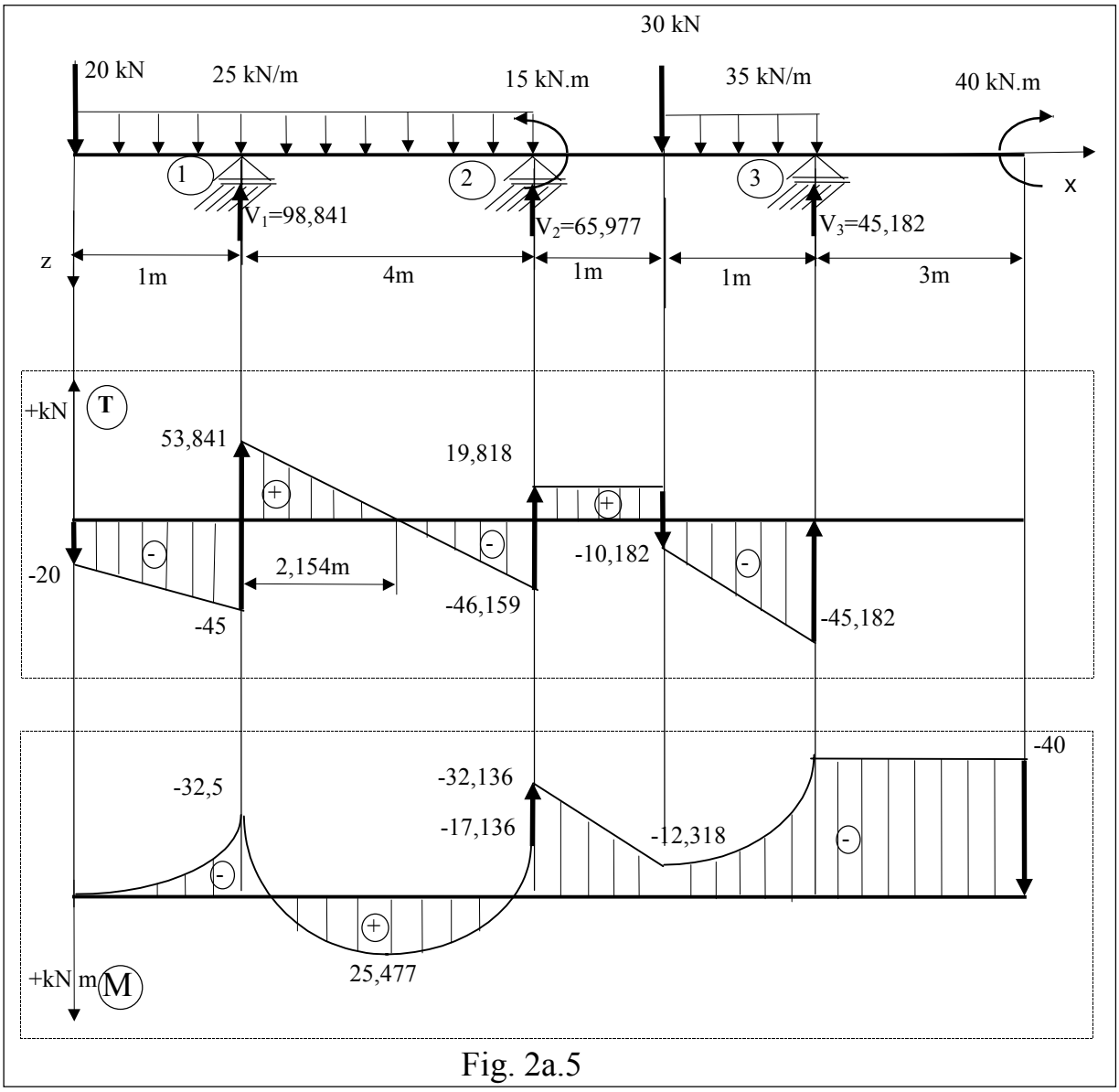


Fig. 2a.5

Din diagrama de momente rezultă momentul de încovoiere şi efortul tăietor maxim: M_{max}= *40 kNm ;* T_{max}=*53,841 kN*

c. Dimensionarea barei la încovoiere

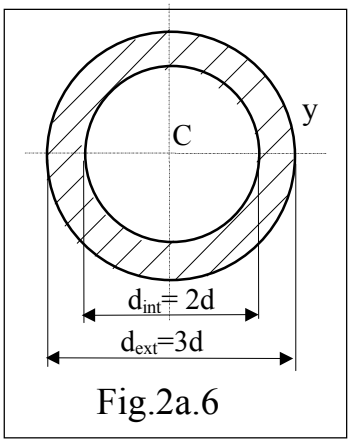


Fig.2a.6

Relația de dimensionare la solicitarea de încovoiere este:

$$W_{ynec} = \frac{M_{iy\,max}}{\sigma_a};$$

unde: W_{ynec} - este modulul de rezistență necesar care se exprimă în funcție de dimensiunea d (fig.2a.6):

$$W_{ynec} = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{\pi\left[(3d)^4 - (2d)^4\right]}{64} \cdot \frac{2}{3d} = \frac{65\pi d^3}{96}$$

σ_a - tensiunea admisibilă la încovoiere a materialului *(σ_a =150 MPa);*

Înlocuind în relația de dimensionare rezultă: $d = \sqrt[3]{\frac{96 \cdot 40 \cdot 10^6}{65 \cdot \pi \cdot 150}} = 50mm$

d. Calculul deplasărilor şi rotirilor capătului din stânga al barei w_0 şi φ_0

Relațiile generale folosite pentru calculul deplasărilor şi rotirilor sunt:

$EIw = EIw_0 + EI\varphi_0 x + \Phi(x); \qquad EI\varphi = EI\varphi_0 + \Phi'(x)$

Pentru reazemele 1 şi 2, aceste relații se scriu :

$EIw_1 = 0 = EIw_0 + EI\varphi_0 a + \Phi_1$

$EIw_2 = 0 = EIw_0 + EI\varphi_0 (a + b_2) + \Phi_2$

$unde \quad \Phi_1 = \Phi_{1s}; \quad \Phi_2 = \Phi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}$

Înlocuind valorile pentru $\boldsymbol{\Phi_{1S}}$,$\boldsymbol{\Phi_{2S}}$,$\boldsymbol{V_1}$ determinate anterior rezultă:

$EI\varphi_0 = \frac{\Phi_{1s} - \Phi_{2s}}{b_2} + \frac{V_1 b_2^2}{6} = -2{,}257\, kNm^2$

$EIw_0 = \frac{\Phi_{2s} - \Phi_{1s}}{b_2} \cdot a - \Phi_{1s} - \frac{V_1 b_2^2 a}{6} = -2{,}117 kNm^3$

unde $w_0 = w_A$ şi $\varphi_0 = \varphi_A$ sunt deplasarea , respectiv rotirea secțiunii A .

Înlocuind valorile lui EI în expresiile de mai sus rezultă:

$w_0 = -0{,}159\ mm \quad ; \qquad \varphi_0 = -0{,}031^0$

f. Calculul tensiunii tangențiale maxime

Formula lui Juravski pentru calculul tensiunii tangențiele maxime este:

$$\tau_{max} = \frac{T_z \cdot S_y^*}{b \cdot I_y} \qquad \text{unde:}$$

- $T_z = 53{,}841kN$ este efortul tăietor maxim;
- $b=d=50\ mm$ lățimea secțiunii după linia care trece prin centrul de greutate;
- $I_y = \frac{65\pi\, d^4}{64}$, momentul de inerție al secțiunii coroană circulară;
- $S_y^* = A^* \cdot z_C^* = \frac{38d^3}{24}$, momentul static al unei jumătăți a secțiunii; unde:

  $A^* = \frac{\pi(3d)^2 - \pi(2d)^2}{8} = \frac{5\pi d^2}{8}$, aria unei jumătăți a secțiunii (fig. 2a.7);

$$z_c^* = \frac{\frac{\pi(3d)^2}{8}\cdot\frac{2(3d)}{3\pi} - \frac{\pi(2d)^2}{8}\cdot\frac{2(2d)}{3\pi}}{\frac{\pi 5d^2}{8}} = \frac{38d}{15\pi}$$

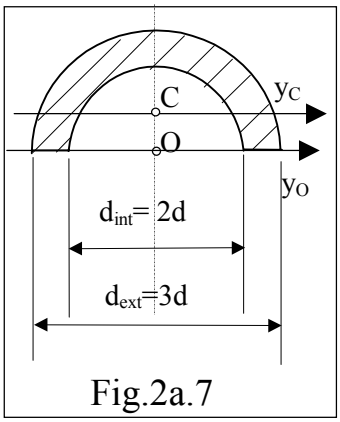


Fig.2a.7

este distanța de la centrul coroanei circulare până la centrul de greutate al jumătății secțiunii *OC* (fig. 2a.7)

Înlocuind valorile numerice rezultă:

$$\tau_{max} = \frac{T_z \cdot S_y^*}{b \cdot I_y} = \frac{304\, T_z}{195\,\pi\, d^2} = \frac{304 \cdot 53{,}841 \cdot 10^3}{195 \cdot \pi \cdot 50^2} = 10{,}684 MPa$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 2A UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 2A s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
Nr	**a**	**b2**	**b3**	**c**	**d1**	**P1**	**d2**	**P2**	**e1**	**f1**	**q1**	**e2**	**f2**	**q2**	**g1**	**N1**	**g2**	**N2**
	m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	KN/m	m	m	KN/m	m	kNm	m	kNm
0	1	4	2	3	0	20	6	30	0	5	25	6	7	35	5	15	10	-40

DATE DE IESIRE (REZULTATE)

T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
Φ_{1S}	**Φ_{2S}**	**Φ_{3S}**	**A_{2S}**	**Z_S**	**M_{3S}**	**V_1**	**V_2**	**V_3**
CFOR	CFOR	CFOR	T*D-U*(C+D)+V*C	G+I+L*(K-J)+O*(N-M)	G*(B+C+D-F)+I*(B+C+D-H)+Q+S+L*(K-J)*(B+C+D-(K+J)/2)+O*(N-M)*(B+C+D-(N+M)/2)	(3*W/(C*D)-0.5*D*Y)/(C*(C+D))	Y/D-Z*(1+C/D)	X-Z-AA
4,375	1067	3664,16	8259,17	210	725	98,841	65,977	45,18

AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
$EI\varphi_0$	**$EI\, w_0$**	**M_{max}**	**d**	**d_{ef}**	**I_{yef}**	**w_0**	**φ_0**	**T_{max}**	**τ_{max}**
(T-U)/C+Z*C^2/6	(T-U)*B/C-T+Z*A*C^2/6		(AE*10e6*96/65*3.14*150)	INT (AF)+1	65*3.14*AG^4/64	AD*1e6/(2.1*AH)	AC*1e3*180/(2.1*3.14*AH)		304*AK/(195*3.14*AF^2)
-2,257	-2,117	40	50	50	19941750	-0.505	-0,031	53,841	10,7

Rezultatele obținute cu ajutorul acestui program pentru un set de 31 date de intrare sunt prezentate în **Anexa 2a,** iar diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare corespunzătoare sunt prezentate în continuare.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2a.1

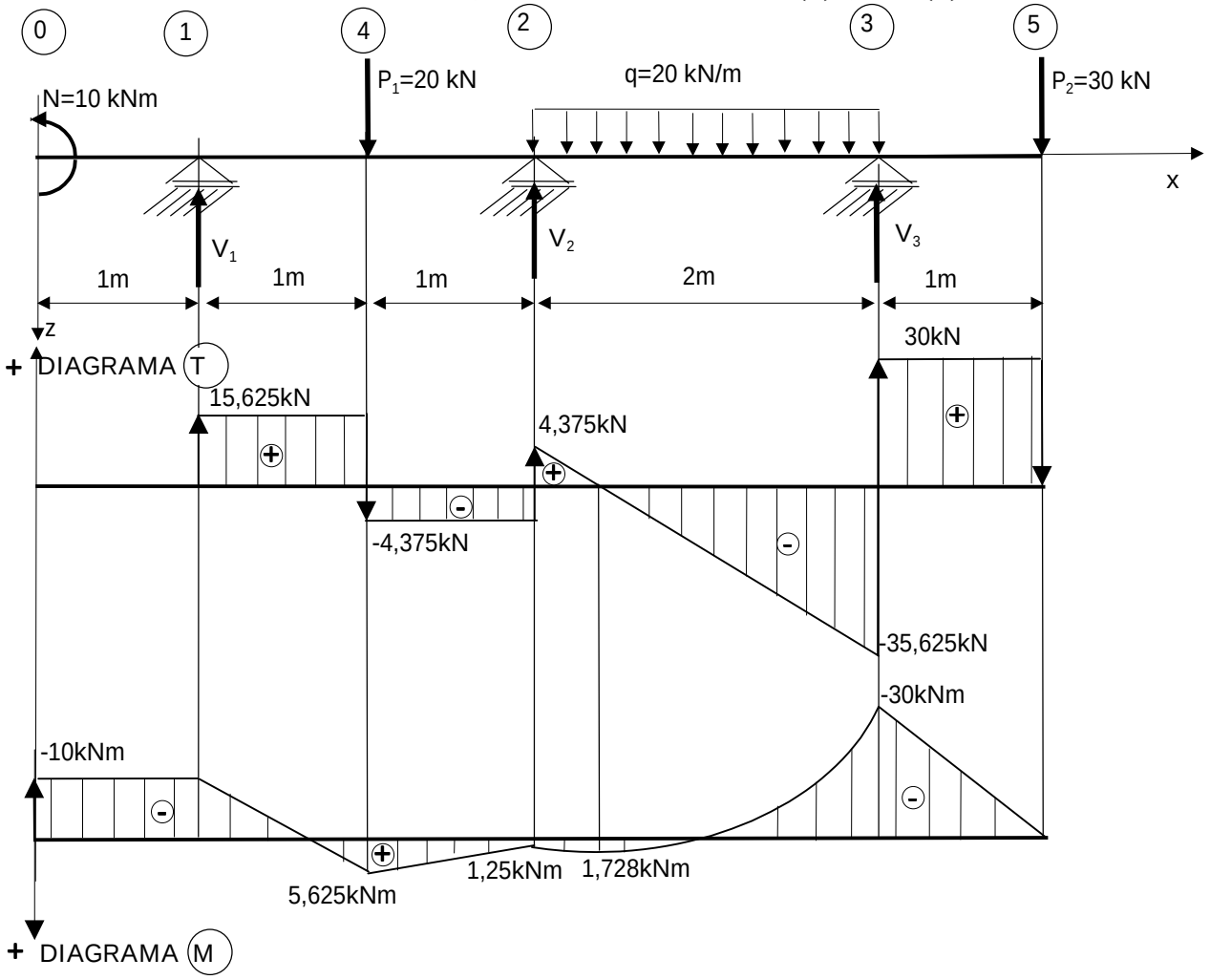
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,* σ_a*=150 MPa,E=2,1·10*^{5} *MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	2	2	1	2	20	6	30	3	5	20	0	0	0	0	10	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
5	48,333	228,333	273,333	90	80	15,625	8,75	65,625	30	46	-0,215	2,083

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T(x) ŞI M(x)



PROBLEMA 2a.2

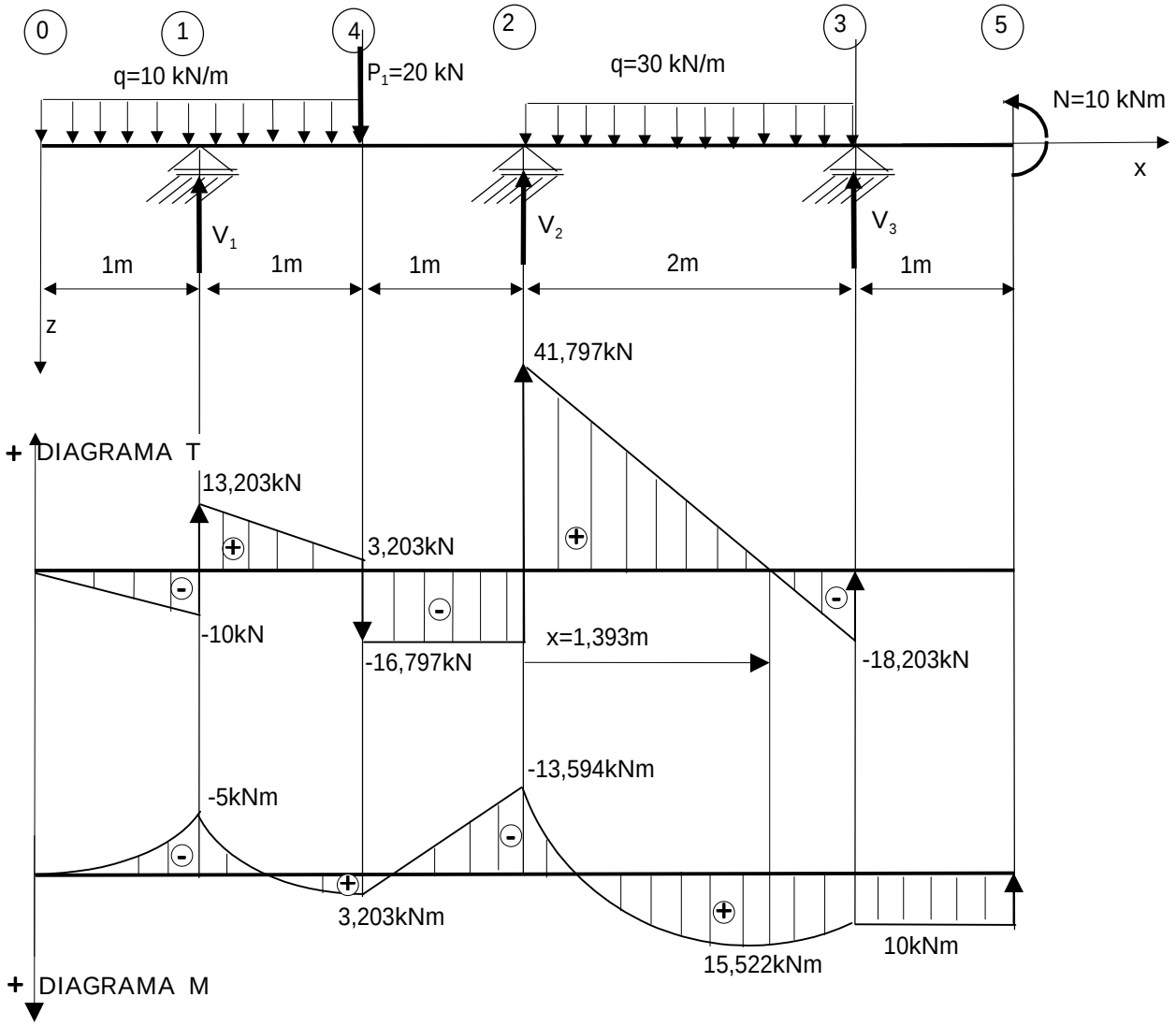
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,* σ_a*=150 MPa,E=2,1·10*^{5} *MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	2	2	1	2	20	0	0	0	2	10	3	5	30	6	10	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
0,417	36,666	336,667	527,5	100	210	25,203	58,594	18,203	15,522	37	-0,121	1,783

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.3

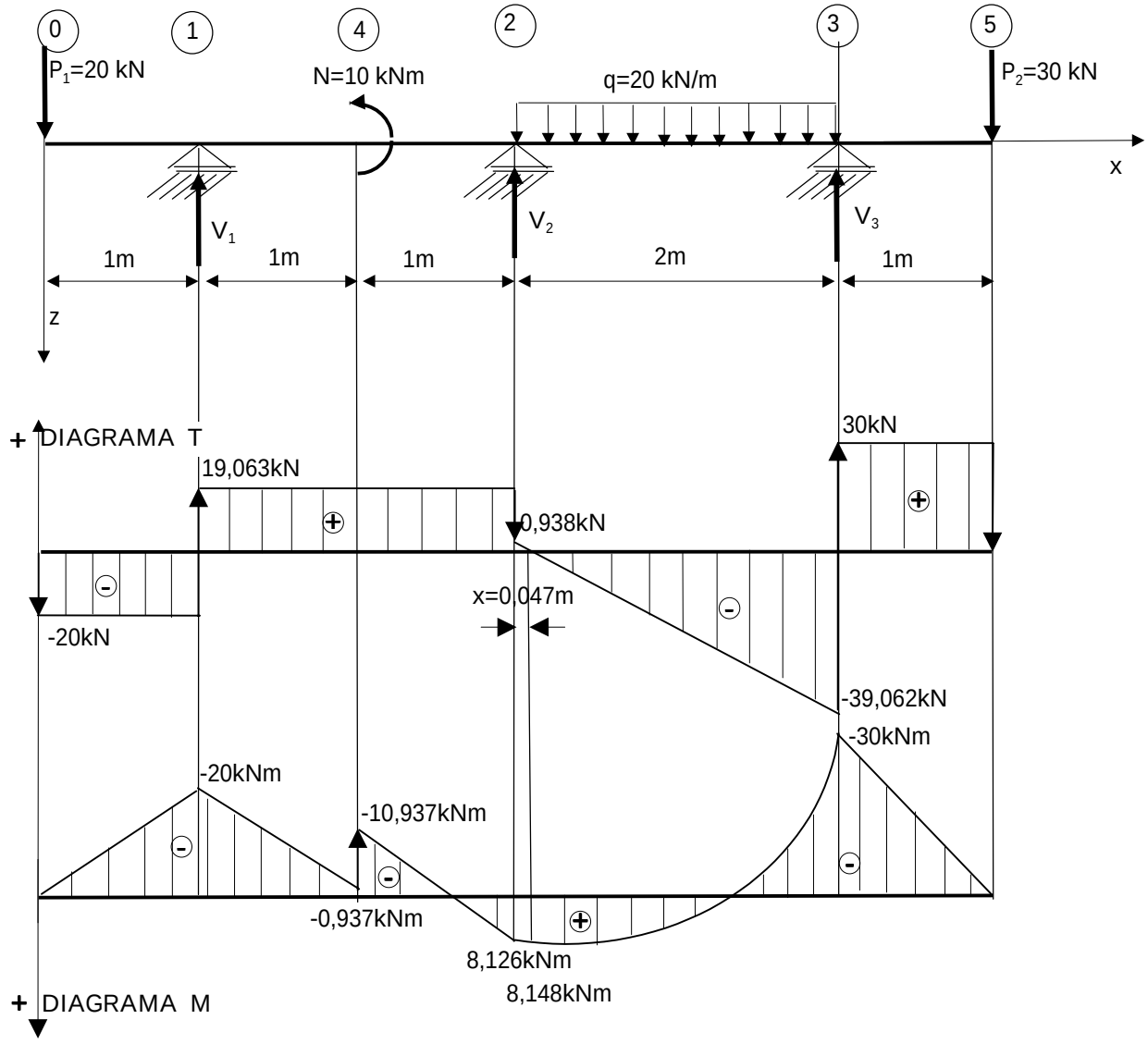
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	2	2	1	0	20	6	30	3	5	20	0	0	0	2	10	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
3.333	95	475	576.667	90	120	39.063	-18.125	69.063	30	46	-0.378	5.486

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.4

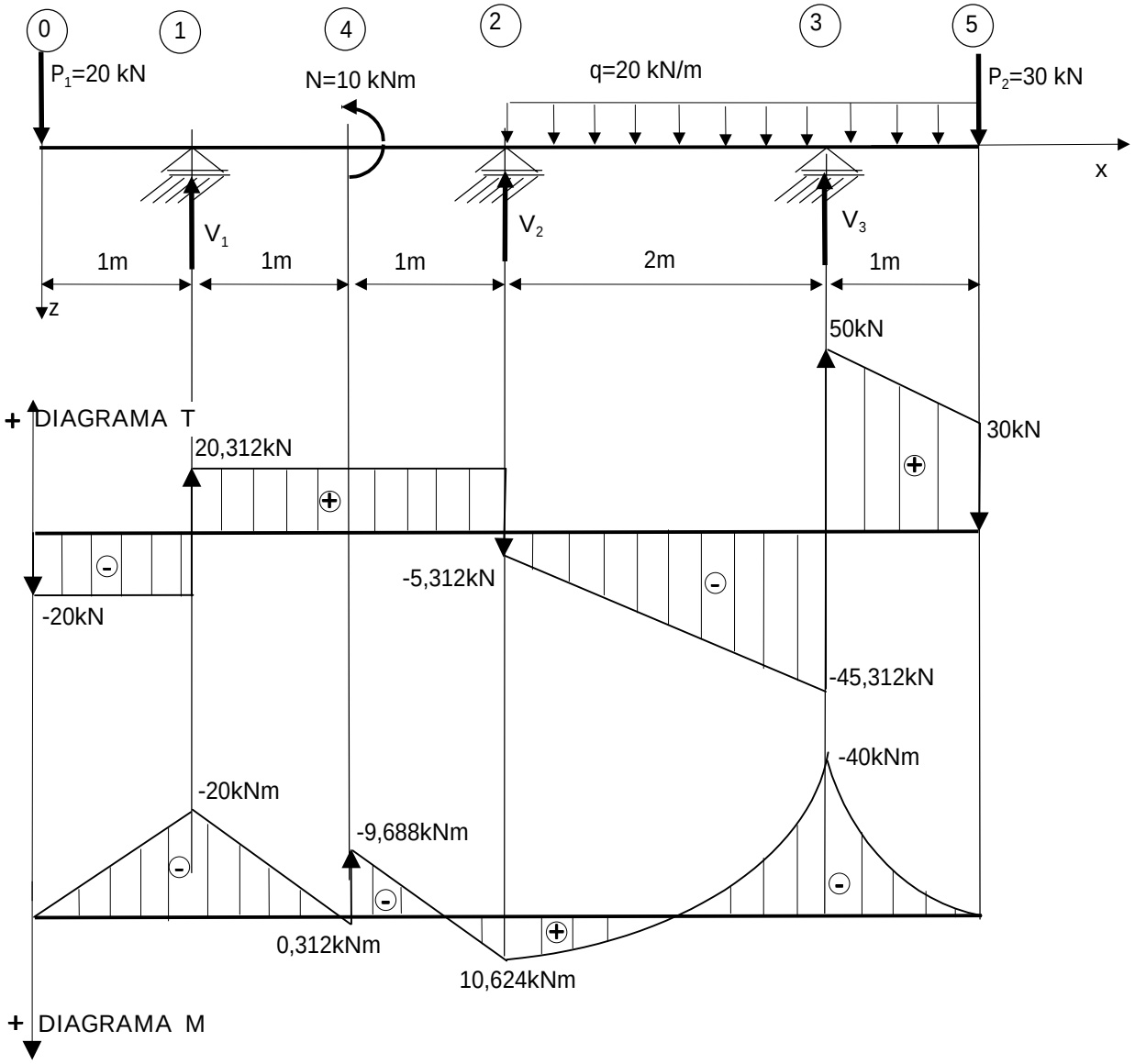
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	2	2	1	0	20	6	30	3	6	20	0	0	0	2	10	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
3.333	95	475	576.667	110	110	40.313	-25.625	95.313	40	51	-0.24	3.447

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.5

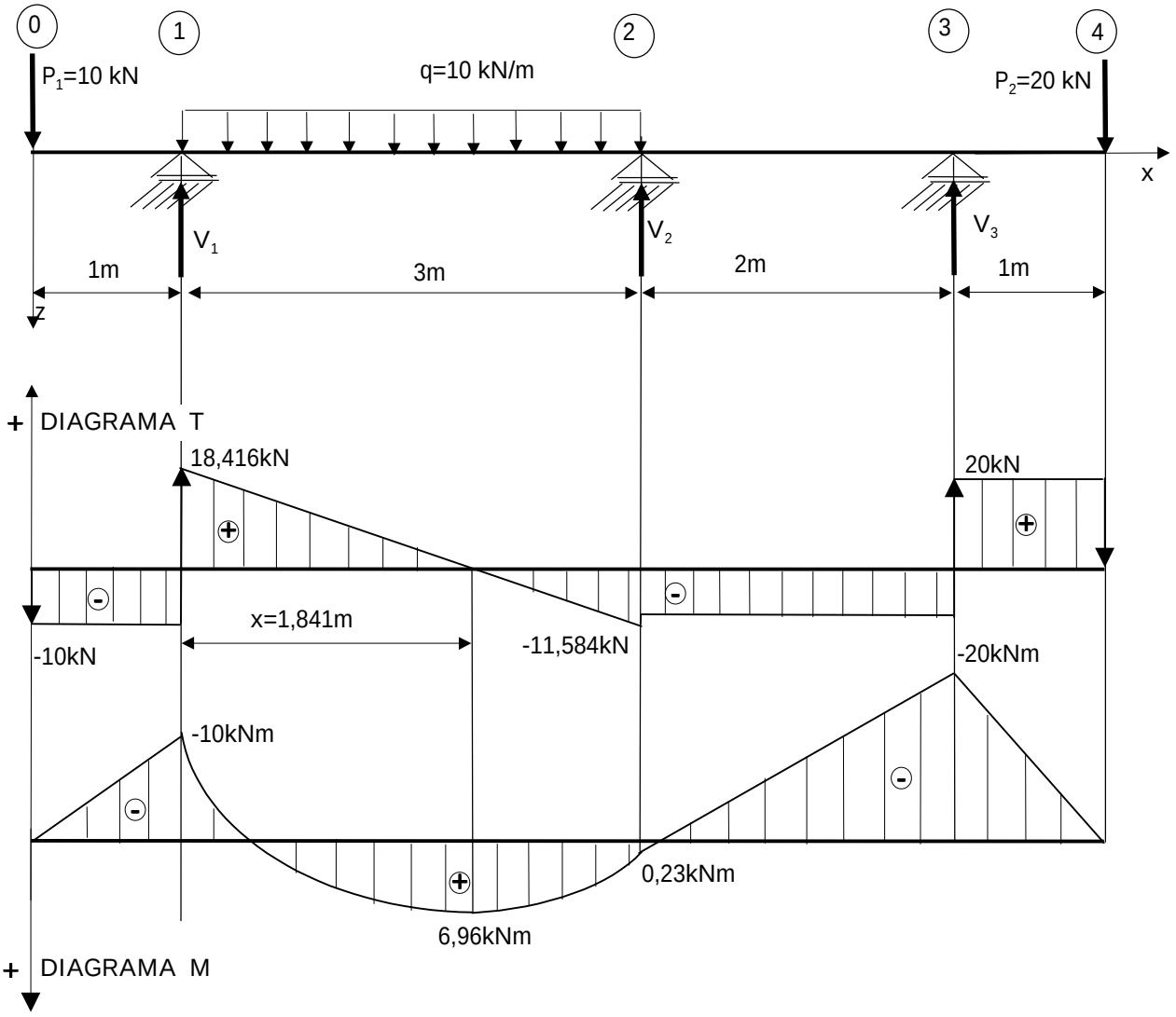
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,* σ_a*=150 MPa,E=2,1·10*^{5} *MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	3	2	1	0	10	7	20	1	4	10	0	0	0	0	0	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
1.667	140.417	613.75	1142.5	60	145	28.417	1.458	30.125	20	40	-0.121	1.142

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.6

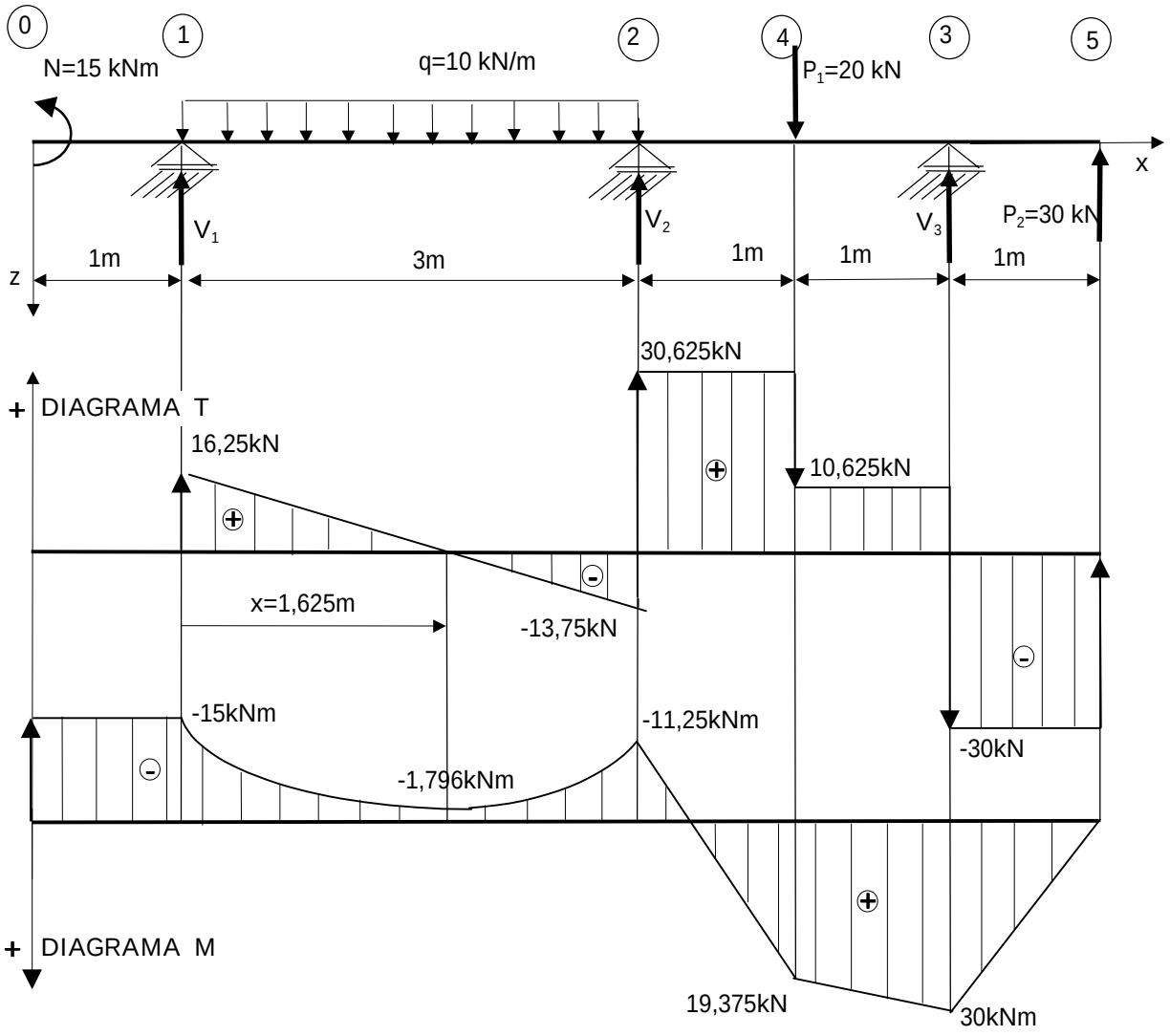
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,* σ_a*=150 MPa,E=2,1·10*^{5} *MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	3	2	1	5	20	7	-30	1	4	10	0	0	0	0	15	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
7.5	153.75	527.08	827.5	20	170	16.25	44.375	-40.625	30	46	-0.466	5.625

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.7

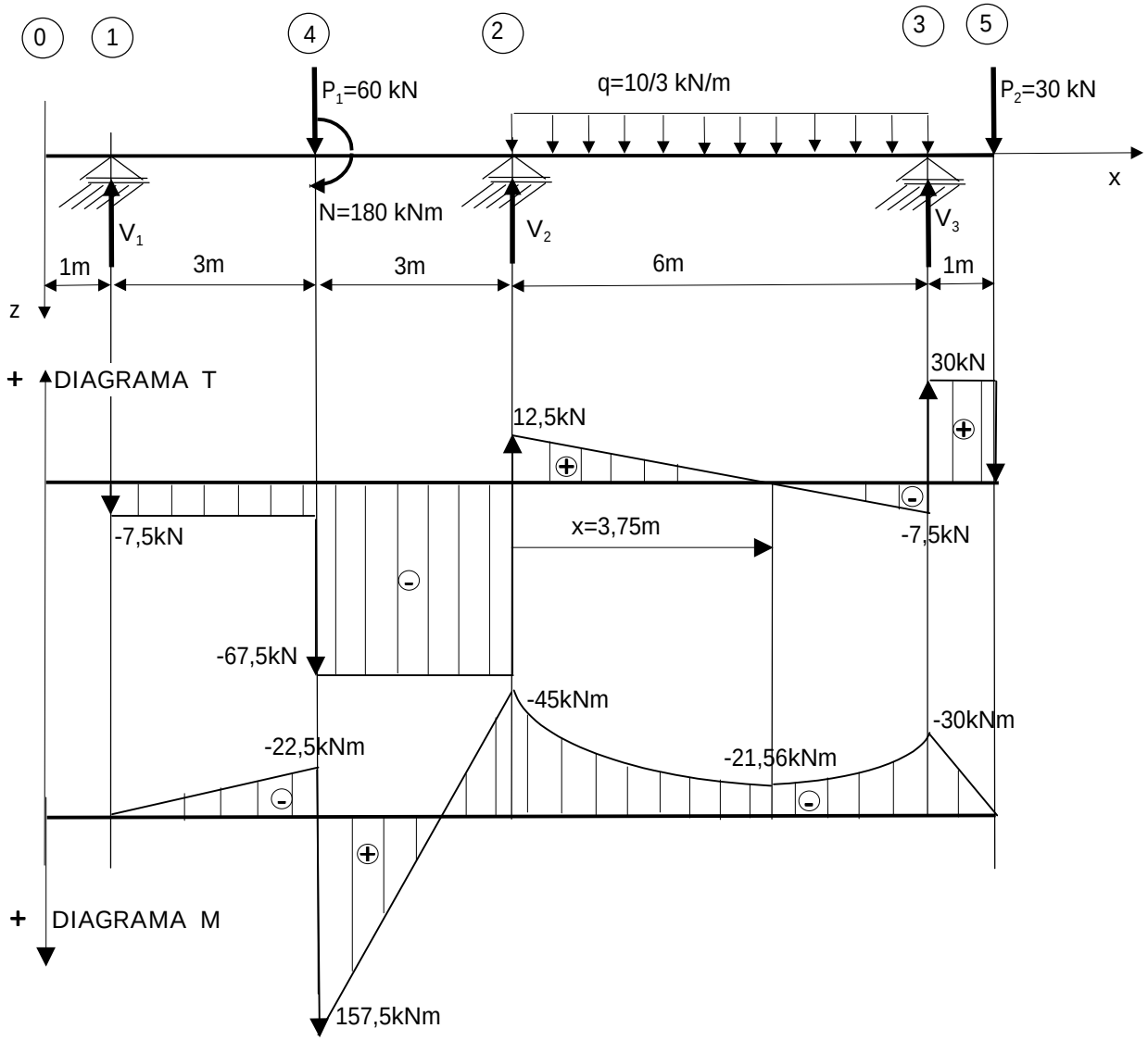
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	1	4	60	14	30	7	13	10/3	0	0	0	4	-180	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
0	-540	180	7560	110	390	-7,5	80	37.5	157,5	80	0.094	-1.64

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.8

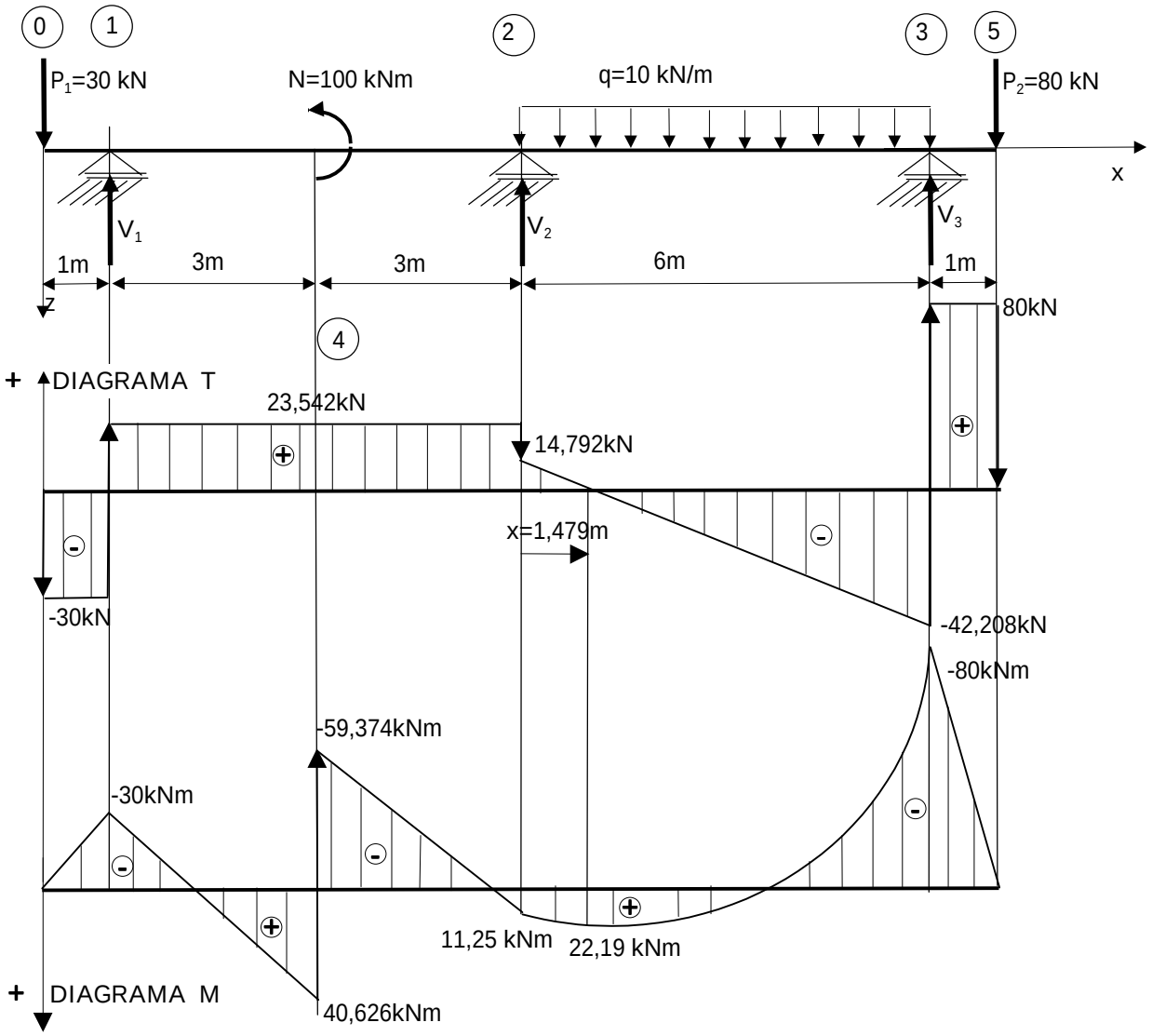
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	1	0	30	14	80	7	13	10	0	0	0	4	100	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
5	2165	15575	67500	170	590	53.542	-8.75	125.208	80	64	-0.198	3

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.9

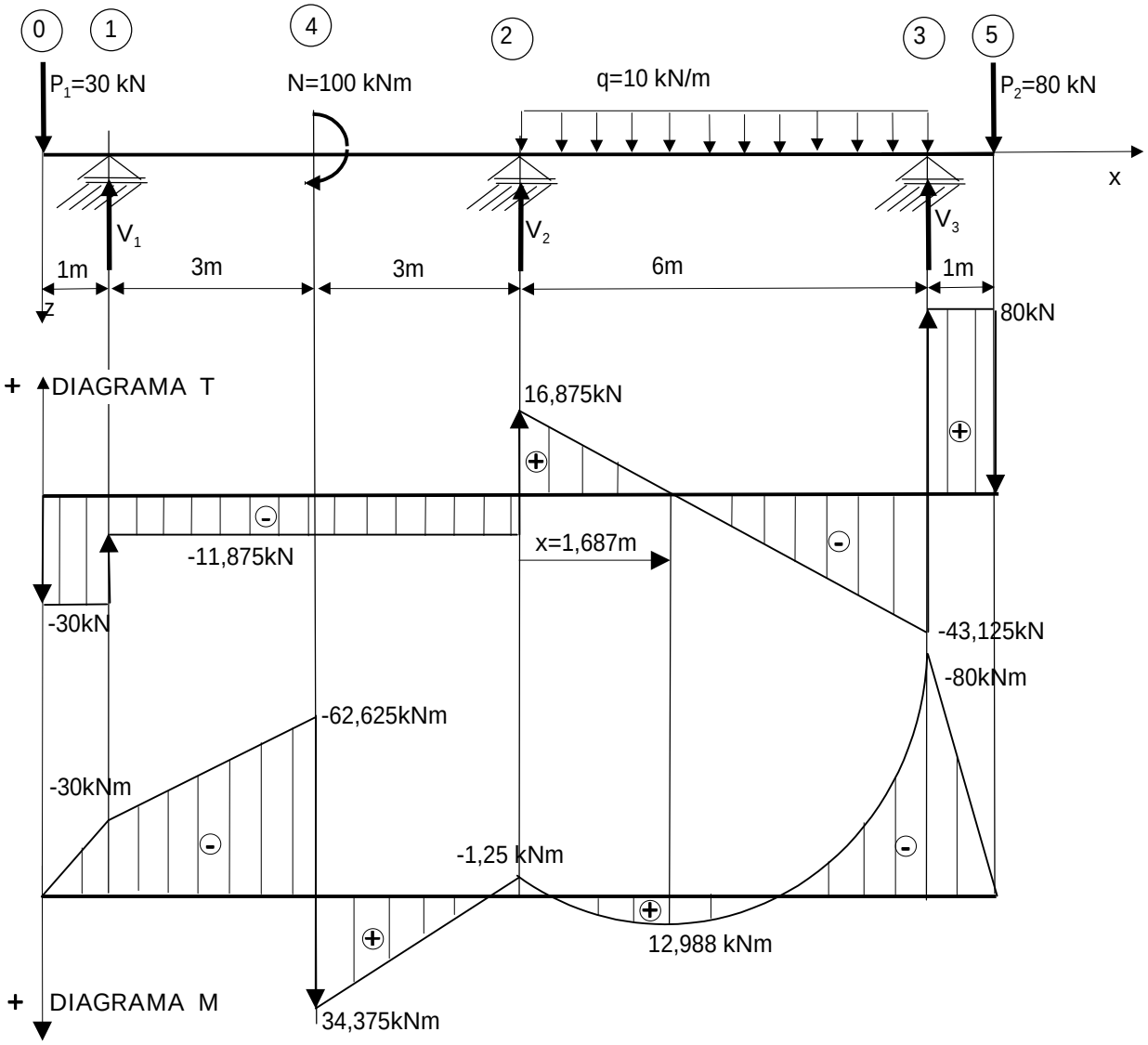
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,* σ_a*=150 MPa,E=2,1·10*^{5} *MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	1	0	30	14	80	7	13	10	0	0	0	4	-100	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
5	1265	7475	29700	170	390	18.125	28.75	123.125	80	64	-0.516	8.562

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.10

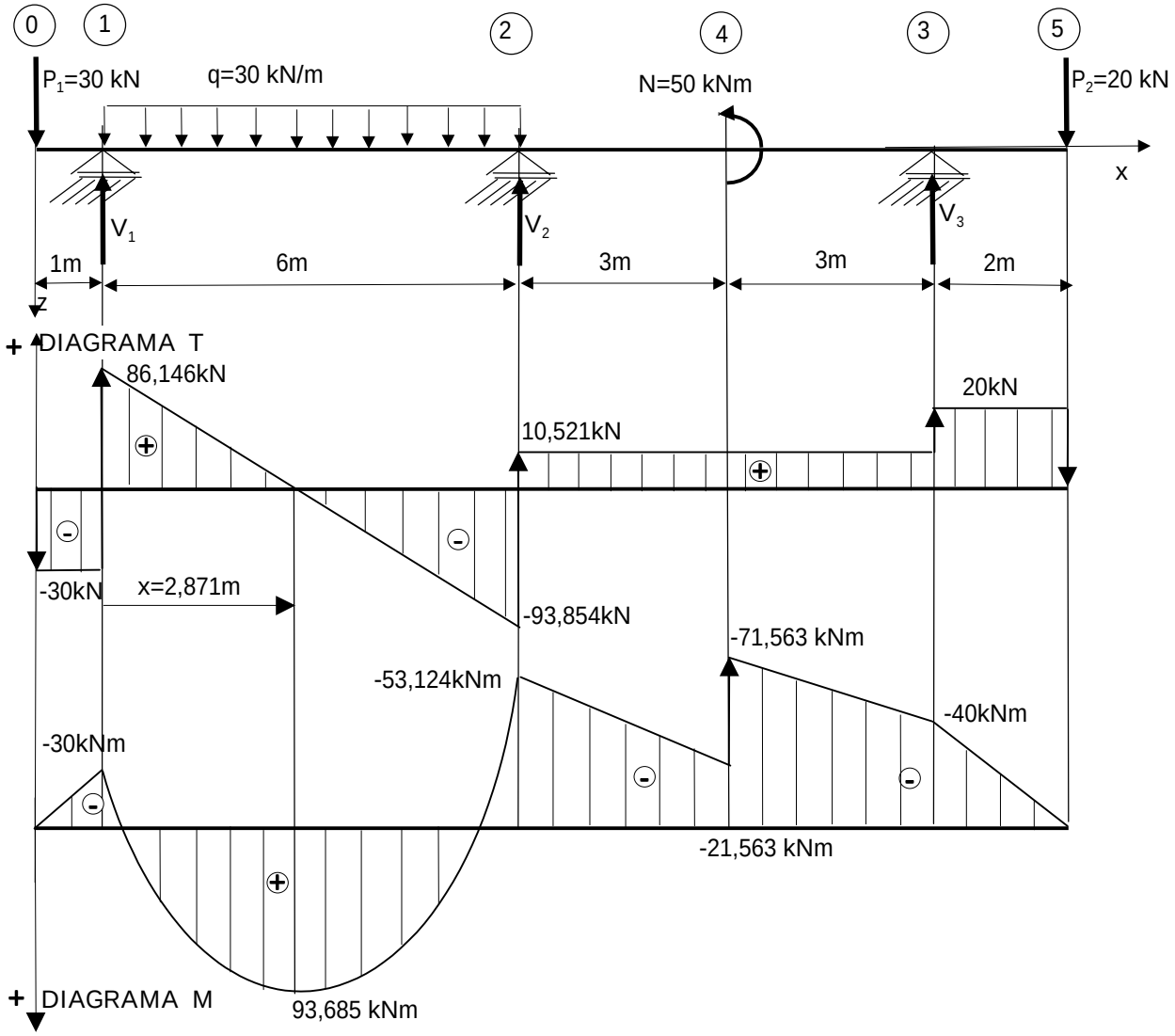
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	2	0	30	15	20	1	7	30	0	0	0	10	50	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
5	3335	35510	173070	230	2020	116.146	104.375	9.479	93.685	67	0.602	-10.878

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.11

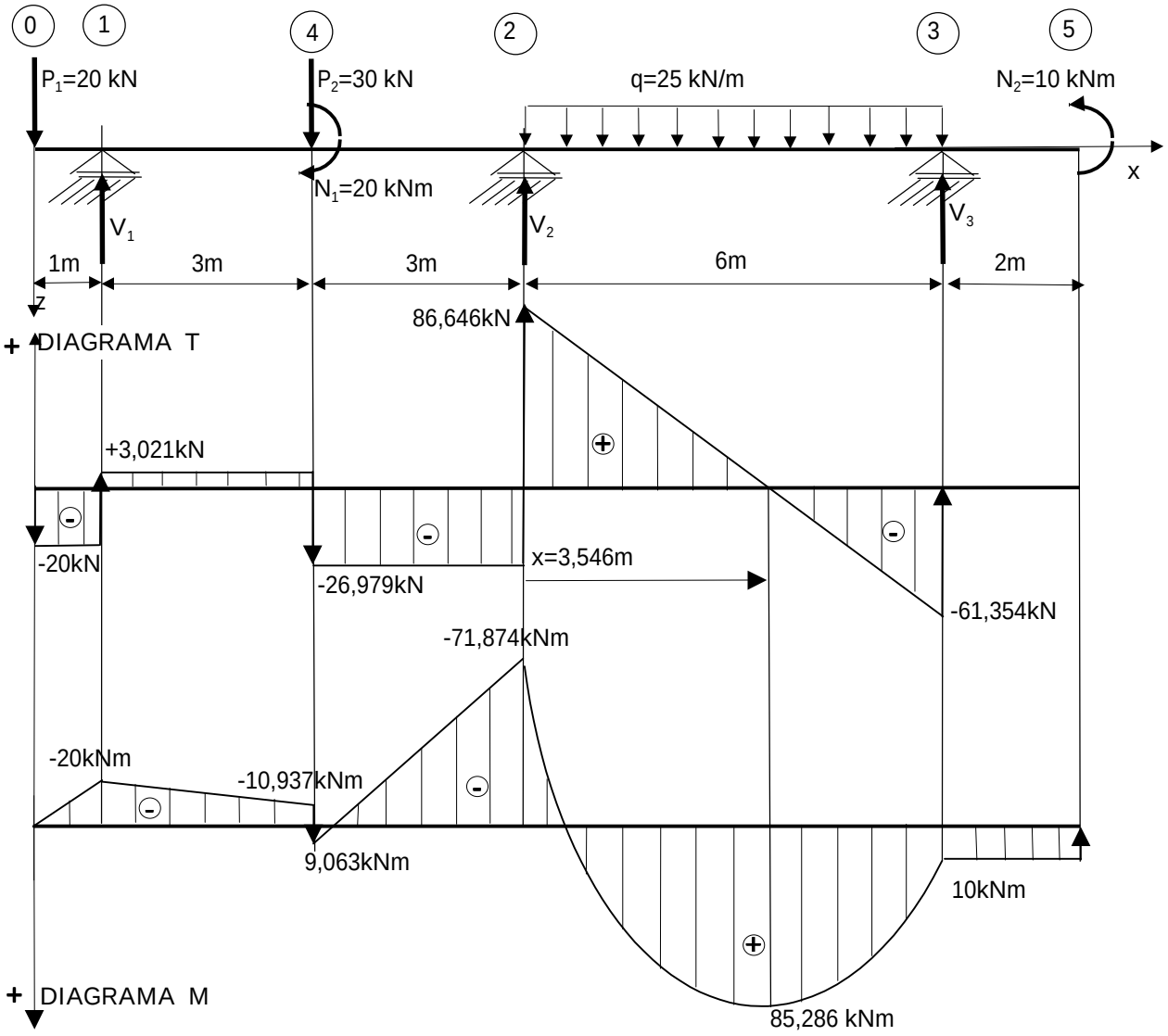
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	2	0	20	4	30	7	13	25	0	0	0	4	-20	15	10

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
3.333	1188. 333	11508.33	54810	200	970	23.021	115.625	61.354	85.286	65	-0.284	4.685

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.12

PROBLEMA 2a.11

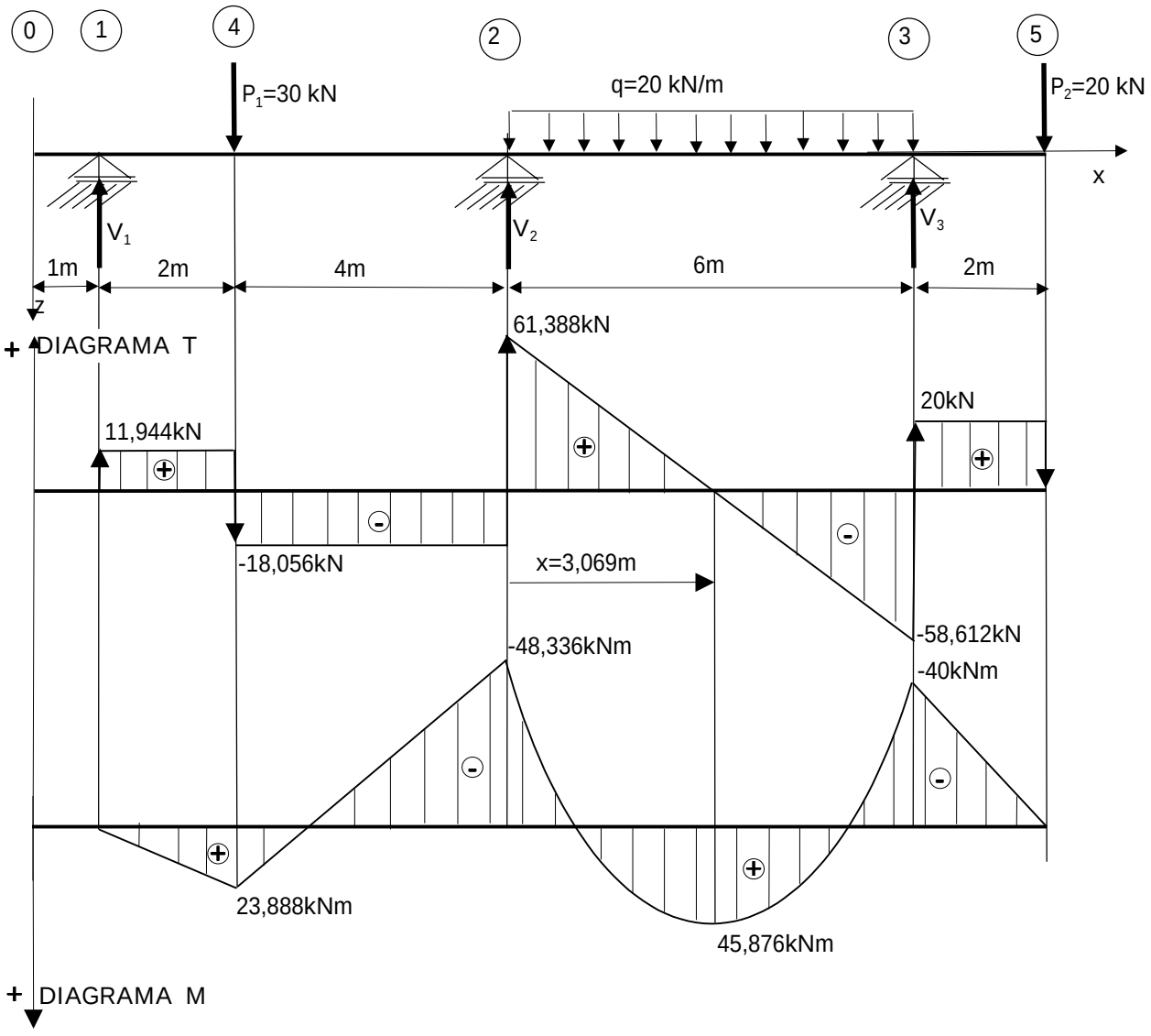
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară* $2d \times 3d, \sigma_a = 150\ MPa, E = 2{,}1 \cdot 10^5\ MPa$)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	2	3	30	15	20	7	13	20	0	0	0	0	0	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
0	320	6080	32640	170	620	11.944	79.444	78.612	48.336	54	0.184	-3.218

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.13

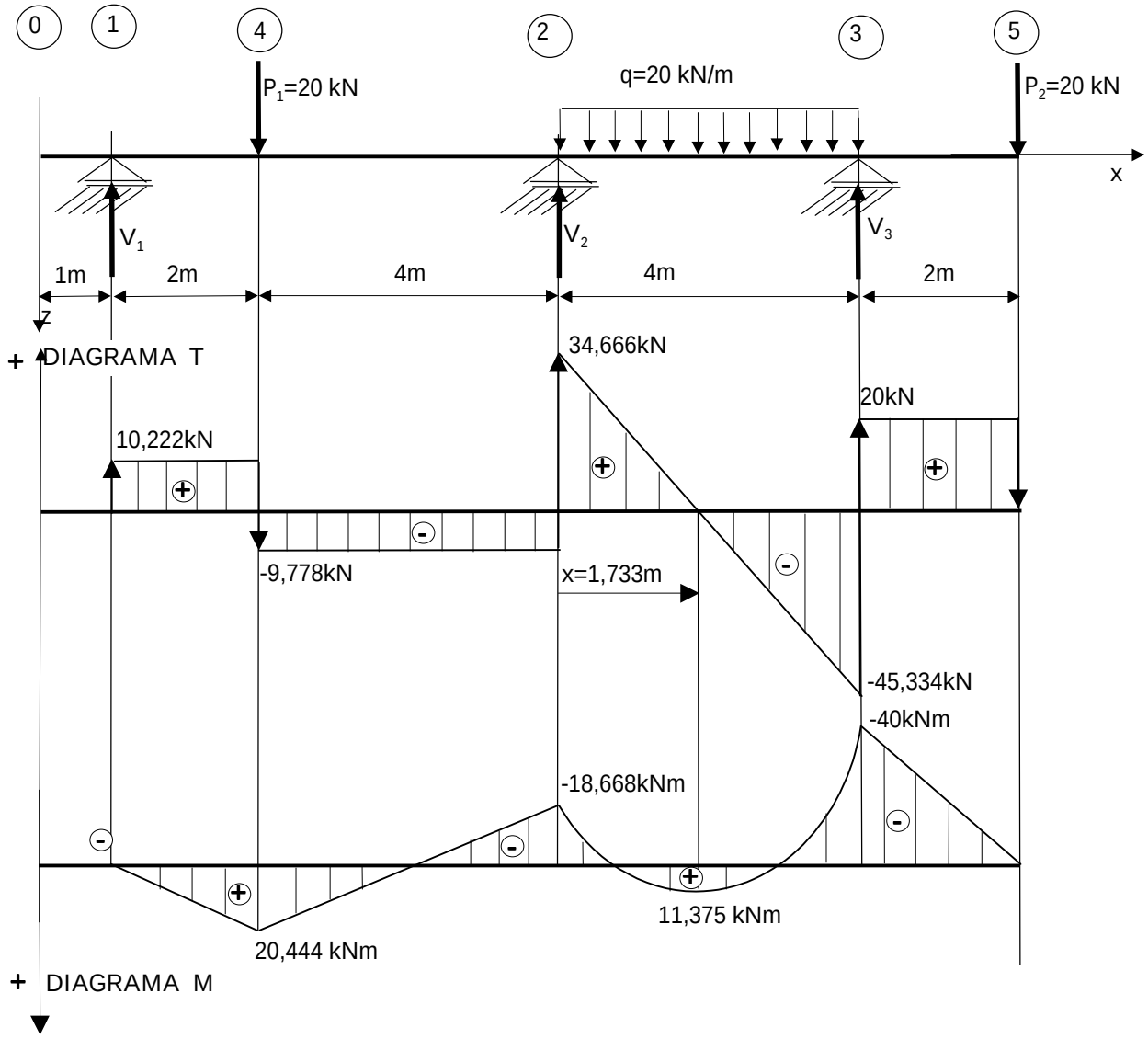
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	4	2	3	20	13	20	7	11	20	0	0	0	0	0	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
0	213.333	1920	9386.666	120	280	10.222	44.444	65.333	40	51	0.236	-5.687

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.14

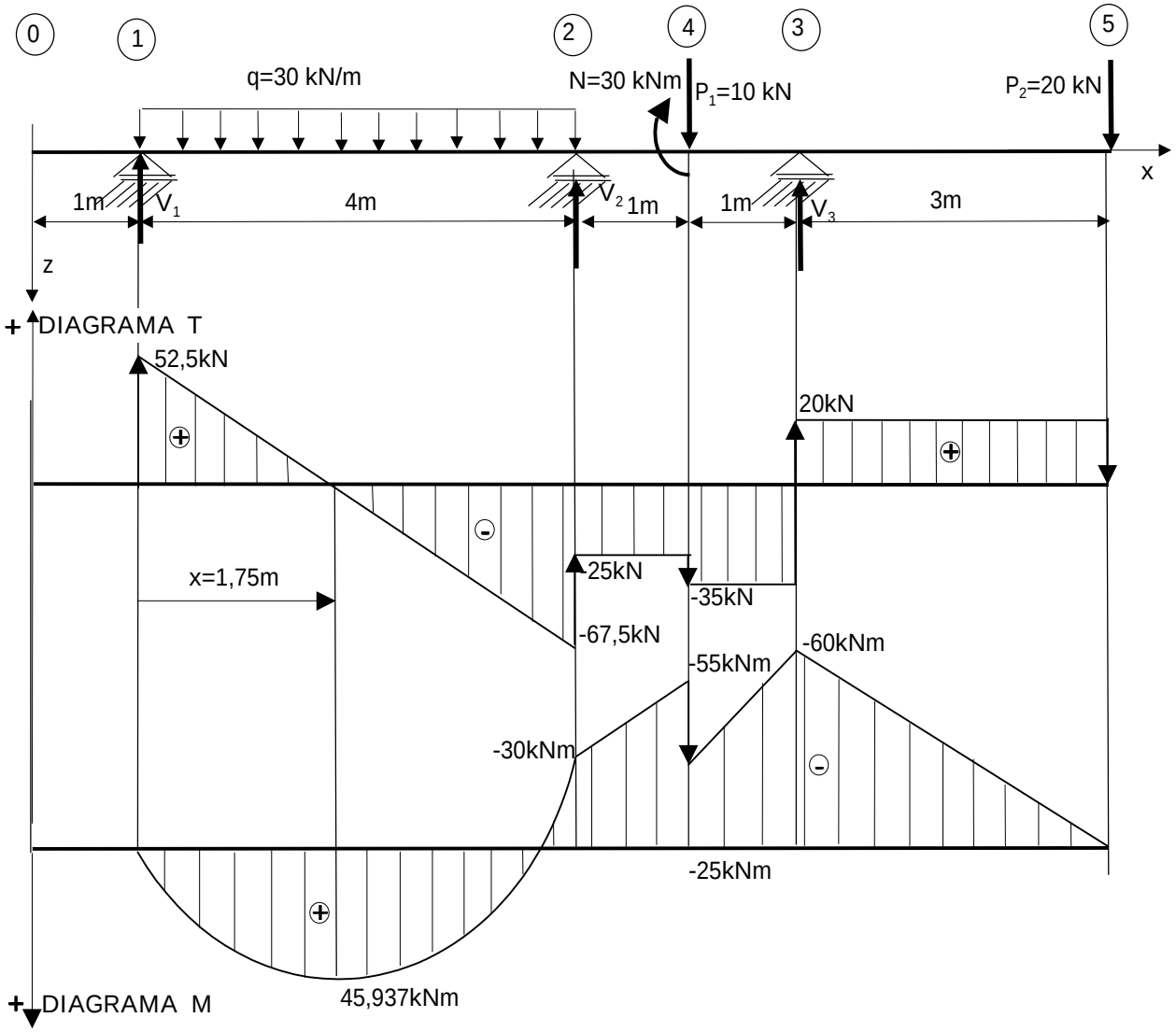
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	4	2	3	6	10	10	20	1	5	30	0	0	0	6	-30	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
0	320	586.66	4426.667	150	400	52.5	42.5	55	60	58	0.453	-7.913

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.15

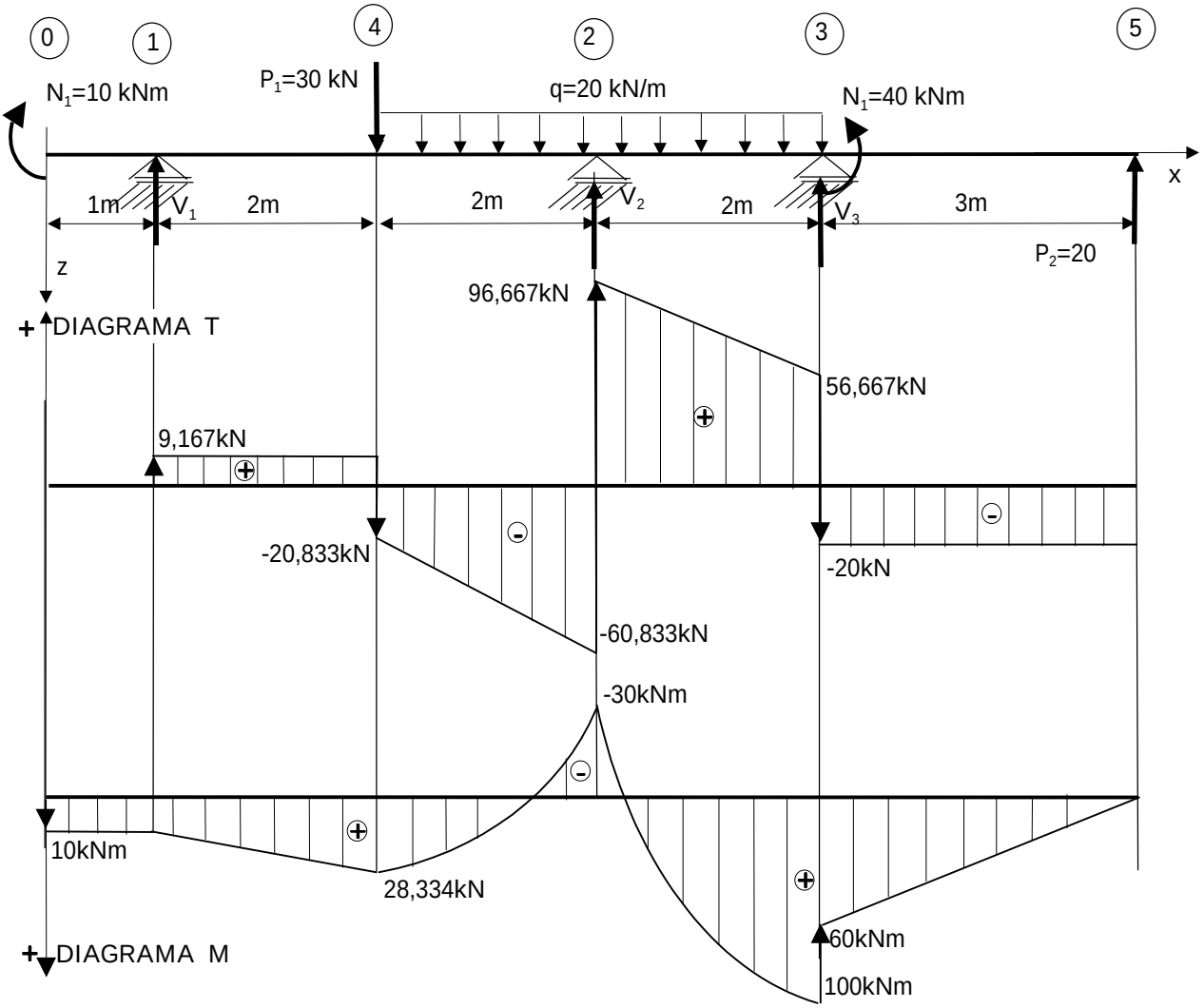
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,* σ_a*=150 MPa,E=2,1·10*^{5} *MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	4	2	3	3	30	10	-20	3	7	20	0	0	0	0	-10	7	40

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
-5	-71.66	288.33	1573.33	90	370	9.167	157.5	-76.666	100	68	0.164	-2.521

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.16

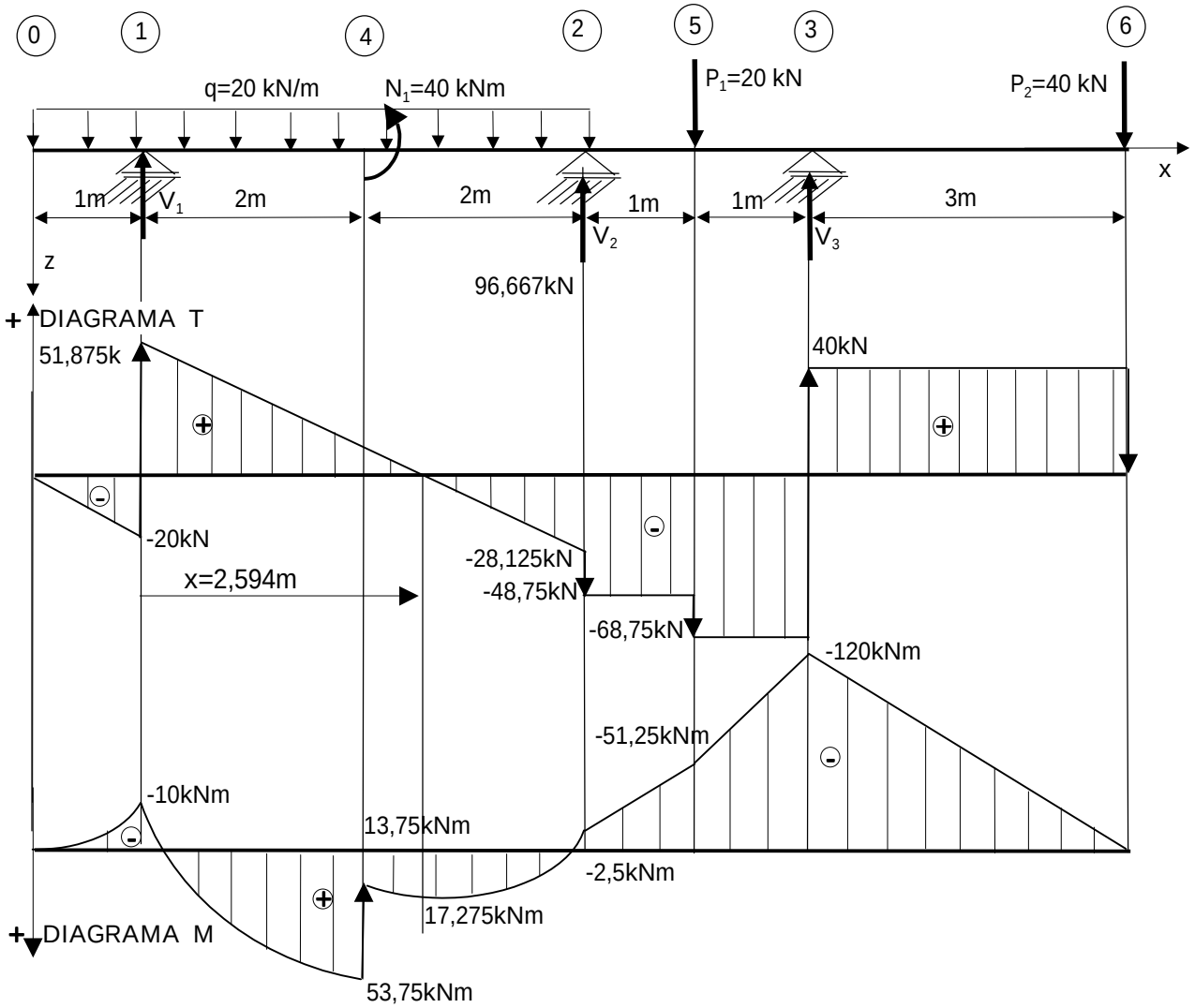
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	4	2	3	6	20	10	40	0	5	20	0	0	0	3	40	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
0.833	600.83	2310.83	5640	160	390	71.875	-20.625	108.75	120	73	0.125	-2.234

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.17

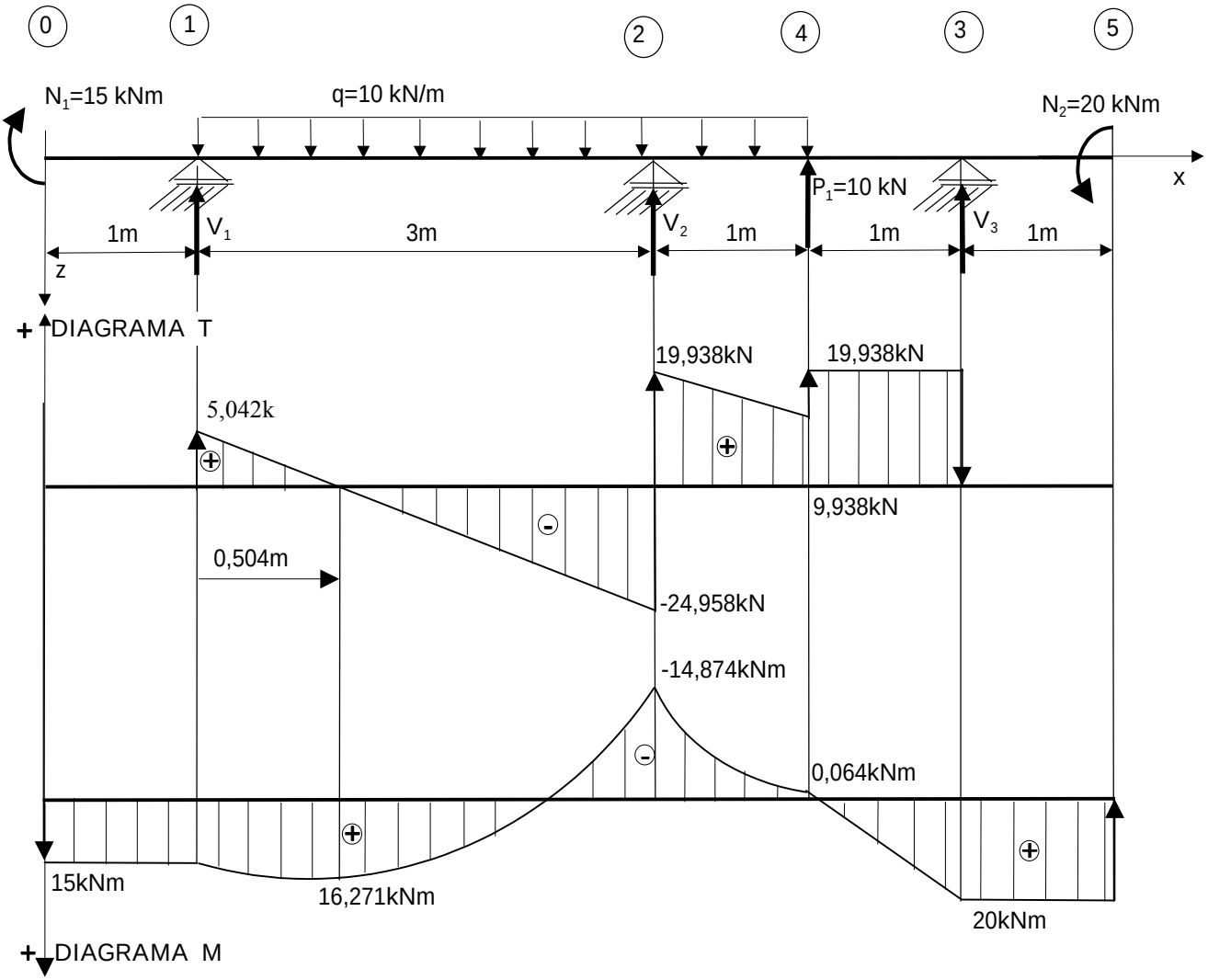
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	3	2	1	5	-10	0	0	1	5	10	0	0	0	0	-15	7	20

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
-7.5	-86.25	-11.666	381.25	30	115	5.042	44.896	-19.938	20	40	1.129	-15.34

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.18

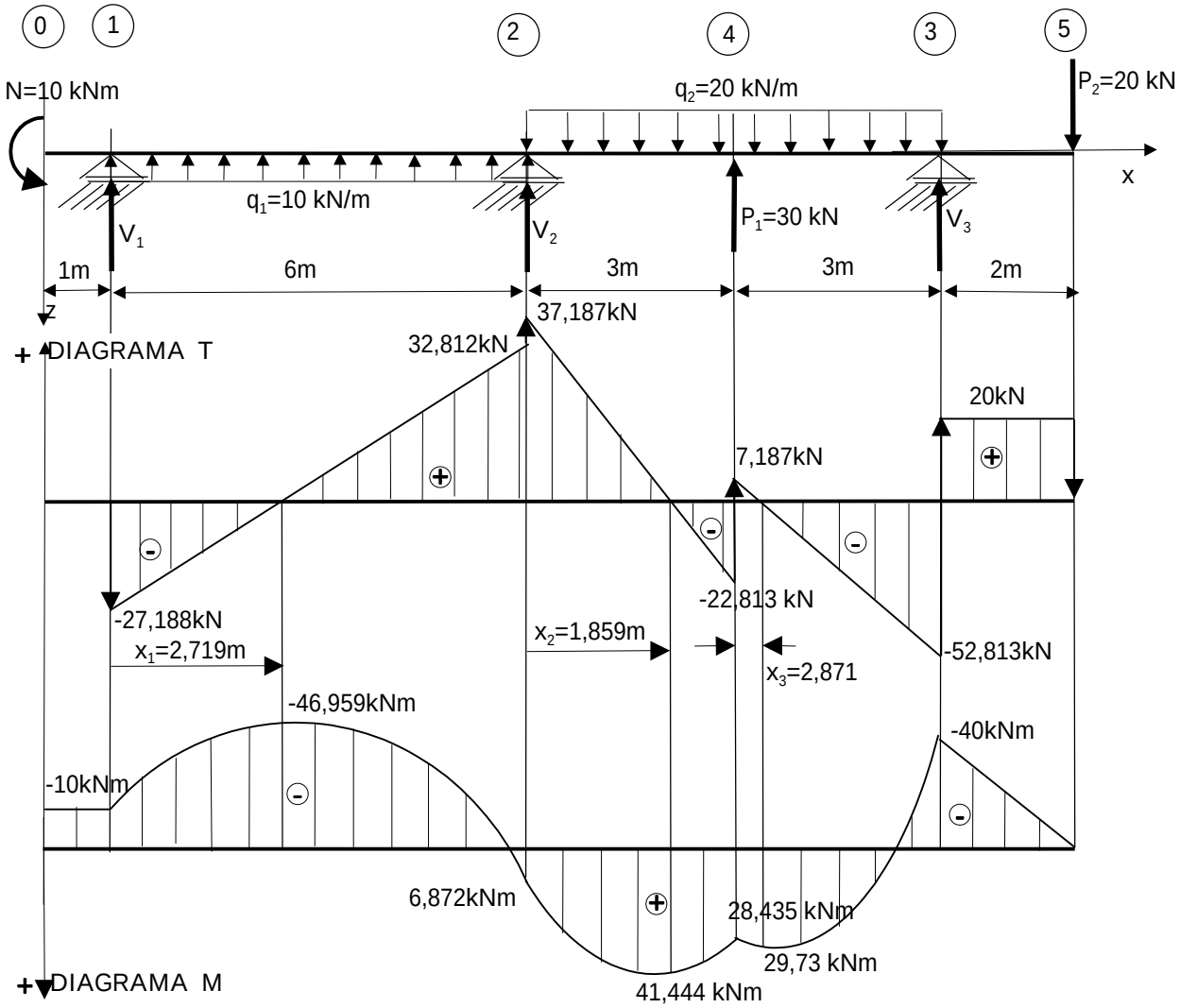
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,* σ_a*=150 MPa,E=2,1·10*^{5} *MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	2	10	-30	15	20	1	7	-10	7	13	20	0	10	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
5	-295	-6310	-34290	50	-300	-27.188	4.375	72.813	46.959	53	-1.226	20.451

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.19

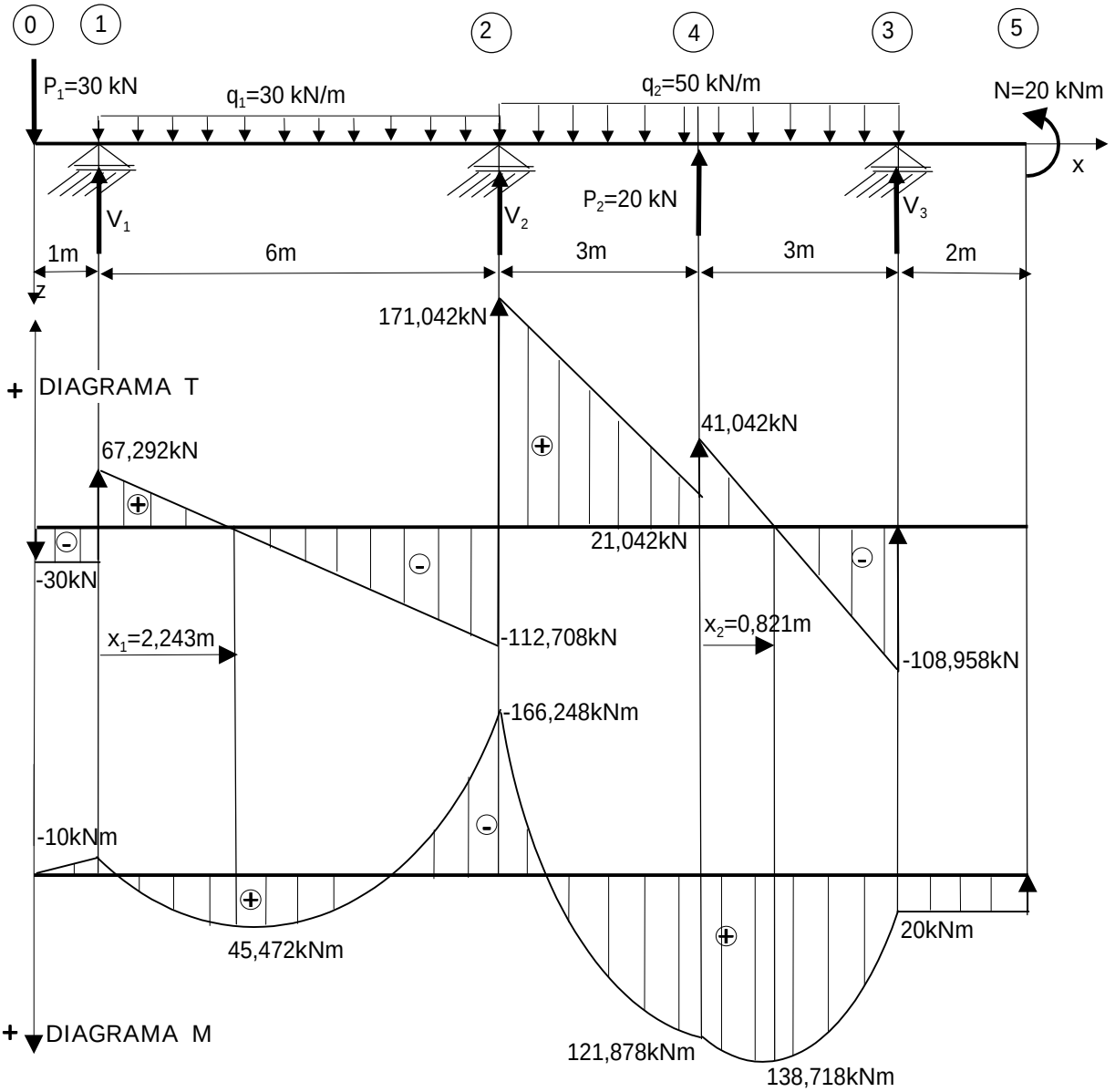
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	2	0	30	10	-20	1	7	30	7	13	50	15	20	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
5	3335	37875	187380	490	2870	97.292	283.75	108.958	166.248	81	0.057	-1.17

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.20

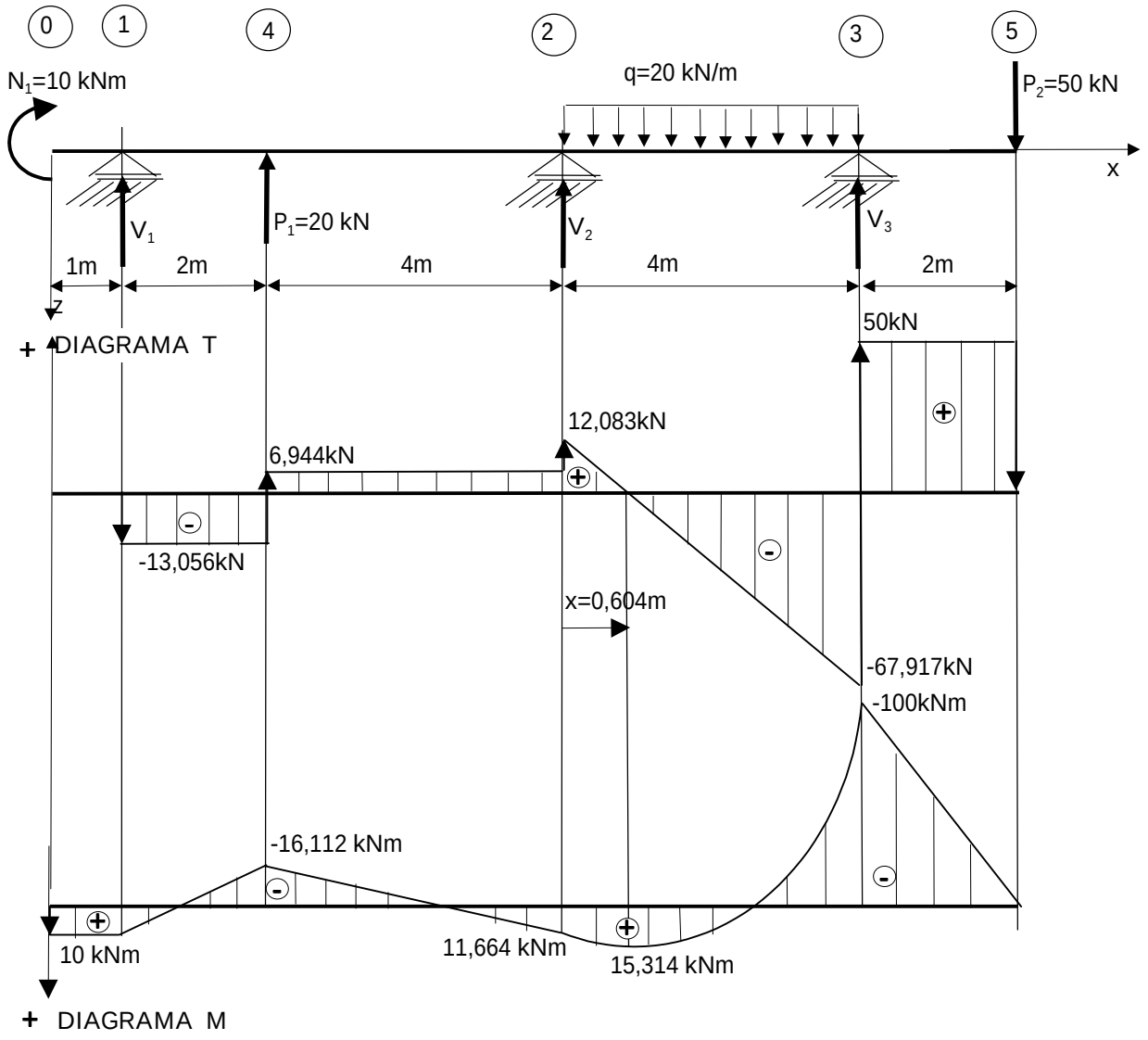
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	4	2	3	-20	13	50	7	11	20	0	0	0	0	-10	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
-5	-458.33	-2098.33	8026.667	110	-110	-13.056	5.139	117.917	100	68	-0.011	0.543

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.21

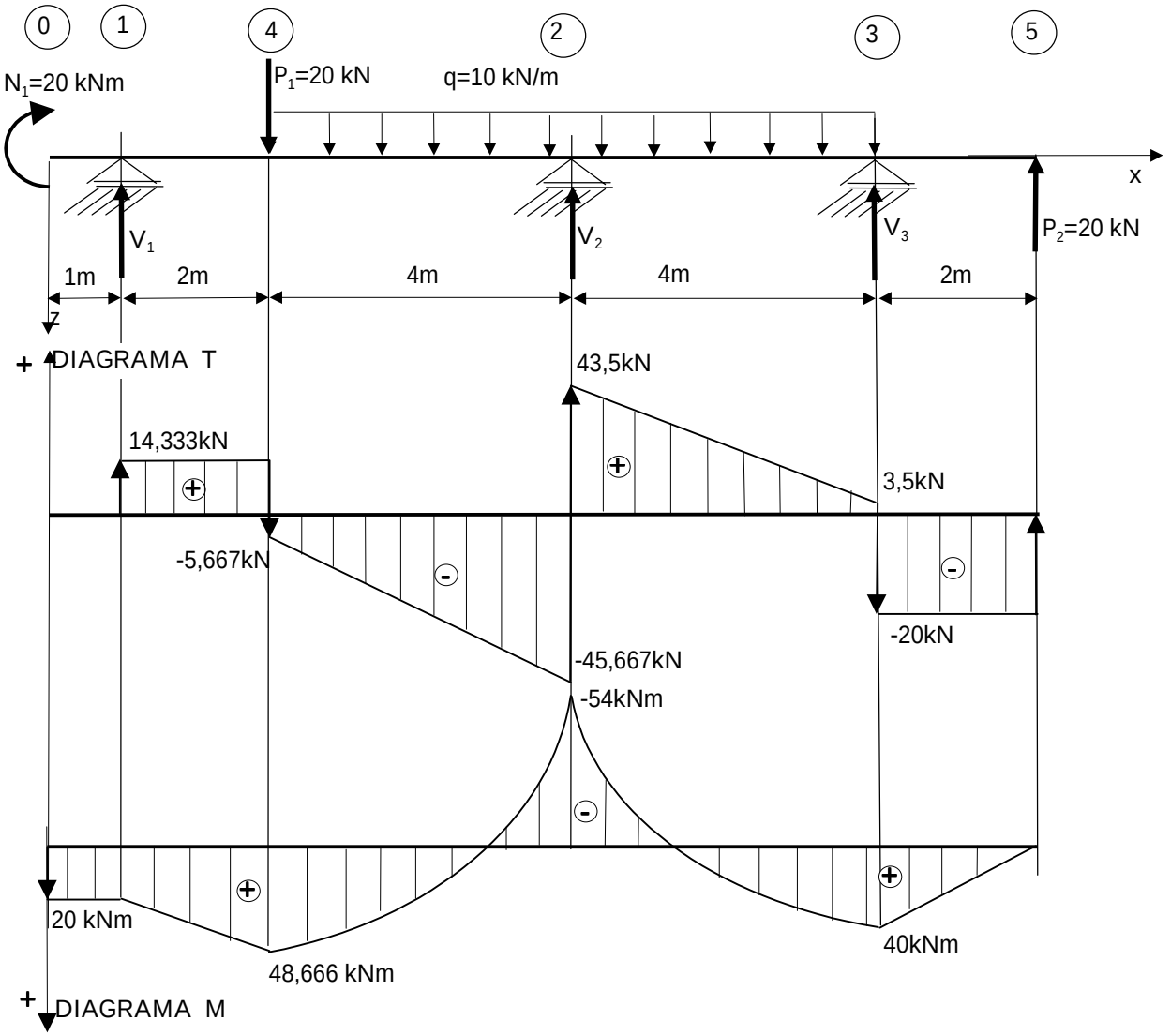
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,* σ_a*=150 MPa,E=2,1·10*^{5} *MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	4	2	3	20	13	-20	3	11	10	0	0	0	0	-20	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
-10	-170	2203.333	14880	80	500	14.333	89.167	-23.5	54	56	0.98	-15.58

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.22

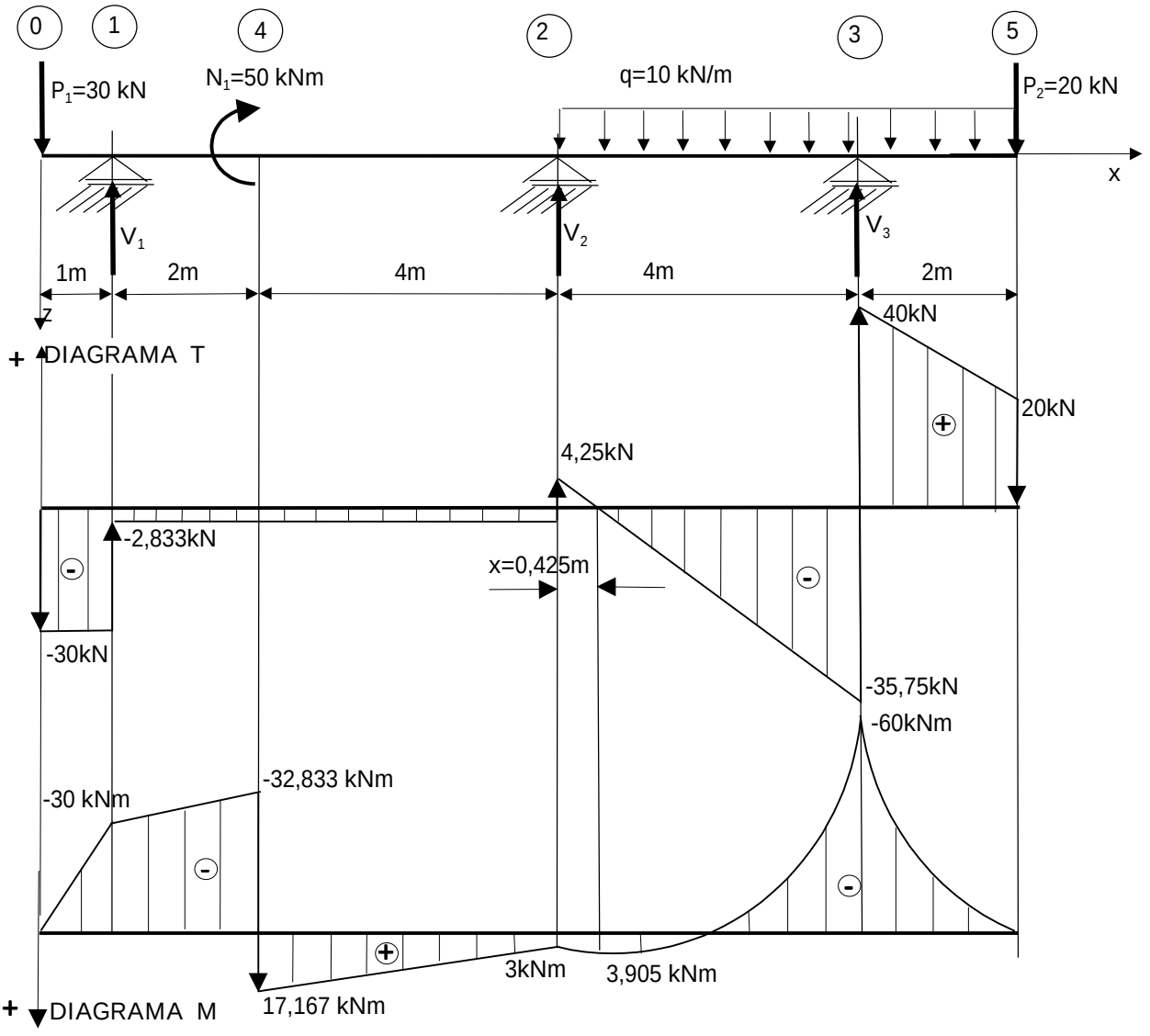
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	4	2	0	30	13	20	7	13	10	0	0	0	3	-50	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
5	1315	5161.667	17840	110	300	27.167	7.083	75.75	60	58	-0.418	6.638

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.23

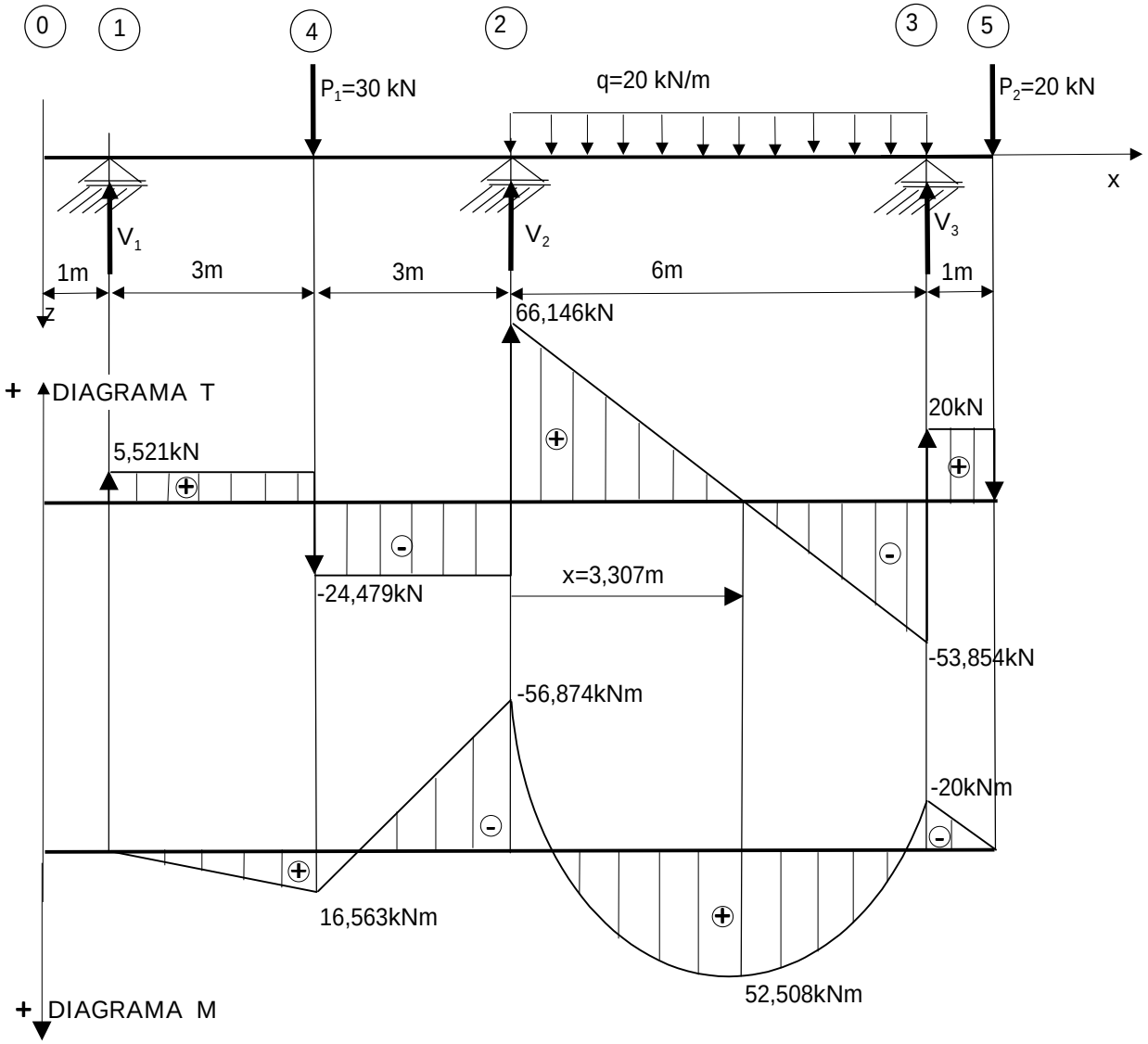
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	1	4	30	14	20	7	13	20	0	0	0	0	0	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
0	135	4725	26730	170	610	5.521	90.625	73.854	56.874	57	0.086	-1.502

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.24

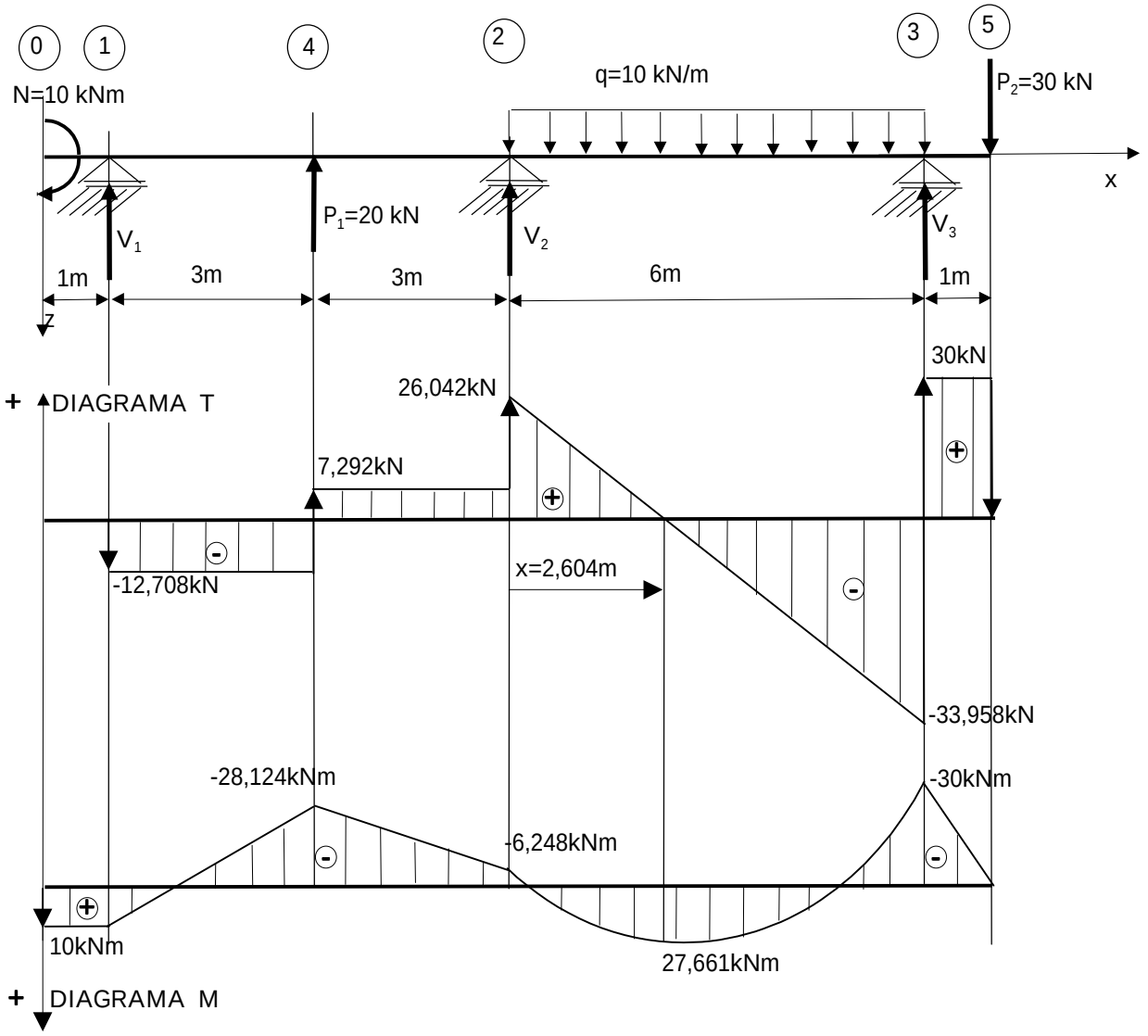
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	1	4	-20	14	30	7	13	10	0	0	0	0	-10	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
-5	-335	-2735	-12420	70	-40	-12.708	18.75	63.958	30	46	-0.406	8.75

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.25

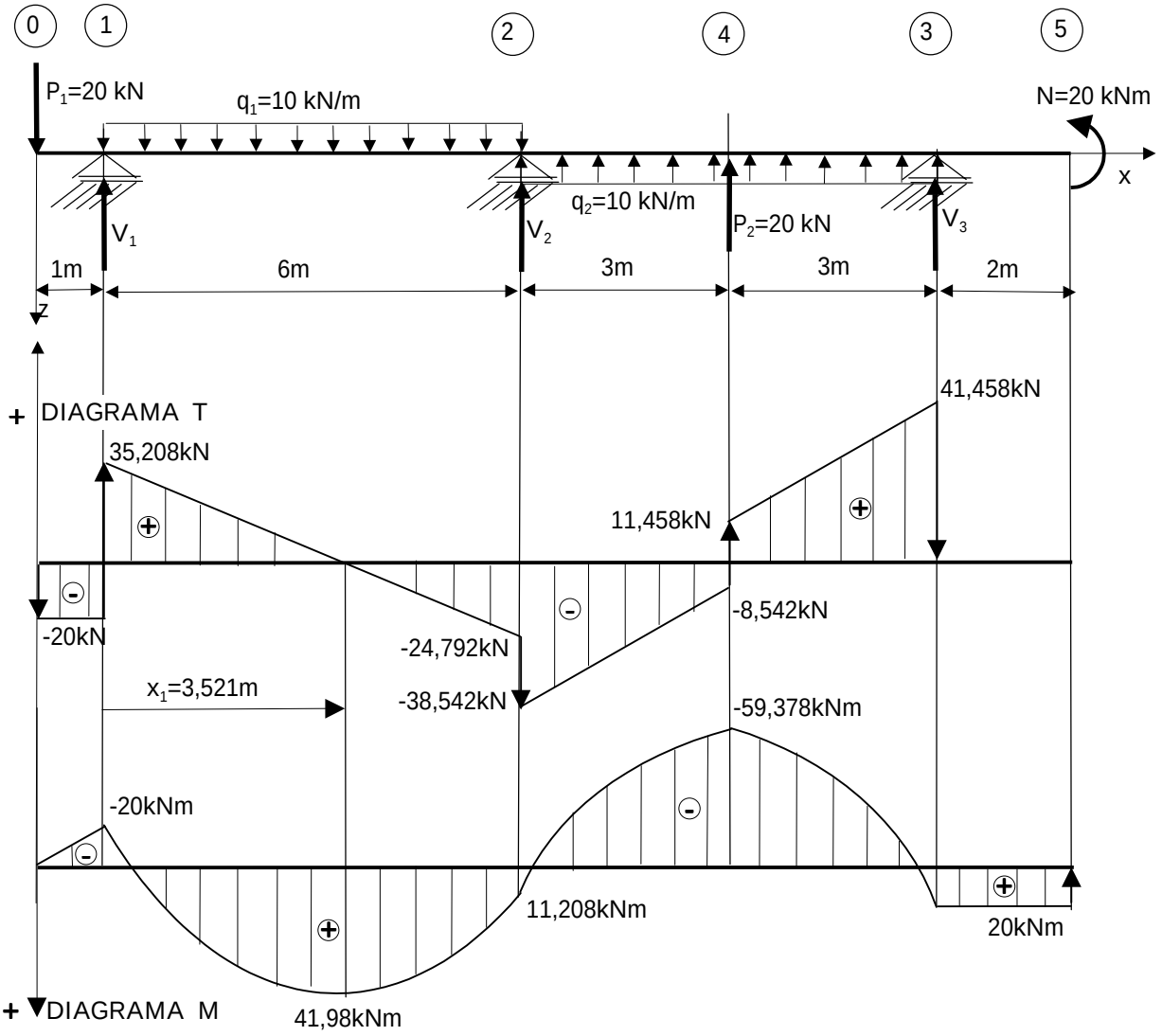
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	2	0	20	10	-20	1	7	10	7	13	-10	15	20	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
3.333	1683.33	14793.33	68580	0	580	55.208	-13.75	-41.458	59.378	58	0.387	-7.2

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.26

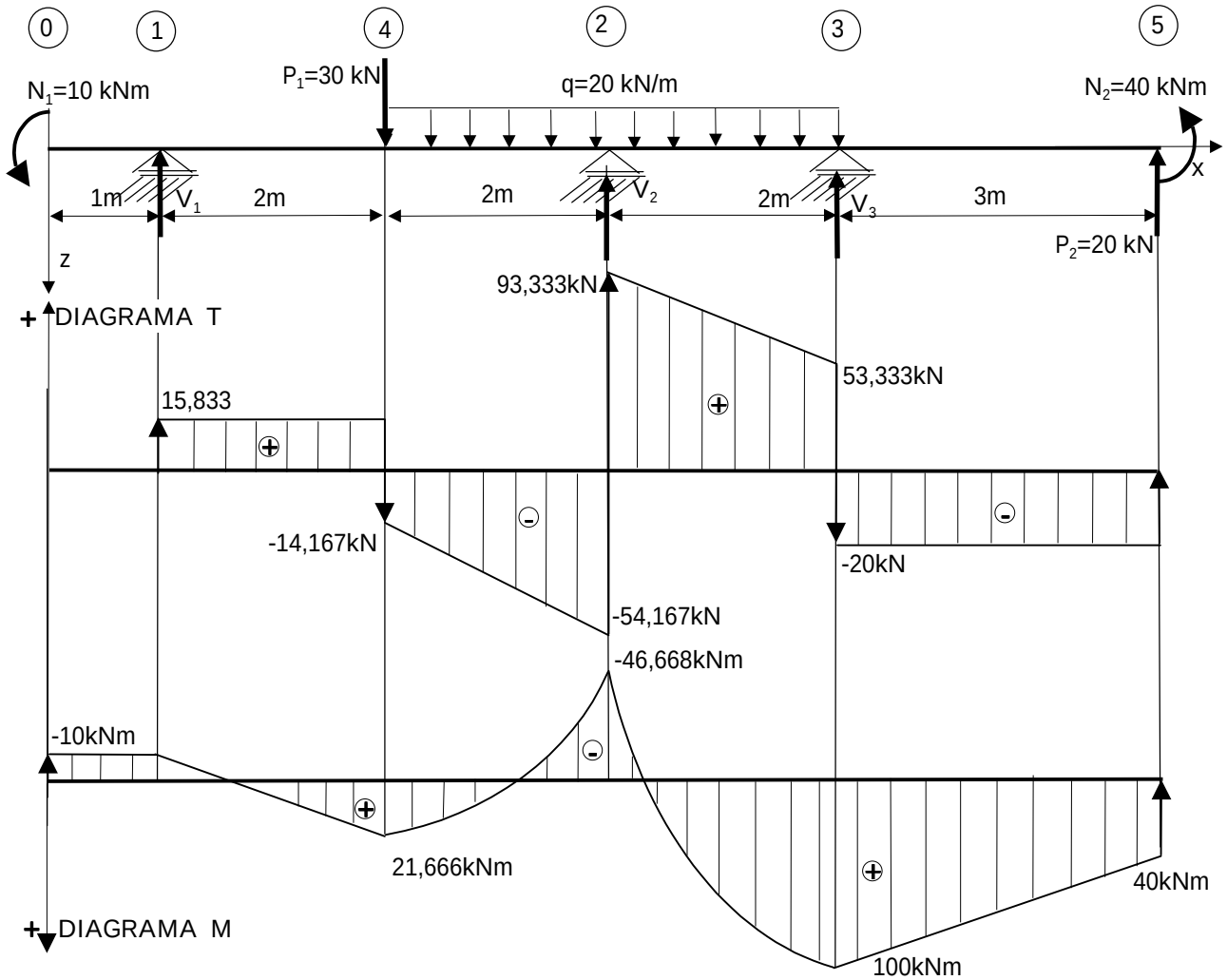
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,* σ_a*=150 MPa,E=2,1·10*^{5} *MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	4	2	3	3	30	10	-20	3	7	20	0	0	0	0	10	10	40

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
5	178.333	778.333	2053.33	90	390	15.833	147.5	-73.333	100	68	-0.004	-0.271

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.27

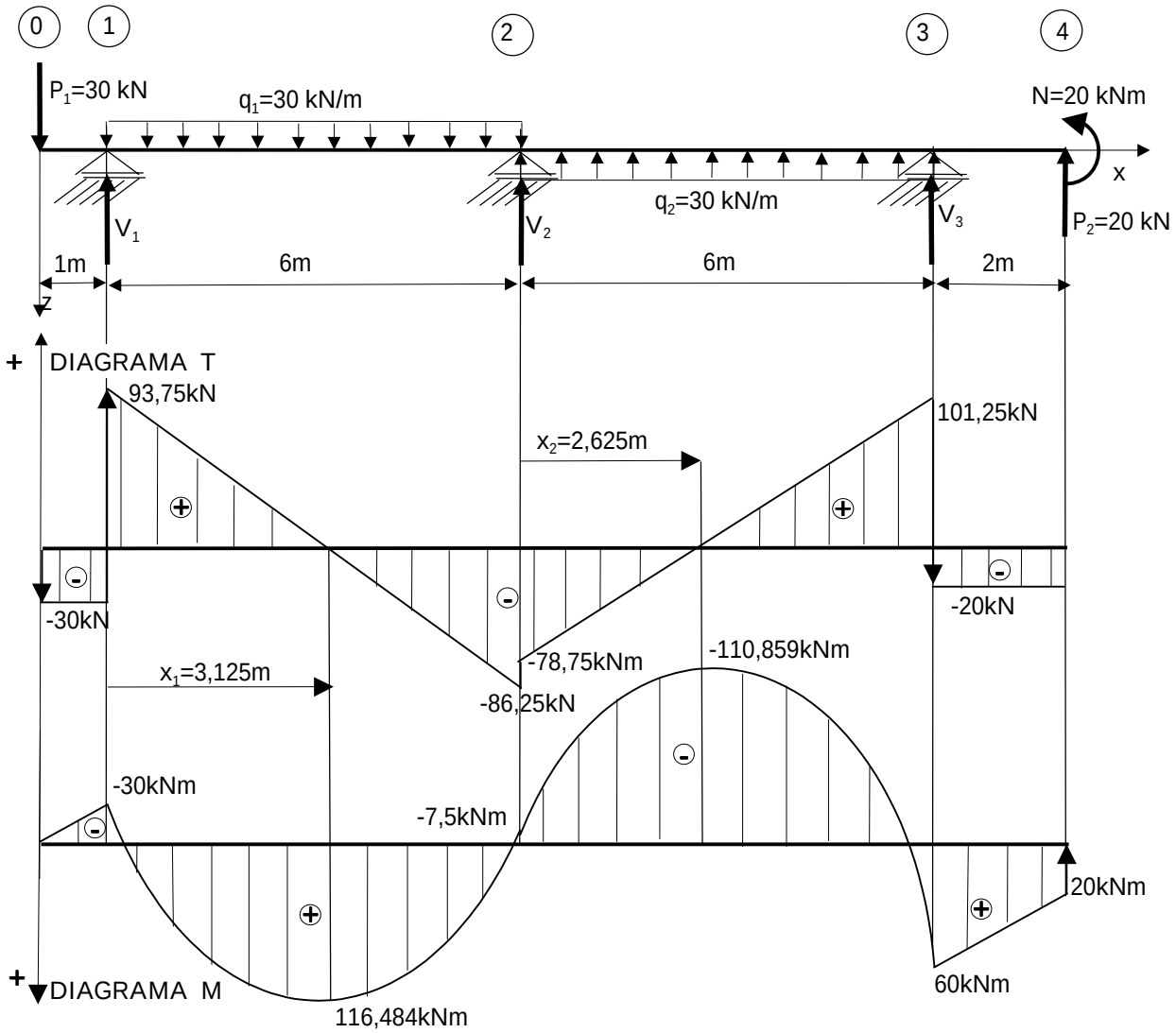
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	2	0	30	15	-20	1	7	30	7	13	-30	15	20	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
5	3335	33665	162000	10	1530	123.75	7.5	-121,25	116.484	72	0.597	-10.691

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.28

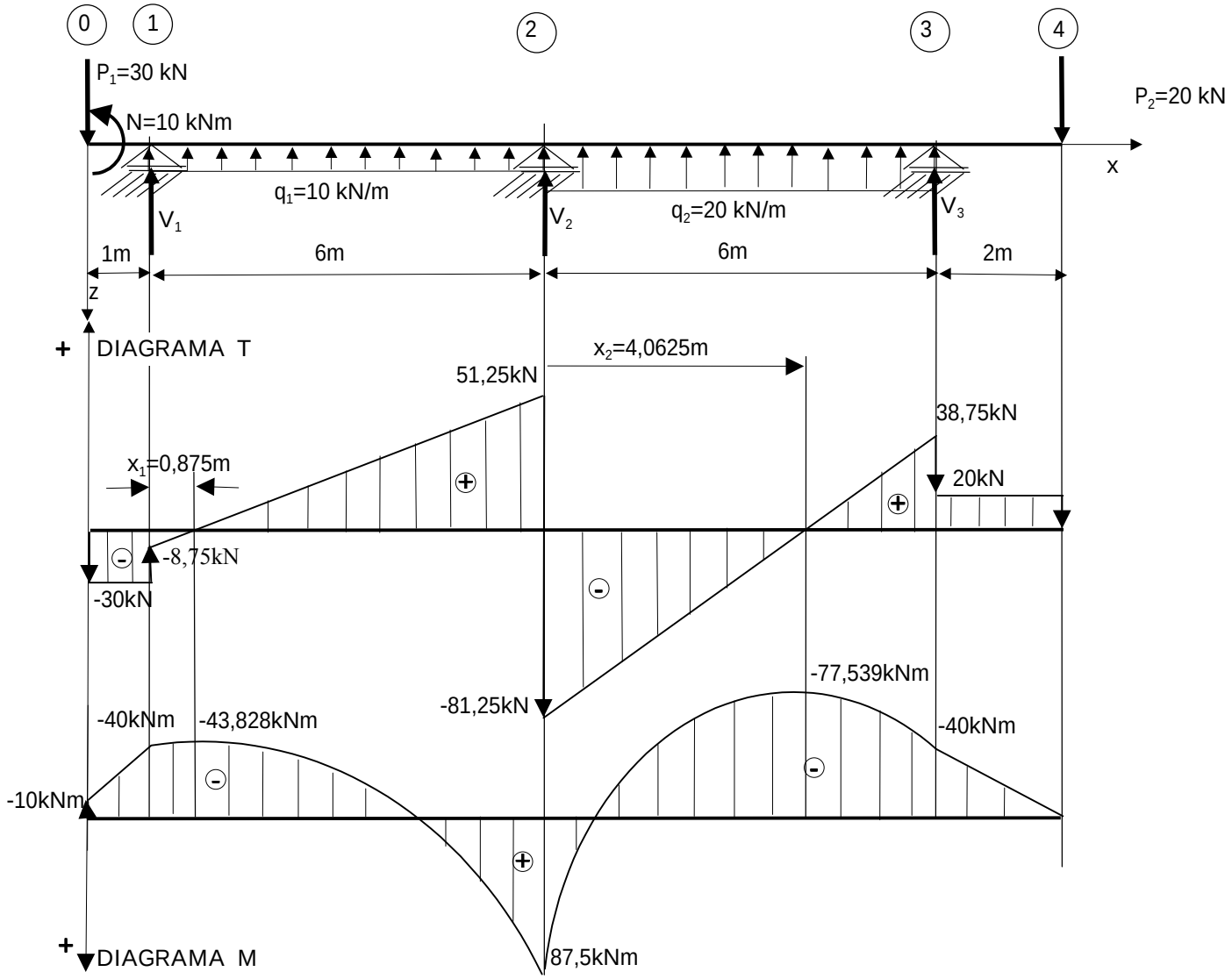
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	6	2	0	30	15	20	1	7	-10	7	13	-20	0	10	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
10	1420	2650	-1080	-130	-540	21.25	-132.5	-18.75	87.5	65	-0.515	8.152

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.29

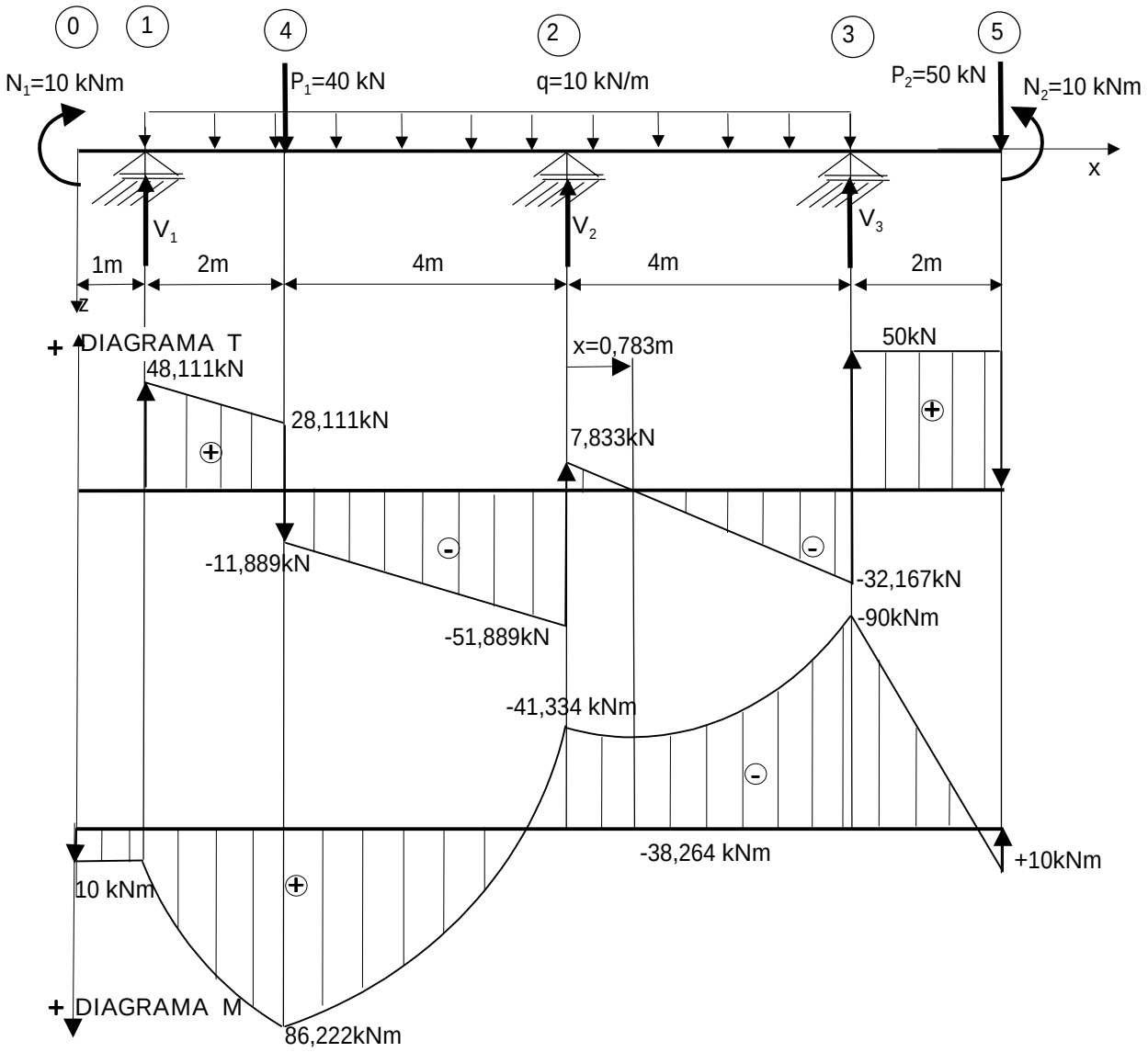
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	4	2	3	40	13	50	1	11	10	0	0	0	0	-10	13	10

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
-5	721.666	6975	34613.333	190	720	48.111	59.722	82.167	90	66	0.755	-12.786

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.30

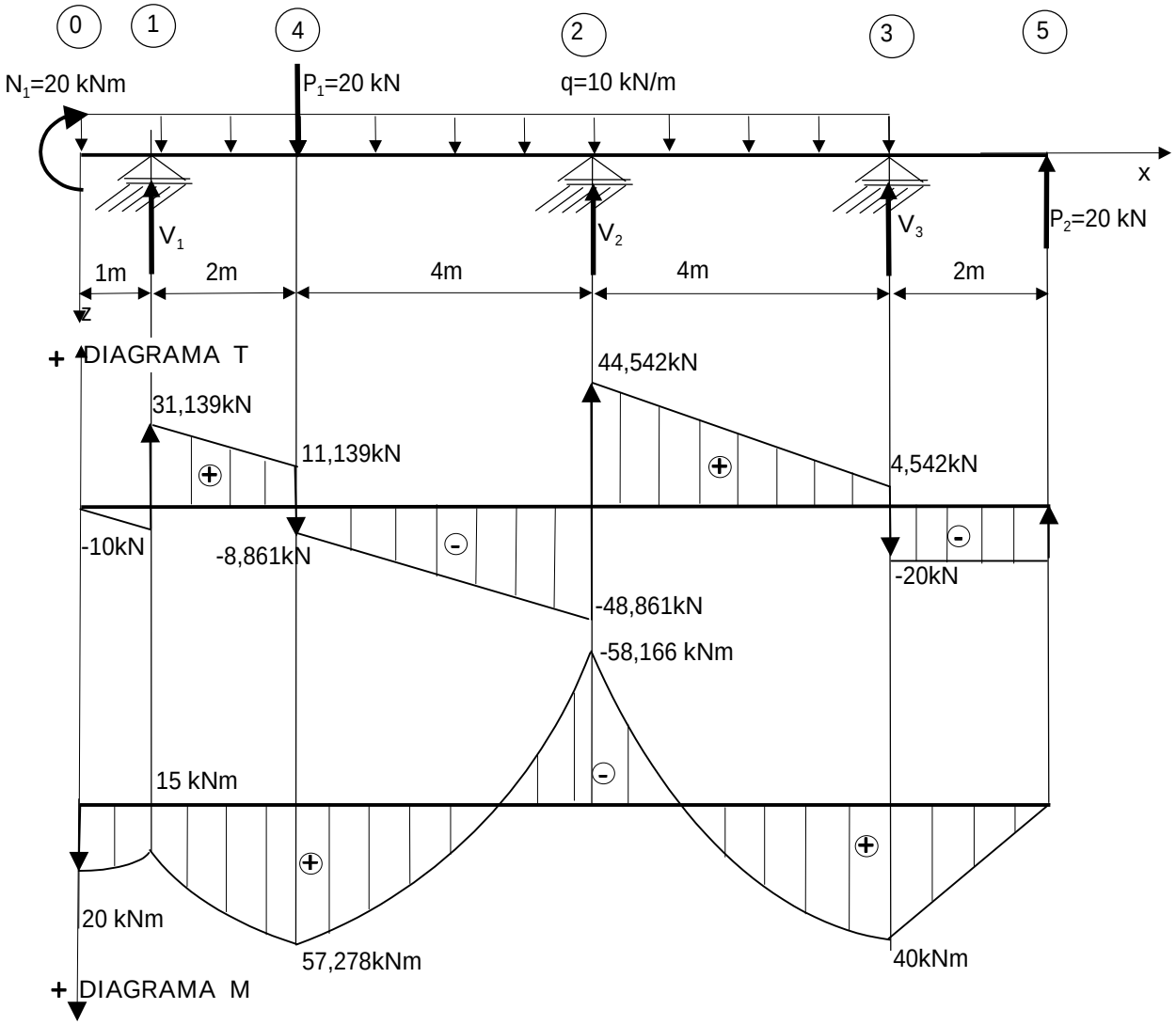
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,* σ_a*=150 MPa,E=2,1·10*^{5} *MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	4	2	3	20	13	-20	0	11	10	0	0	0	0	-20	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
-9.583	723.75	6597.083	32306.66	110	785	41.139	93.403	-24.542	58.166	57	1.009	-16.263

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



PROBLEMA 2a.31

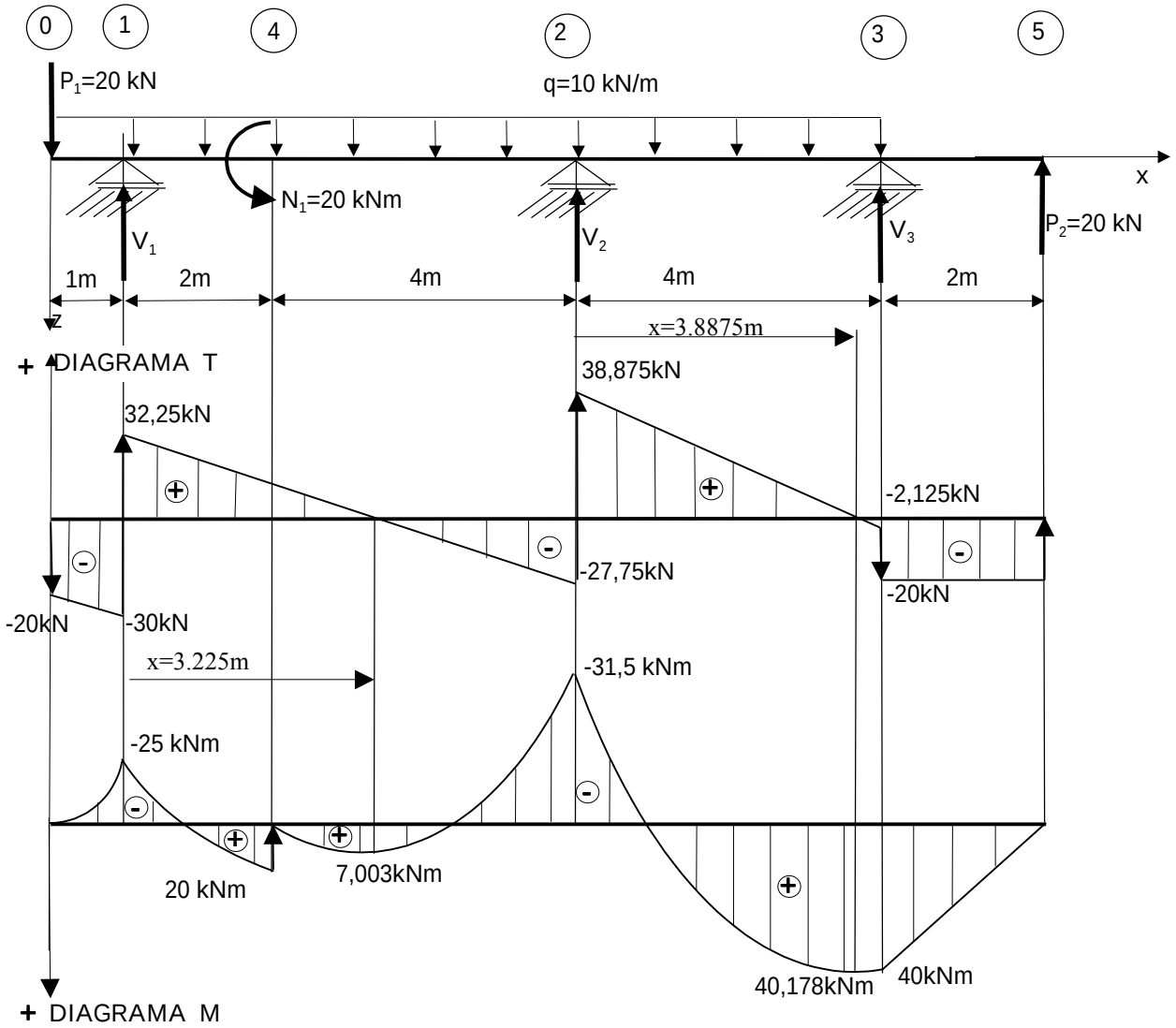
DATE DE INTRARE (*secțiunea inelară 2d×3d,σ_a=150 MPa,E=2,1·10^5 MPa*)

a	b_2	b_3	c	d_1	P_1	d_2	P_2	e_1	f_1	q_1	e_2	f_2	q_2	g_1	N_1	g_2	N_2
m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm
1	6	4	2	0	20	13	-20	0	11	10	0	0	0	3	20	0	0

REZULTATE

Φ_{1S}	Φ_{2S}	Φ_{3S}	A_{2S}	ΣY_S	ΣM_{3S}	V_1	V_2	V_3	M_{max}	d	φ_0	w_0
kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^4	kN	kNm	kN	kN	kN	kNm	mm	grade	mm
3.75	2303.75	11177	44040	110	885	62,25	65,625	-17,875	40,178	51	-0.124	1.342

SCHEMA DE ÎNCĂRCARE ŞI DIAGRAMELE T ŞI M



MODELUL 2aD

GRINDA CONTINUĂ PE TREI REAZEME PUNCTUALE RIGIDE DENIVELATE RECIPROC

Există aplicații tehnice unde se cere rezolvarea unei grinzi continue situată pe mai multe reazeme rigide denivelate; o astfel de aplicație se întâlneşte de exemplu în construcția reductoarelor sau a cutiilor de viteze unde necoaxialitatea celor trei lagăre ale arborelui (considerate ca reazeme punctuale rigide) introduce chiar la montaj o stare de tensiuni în arbore. Acest tip de probleme necesită un calcul complex, datorită faptului că reprezintă un sistem static nedeterminat.

Modelul 2aD prezintă o rezolvare pur analitică a unei astfel de aplicații folosind ca model matematic o bară dreptă secțiune constantă, situată pe trei reazeme punctuale rigide pentru care reazemul intermediar este denivelat cu $w_2 \neq 0$ (fig.2a.8), încărcată cu diferite sarcini concentrate şi distribuite uniform: bara este supusă la încovoiere simplă prin acțiunea unor *sarcini exterioare* întâlnite curent în aplicații, care sunt cunocute ca module, direcții şi poziție.

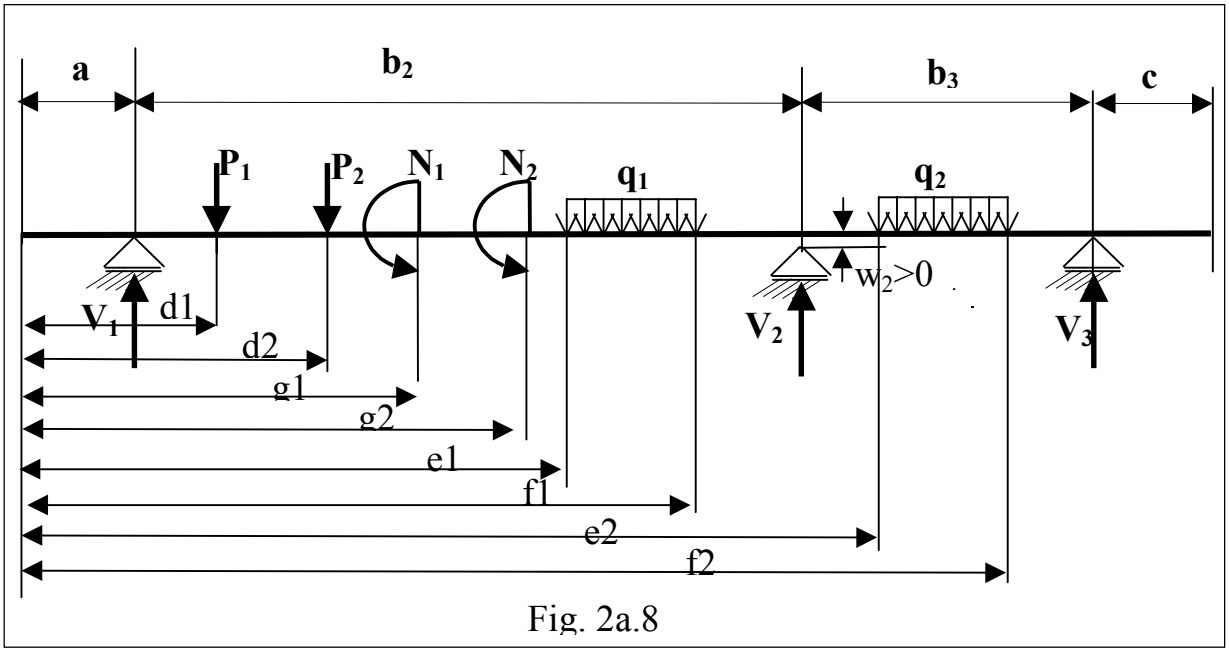


Fig. 2a.8

Conform *axiomei legăturilor* se înlocuiesc cele trei reazeme cu *reacțiunile* V_1, V_2, V_3 cunoscute ca direcție si poziție, dar necunoscute ca

module. Pentru determinarea celor 3 reacțiuni se utilizează două ecuații de echilibru a forțelor şi momentelor din Mecanică:

$$\Sigma Z_s \downarrow = V_1 + V_2 + V_3 \tag{13}$$

$$\Sigma \overleftarrow{M}_{3s} = V_1(b_2 + b_3) + V_2 b_3 \tag{14}$$

şi o ecuație care rezultă din condițiile de deformații ce trebuie să le îndeplinească bara şi anume, *ecuația celor trei săgeți* pentru reazemele 1-2-3 :

$$EI\left[w_1 b_3 - w_2(b_2 + b_3) + w_3 b_2\right] = \Phi_1 b_3 - \Phi_2(b_2 + b_3) + \Phi_3 b_2 \tag{15}$$

Dacă se înlocuiesc valorile corespunzătoare ale săgeților în rezemele punctuale rigide 1 şi 3 ($w_1=w_3=0$) se obține

$$-EIw_2(b_2 + b_3) = \Phi_{1s} b_3 - \left(\Phi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\right)(b_2 + b_3) + \left(\Phi_{3s} - \frac{V_1(b_2 + b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6}\right) b_2 \tag{16}$$

Se notează cu: $A_{2s} = \Phi_{1s} b_3 - \Phi_{2s}(b_2 + b_3) + \Phi_{3s} b_2$ şi cu: $B = EIw_2(b_2 + b_3)$

Ecuația (16) se scrie: $\frac{V_1 b_2^3 (b_2 + b_3)}{6} - \frac{V_1(b_2 + b_3)^3 b_2}{6} - \frac{V_2 b_3^3 b_2}{6} = -B - A_{2s}$ (17)

Se multiplică ecuația (14) cu $\frac{b_3^2 b_2}{6}$ şi se adună cu ecuația (17) rezultă:

$$\frac{V_1 b_2 (b_2 + b_3)}{6}\left[b_2^2 - (b_2 + b_3)^2 + b_3^2\right] = \frac{b_3^2 b_2}{6}\sum \overleftarrow{M}_{3S} - A_{3S} - B \tag{18}$$

Rezultă aşadar expresiile celor trei reacțiuni necunoscute:

$$V_1 = \frac{1}{b_2(b_2 + b_3)}\left(\frac{3(A_{2s} + B)}{b_2 b_3} - \frac{b_3}{2}\sum \overleftarrow{M}_{3s}\right) \tag{19}$$

$$V_2 = \frac{1}{b_3}\sum \overleftarrow{M}_{3s} - \left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right) V_1 \tag{20}$$

$$V_3 = \sum Z_i \downarrow - V_1 - V_2 \tag{21}$$

O primă verificare este pentru $w_2=0$ $(B=0)$ când se obțin rezultatele de la Modelul 2a. Relația folosită pentru calculul deplasării şi rotirii secțiunii din capătul barei w_0 ,φ_0 este: $EIw = EIw_0 + EI\varphi_0 x + \Phi(x)$ (22)

care se scrie pentru reazemele 1 şi 3 astfel:

$$\begin{aligned} EIw_1 &= 0 = EIw_0 + EI\varphi_0 a + \Phi_1 \\ EIw_3 &= 0 = EIw_0 + EI\varphi_0(a + b_2 + b_3) + \Phi_3 \end{aligned} \tag{23}$$

unde: $\Phi_1 = \Phi_{1s}$; $\Phi_3 = \Phi_{3s} - \frac{V_1(b_2+b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6}$ (24)

Rezultă:

$$EI\varphi_0 = \frac{1}{b_2+b_3}\left[\Phi_{1s} - \Phi_{3s} + \frac{V_1(b_2+b_3)^3}{6} + \frac{V_2 b_3^3}{6}\right]$$
$$EIw_0 = -EI\varphi_0 a - \Phi_{1s} = -\frac{a}{b_2+b_3}\left[\Phi_{1s} - \Phi_{3s} + \frac{V_1(b_2+b_3)^3}{6} + \frac{V_2 b_3^3}{6}\right] - \Phi_{1s} \quad (25)$$

Relația de verificare a rezultatelor obținute este:

$$w_2 = \frac{1}{EI}\left[EIw_0 + EI\varphi_0(a+b_2) + \Phi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\right] \quad (26)$$

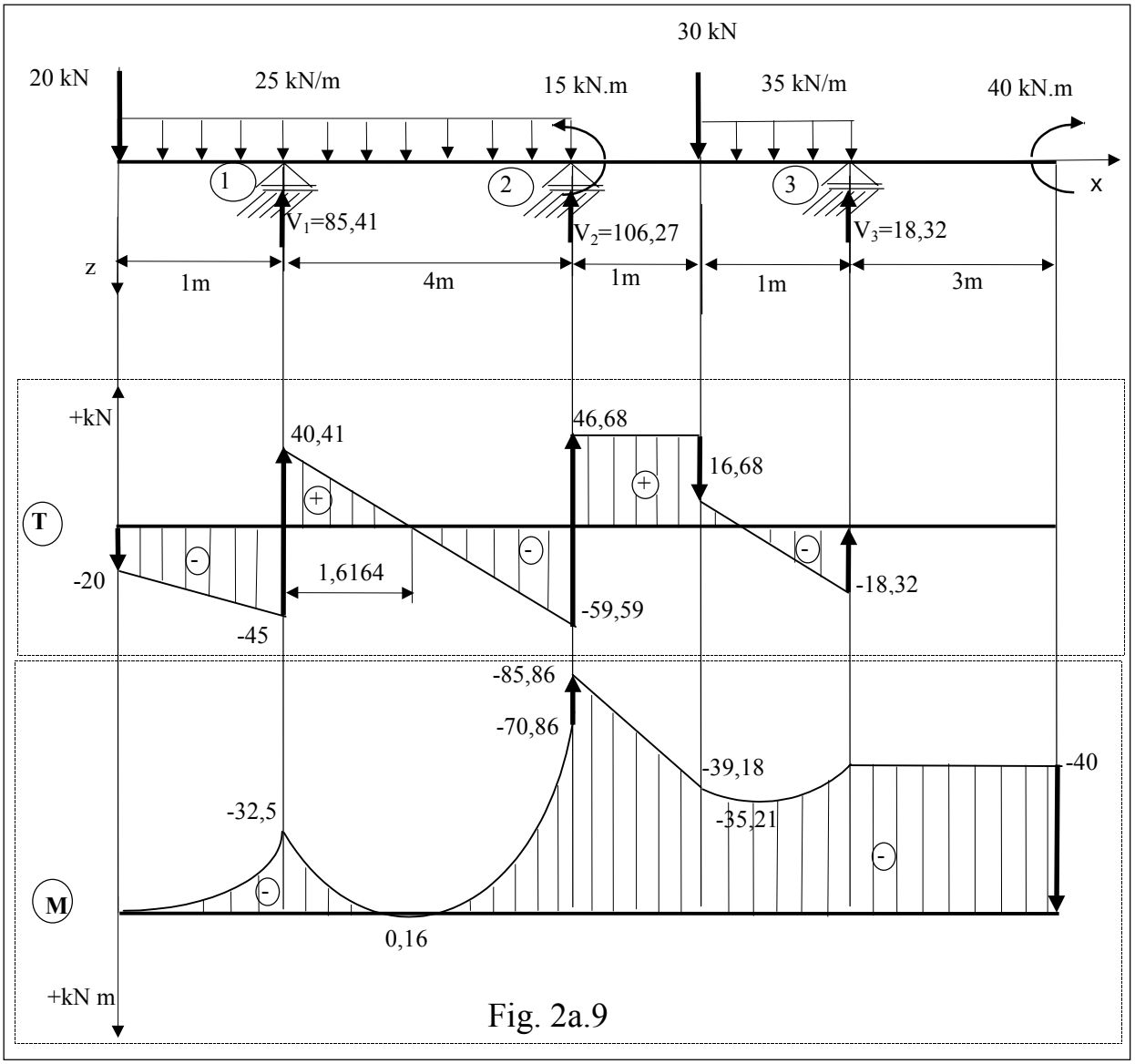


Fig. 2a.9

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 2aD UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 2aD s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
w2	**a**	**b2**	**b3**	**c**	**d1**	**P1**	**d2**	**P2**	**e1**	**f1**	**q1**	**e2**	**f2**	**q2**	**g1**	**N1**	**g2**	**N2**
mm	m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	KN/m	m	m	KN/m	m	kNm	m	kNm
-1	1	4	2	3	0	20	6	30	0	5	25	6	7	35	5	15	10	-40

DATE DE IESIRE (REZULTATE)

T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
Φ_{1S}	**Φ_{2S}**	**Φ_{3S}**	**A_{2S}**	**Z_S**	**M_{3S}**	**V_1**	**V_2**	**V_3**
CFOR	CFOR	CFOR	T*D-U*(C+D)+V*C	G+I+L*(K-J)+O*(N-M)	G*(B+C+D-F)+I*(B+C+D-H)+Q+ S+L*(K-J)*(B+C+D-(K+J)/2)+O*(N-M)*(B+C+D-(N+M)/2)	(3*(W+2.1*1e-6*AH*(C+D)/(C*D)-0.5*D*Y)/(C*(C+D))	Y/D-Z*(1+C/D)	X-Z-AA
4,375	1067,7	3664,16	8259,167	210	725	85,41	106,27	18,32

AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM
$EI\varphi_0$	**$EI\ w_0$**	**M_{max}**	**d**	**d_{ef}**	**I_{yef}**	**w_0**	**φ_0**	**w_2**	**w_1**	**w_3**
(T-V+Z*(C+D)^3/6+AA*D^3/6)/(C+D)	-B*AC-T		(AE*10e+6*96/65*3.14*150)	INT(AF)+1	65*3.14*AG^4/64	AD*1e+6/(2.1*AH)	AC*1e+3*180/(2.1*3.14*AH)	**verificare**		
-73,889	69,514	100	67,9	68	68221115	0,485	-0,03	-1	0	0

MODELUL 2aE

GRINDA CONTINUĂ PE TREI REAZEME PUNCTUALE RIGIDE ŞI ELASTICE SITUATE LA ACELAŞI NIVEL

Unele aplicații tehnice necesită rezolvarea unei grinzi continue situată pe mai multe reazeme elastice; o astfel de aplicație se întâlneşte de exemplu în transportul fluidelor prin conducte situate atât pe suporți rigizi (beton) cât şi pe suporți elastici (cabluri de ancorare, elemente elastice de susținere). Modelul 2aE propune o rezolvare analitică a acestor tipuri de aplicații folosind ca model matematic o bară dreptă secțiune constantă, situată pe două reazeme punctuale rigide şi un reazem intermediar elastic $w_2 = V_2/k \neq 0$ (fig.2a.10), încărcată cu diferite sarcini concentrate şi distribuite uniform: bara este supusă la încovoiere simplă prin acțiunea următoarelor *sarcini exterioare* întâlnite curent în aplicații, care sunt cunocute ca module, direcții şi poziție.

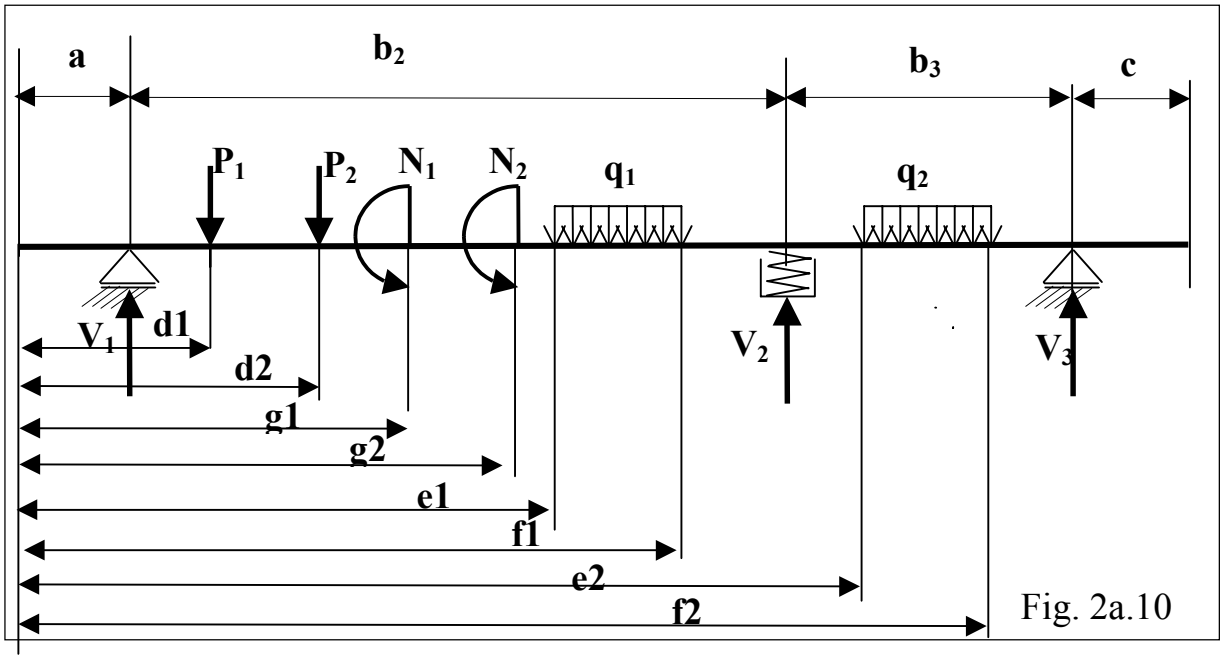


Fig. 2a.10

Pentru rezolvare se folosesc ecuațiile de echilibru din Mecanica corpului rigid:

$$\Sigma Z_s \downarrow = V_1 + V_2 + V_3 \tag{27}$$

$$\Sigma \bar{M}_{3s} = V_1(b_2 + b_3) + V_2 b_3 \tag{28}$$

A treia ecuație rezultă din condițiile de deformații ce trebuie sa le îndeplinească bara: *ecuația celor 3 săgeți* scrisă pentru reazemele 1-2-3:

$$EI\left[w_1 b_3 - w_2(b_2+b_3)+w_3 b_2\right]=\Phi_1 b_3-\Phi_2(b_2+b_3)+\Phi_3 b_2 \qquad (29)$$

unde dacă se înlocuiesc valorile săgeților în rezemele punctuale rigide şi valorile pentru funcțiile de încărcare din reazeme ca sume dintre funcțiile de încărcare ale sarcinilor exterioare*:* Φ_{1S}, Φ_{2S}, Φ_{3S} şi funcțiile de încărcare corespunzătoare ale necunoscutelor V_1, V_2 şi V_3 :

$$\Phi_1=\Phi_{1s}\ ; \qquad \Phi_2=\Phi_{2s}-\frac{V_1 b_2^3}{6}\ ; \quad \Phi_3=\Phi_{3s}-\frac{V_1(b_2+b_3)^3}{6}-\frac{V_2 b_3^3}{6}; \qquad (30)$$

se obține:

$$-EIw_2'(b_2+b_3)=\Phi_{1s}b_3-\left(\Phi_{2s}-\frac{V_1 b_2^3}{6}\right)(b_2+b_3)+\left(\Phi_{3s}-\frac{V_1(b_2+b_3)^3}{6}-\frac{V_2 b_3^3}{6}\right)b_2 \qquad (31)$$

dacă se înlocuieşte : $w_2=V_2/k$ şi se notează cu :

$$A_{2s}=\Phi_{1s}b_3-\Phi_{2s}(b_2+b_3)+\Phi_{3s}b_2 \quad \text{şi cu} \quad B=EI(b_2+b_3)/k \qquad (32)$$

atunci ecuația (31) se scrie:

$$\frac{V_1 b_2^3(b_2+b_3)}{6}-\frac{V_1(b_2+b_3)^3 b_2}{6}-\frac{V_2 b_3^3 b_2}{6}+BV_2=-A_{2s} \qquad (33)$$

Dacă se multiplică ecuația (28) cu $\left(\frac{b_3^2 b_2}{6}-\frac{B}{b_3}\right)$ şi se adună cu ecuația (33) rezultă:

$$V_1=\frac{1}{b_2(b_2+b_3)}\left(\frac{3A_{2s}}{b_2b_3+\frac{3B}{b_2b_3}}-\frac{b_3}{2}\sum\vec{M}_{3s}\cdot\frac{\frac{b_2b_3}{3}-\frac{2B}{b_3^2}}{\frac{b_2b_3}{3}+\frac{B}{b_2b_3}}\right) \qquad (34)$$

$$V_2=\frac{1}{b_3}\sum\overleftarrow{M}_{3s}-\left(1+\frac{b_2}{b_3}\right)V_1 \qquad (35)$$

$$V_3=\sum Z_i\downarrow -V_1-V_2 \qquad (36)$$

Pentru verificare se ia $w_2=0$ $(B=0)$ şi trebuie să se obțină rezultatele de la modelul 2a.

Relația folosită pentru calculul deplasării şi rotirii secțiunii din capătul barei w_0 ,φ_0 este:

$$EIw = EIw_0 + EI\varphi_0 x + \Phi(x); \qquad EI\varphi = EI\varphi_0 + \Phi'(x) \tag{37}$$

care pentru reazemele 1 şi 3, se scrie:

$$\begin{aligned} EIw_1 &= 0 = EIw_0 + EI\varphi_0 a + \Phi_1 \\ EIw_3 &= 0 = EIw_0 + EI\varphi_0 (a + b_2 + b_3) + \Phi_3 \end{aligned} \tag{38}$$

unde: $\Phi_1 = \Phi_{1s}$; $\Phi_3 = \Phi_{3s} - \dfrac{V_1(b_2 + b_3)^3}{6} - \dfrac{V_2 b_3^3}{6}$ (39)

Rezultă:

$$\begin{aligned} EI\varphi_0 &= \frac{1}{b_2 + b_3}\left[\Phi_{1s} - \Phi_{3s} + \frac{V_1(b_2 + b_3)^3}{6} + \frac{V_2 b_3^3}{6}\right] \\ EIw_0 &= -EI\varphi_0 a - \Phi_{1s} = -\frac{a}{b_2 + b_3}\left[\Phi_{1s} - \Phi_{3s} + \frac{V_1(b_2 + b_3)^3}{6} + \frac{V_2 b_3^3}{6}\right] - \Phi_{1s} \end{aligned} \tag{40}$$

Relația de verificare a rezultatelor obținute folosind această metodă sunt:

$$w_2 = \frac{1}{EI}\left[EIw_0 + EI\varphi_0(a + b_2) + \Phi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\right] = \frac{V_2}{k} \tag{41}$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 2aE UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Se consideră un caz particular al modelului 2aE pentruu care s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi algoritmul de calcul în Excel preyentat în contuinuare. Diagramele de eforturi tăietoare T(x) şi înconvoietoare M(x) pentru acest exemplu sunt date în fig. 2a.11:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
Nr	**a**	**b2**	**b3**	**c**	**d1**	**P1**	**d2**	**P2**	**e1**	**f1**	**q1**	**e2**	**f2**	**q2**	**g1**	**N1**	**g2**	**N2**
	m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	KN/m	m	m	KN/m	m	kNm	m	kNm
	1	4	2	3	0	20	6	30	0	5	25	6	7	35	5	15	10	-40

DATE DE IESIRE (REZULTATE)

T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
Φ_{1S}	**Φ_{2S}**	**Φ_{3S}**	**A_{2S}**	**Z_S**	**M_{3S}**	**V_1**	**V_2**	**V_3**
CFOR	CFOR	CFOR	T*D-U*(C+D)+V*C	G+I+L*(K-J)+O*(N-M)	G*(B+C+D-F)+I*(B+C+D-H)+Q+ S+L*(K-J)*(B+C+D-(K+J)/2)+O*(N-M)*(B+C+D-(N+M)/2)	(cf.34)	Y/D-Z*(1+C/D)	X-Z-AA
4,375	1067,7	3664,167	8259,17	210	725	111,921	26,736	71,343

AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
$EI\varphi_0$	**$EI\ w_0$**	**w_2**	**k**	**d**	**Iz**	**w_0**	**φ_0**	**B**	**w_2**
(T-U)/C +Z*C^2/6	(T-U)*B/C - T+Z*A*C^2/6	Cf.41.a							Cf.41.b
67,505	-71,88	2,674	10000	150	24850489	-1,38	0,074	31,3116	2,674

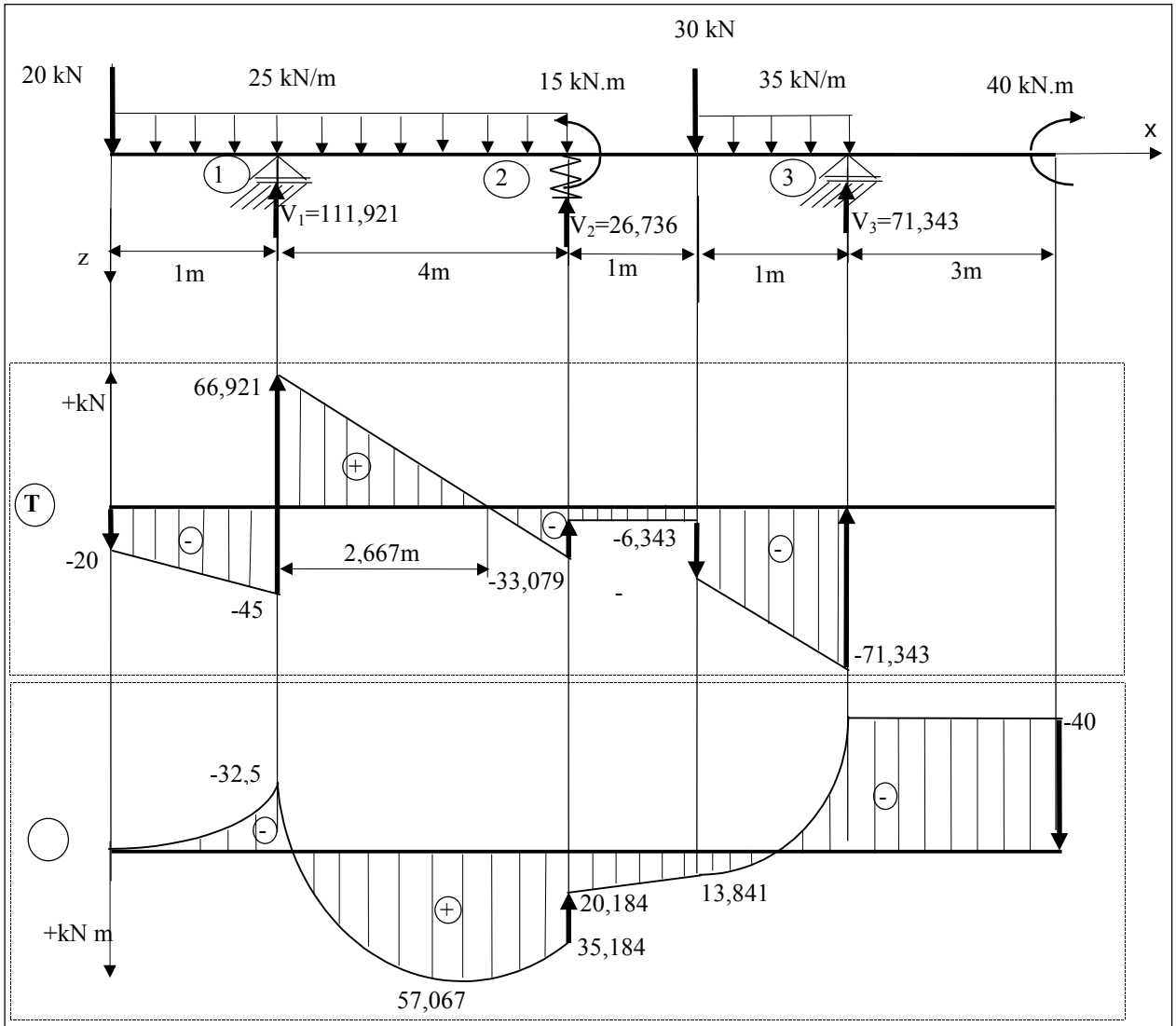


Fig. 2a.11

MODEL 2b

GRINDA CONTINUĂ PE 4 REAZEME PUNCTUALE RIGIDE LA ACELAŞI NIVEL, CU CONSOLE (4R)

Modelul prezintă rezolvarea unui caz de grindă continuă şi anume o bară dreptă de secțiune constantă, încărcată cu diferite sarcini concentrate şi distribuite uniform, situată pe 4 reazeme punctuale rigide la acelaşi nivel, având configurația generală prezentată în figura 2b.1: bara este supusă la încovoiere simplă prin acțiunea unor *sarcini exterioare* întâlnite curent în aplicații, care sunt cunocute ca module, direcții şi poziție: două forțe concentrate P_1, P_2 acționând normal pe axa barei; două sarcini uniform distribuite q_1, q_2, normale la axa barei; două cupluri concentrate N_1, N_2 dirijate după axa Oy, cunoscute ca sens şi module. Se cere să se determine reacțiunile, să se traseze diagramele de eforturi T şi M şi să se calculeze deplasarea şi rotirea capătului din stânga la barei .

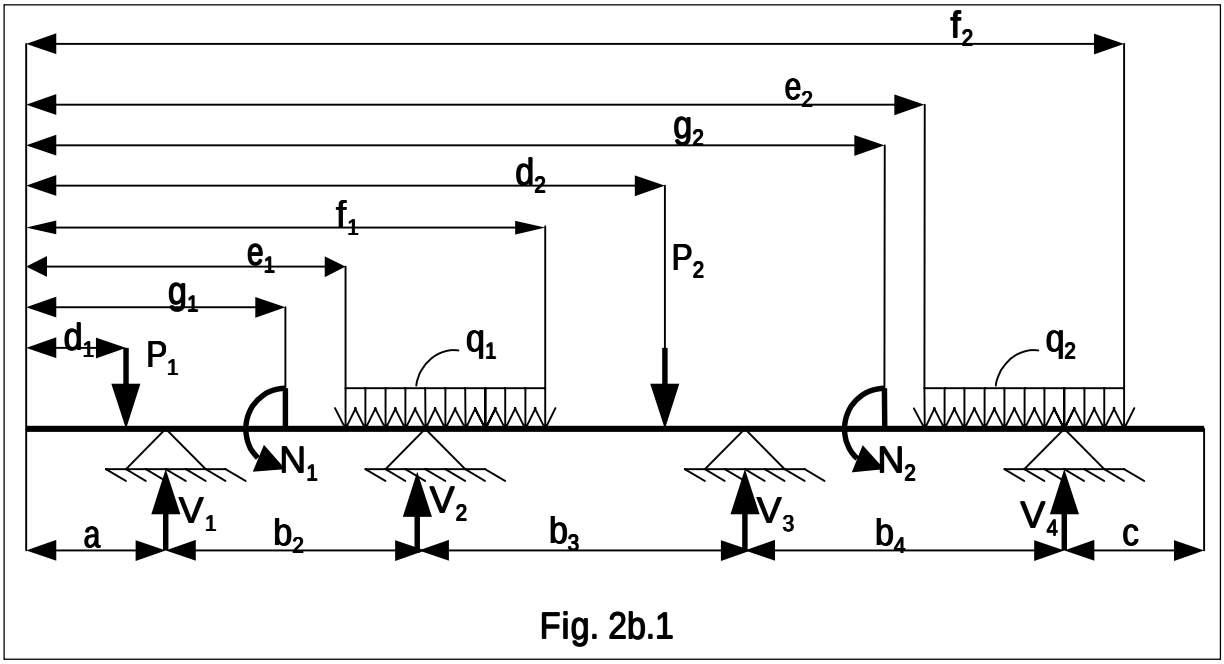


Fig. 2b.1

Conform *axiomei legăturilor* cele patru reazeme punctuale rigide prin care bara este legată de mediul fix, se înlocuiesc cu *reactiunile* V_1, V_2, V_3, V_4 cunoscute ca direcție si poziție, dar necunoscute ca module. Pentru determinarea celor 4 reacțiuni se utilizează două ecuații din Mecanică:

$$\Sigma Z_s\downarrow = V_1+V_2+V_3+V_4 \tag{1}$$

$$\Sigma M_{4s}=V_1(b_2+b_3+b_4)+V_2(b_3+b_4)+V_3(b_4) \tag{2}$$

unde ΣM_{4s} reprezintă suma momentelor tuturor sarcinilor exterioare față de reayemul 4 considerate pozitive în sens trigonometric. Celelalte două ecuații rezultă din condițiile de deformații ce trebuie sa le îndeplinească bara, care se scriu cu ajutorul ***ecuației celor trei săgeți*** pentru reazemele 1-2-3 şi 2-3-4:

$$EI\left[w_1b_3 - w_2(b_2+b_3)+w_3b_2\right] = \Phi_1b_3 - \Phi_2(b_2+b_3)+\Phi_3b_2 \tag{3}$$

$$EI\left[w_2b_4 - w_3(b_3+b_4)+w_4b_3\right] = \Phi_2b_4 - \Phi_3(b_3+b_4)+\Phi_4b_3 \tag{4}$$

în care dacă se înlocuiesc valorile săgeților din rezemele punctuale rigide (toate sunt nule) şi valorile funcțiilor de încărcare din dreptul reazemelor prin suma funcțiilor de încărcare ale sarcinilor exterioare (Φ_{1S}, Φ_{2S}, Φ_{3S}, Φ_{4S}) şi funcțiile de încărcare corespunzătoare reacțiunilor (V_1, V_2, V_3, V_4) se obține:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 = \Phi_{1s} \quad ; \qquad \Phi_2 = \Phi_{2s} - \frac{V_1b_2^3}{6} \ ; \\
&\Phi_3 = \Phi_{3s} - \frac{V_1(b_2+b_3)^3}{6} - \frac{V_2b_3^3}{6}; \\
&\Phi_4 = \Phi_{4s} - \frac{V_1(b_2+b_3+b_4)^3}{6} - \frac{V_2(b_3+b_4)^3}{6} - \frac{V_3b_4^3}{6}
\end{aligned} \tag{5}$$

Ecuațiile (3) şi (4) devin:

$$\Phi_{1s}b_3 - \left(\Phi_{2s} - \frac{V_1b_2^3}{6}\right)(b_2+b_3)+\left(\Phi_{3s} - \frac{V_1(b_2+b_3)^3}{6} - \frac{V_2b_3^3}{6}\right)b_2 = 0 \tag{3'}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\Phi_{2s} - \frac{V_1b_2^3}{6}\right)b_4 - \left(\Phi_{3s} - \frac{V_1(b_2+b_3)^3}{6} - \frac{V_2b_3^3}{6}\right)(b_3+b_4)+ \\
&+\left(\Phi_{3s} - \frac{V_1(b_2+b_3+b_4)^3}{6} - \frac{V_2(b_3+b_4)^3}{6} - \frac{V_3b_4^3}{6}\right)b_3 = 0
\end{aligned} \tag{4'}$$

Dacă notăm:

$$A_{2s} = \Phi_{1s}b_3 - \Phi_{2s}(b_2+b_3)+\Phi_{3s}b_2 \ si \ A_{3s} = \Phi_{2s}b_4 - \Phi_{3s}(b_3+b_4)+\Phi_{4s}b_3$$

atunci ecuațiile (3) şi (4) se scriu astfel

$$\frac{V_1b_2^3(b_2+b_3)}{6} - \frac{V_1(b_2+b_3)^3b_2}{6} - \frac{V_2b_3^3b_2}{6} = -A_{2s} \tag{3''}$$

$$-\frac{V_1 b_2^3}{6} b_4 + \frac{V_1 (b_2+b_3)^3 (b_3+b_4)}{6} + \frac{V_2 b_3^3 (b_3+b_4)}{6} + \\ -\frac{V_1 (b_2+b_3+b_4)^3 b_3}{6} - \frac{V_2 (b_3+b_4)^3 b_3}{6} - \frac{V_3 b_4^3 b_3}{6} = -A_{3s} \qquad (4'')$$

Dacă se multiplică ecuația (2) cu $\left(\frac{b_3 b_4}{4}\right)$ şi ecuația (4'') cu $\left(\frac{3}{2b_4}\right)$ şi se însumează, eliminând pe V_3 rezultă:

$$V_1\left[\frac{b_3 b_4}{4}(b_2+b_3+b_4) - \frac{b_2^3}{4} + \frac{(b_2+b_3)^3(b_3+b_4)}{4b_4} - \frac{(b_2+b_3+b_4)^3 b_3}{4b_4}\right] + \\ + V_2\left[\frac{b_3 b_4 (b_3+b_4)}{4} + \frac{b_3^3 (b_3+b_4)}{4b_4} - \frac{b_4^2 b_3}{4}\right] = \frac{b_3 b_4}{4}\sum M_{4S} - \frac{3A_{3S}}{3b_4} \qquad (6)$$

Dacă se multiplică ecuația (3'') cu $\left(-\frac{3(b_3+b_4)}{b_2 b_3}\right)$ şi se adună cu ecuația (6), eliminând pe V_2 rezultă :

$$V_1 = \frac{1}{b_2}\frac{\frac{3(b_3+b_4)}{b_2 b_3}A_{2S} - \frac{1{,}5}{b_4}A_{3S} + \frac{b_3 b_4}{4}\sum \overleftarrow{M}_{4S}}{b_3(0{,}75b_3+b_4)+b_2(b_3+b_4)} \qquad (7)$$

Înlocuind în relația (3'') (2) şi (1) vom obține celelalte reacțiuni :

$$V_2 = \frac{6A_{2S}}{b_2 b_3^3} - \left[\frac{b_2}{b_3}\left(2\frac{b_2}{b_3}+3\right)+1\right]\cdot V_1 \qquad (8)$$

$$V_3 = \frac{1}{b_4}\left[\sum \overleftarrow{M}_{4S} - (b_3+b_4)V_2 - (b_2+b_3+b_4)V_1\right] \qquad (9)$$

$$V_4 = \downarrow \sum Z_S - V_1 - V_2 - V_3 \qquad (10)$$

Trasarea diagramelor se face în acelaşi mod ca la Modelul 2a.

Calculul săgeții şi rotirii unei secțiuni oarecare a barei situată la distanța x de capătul din stânga se face cu ajutorul relațiilor generale:

$$EI\varphi(x) = \Phi'(x) + EI\varphi_0; \qquad EIw(x) = \Phi(x) + EI\varphi_0 x + EIv_0 \qquad (11)$$

Pentru a determina săgeata şi rotirea capătului din stânga la barei (parametrii din origine) se scrie ecuația (11) pentru reazemele 1 şi 2:

$$EIw_1 = 0 = EIw_0 + EI\varphi_0 a + \Phi_{1s}$$

$$EIw_2 = 0 = EIw_0 + EI\varphi_0 (a + b_2) + \Phi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}$$

$$\Rightarrow EI\varphi_0 = \frac{\Phi_{1s} - \Phi_{2s}}{b_2} + \frac{V_1 b_2^2}{6}; \qquad (12)$$

$$\Rightarrow EIw_0 = \frac{\Phi_{2s} - \Phi_{1s}}{b_2} \cdot a - \Phi_{1s} - \frac{V_1 b_2^2 a}{6};$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 2b UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 2b s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
a	**b2**	**b3**	**b4**	**c**	**d1**	**P1**	**d2**	**P2**	**e1**	**f1**	**q1**	**e2**	**f2**	**q2**	**g1**	**N1**	**g2**	**N2**
m	m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	KN/m	m	m	KN/m	m	kNm	m	

DATE DE IESIRE (REZULTATE)

T	U	V	W	X	Y	Z	AA
Φ_{1S}	**Φ_{2S}**	**Φ_{3S}**	**Φ_{4S}**	**A_{2S}**	**A_{3S}**	**Z_S**	**M_{4S}**
KNm^3	KNm^3	KNm^3	KNm^3	KNm^4	KNm^4	kN	kNm
CFOR	CFOR	CFOR	CFOR	T*C-U*(B+C)+V*B	U*D-V*(C+D)+W*C	G+I+L*(K-J)+O*(N-M)	Q+S+G*(A+B+C+D-F)+I*(A+B+C+D-H)+ L*(K-J)*(A+B+C+D-(K+J)/2)+ O* (N-M)*(A+B+C+D-(N+M)/2)

AB	AC	AD	AE	AF	AG
V_1	**V_2**	**V_3**	**V_4**	**$EI\varphi_0$**	**$EI\ w_0$**
kN	kN	kN	kN	KNm^2	KNm^3
(3*(C+D)*X/(B *C)-1.5*Y/D+C*D*AA/4)/(B*C*(0.75C+D)+B^2*(C+D)	6*X/(B*C^2)-AB*(1+B*(2B+C)/C^2)	(AA-(C+D)*AC-(B+C+D)*AB)	Z-AB-AC-AD	(T-U)/B+AB*B^2/6	(T-U)*A/B-T-AB*A*B^2/6

MODEL 2c

BARA DREAPTĂ ÎNCASTRATĂ LA UN CAPĂT SITUATĂ PE UN REAZEM PUNCTUAL, CU CONSOLĂ (I+R)

Modelul prezintă rezolvarea unui caz de grindă continuă şi anume o bară dreptă de secțiune constantă, încărcată cu diferite sarcini concentrate şi distribuite uniform, încastrată la un capăt şi situată pe un reazem punctual rigid la acelaşi nivel cu încastrarea, având configurația generală prezentată în figura 2c.1: bara este supusă la încovoiere simplă prin acțiunea unor *sarcini exterioare* întâlnite curent în aplicații, care sunt cunocute ca module, direcții şi poziție: două forțe concentrate P_1, P_2 acționând normal pe axa barei; două sarcini uniform distribuite q_1, q_2 , normale la axa barei; două cupluri concentrate N_1, N_2 dirijate după axa Oy, cunoscute ca sens şi module. Se cere să se determine reacțiunile, să se traseze diagramele de eforturi T şi M şi să se calculeze deplasarea şi rotirea capătului din dreapta la barei .

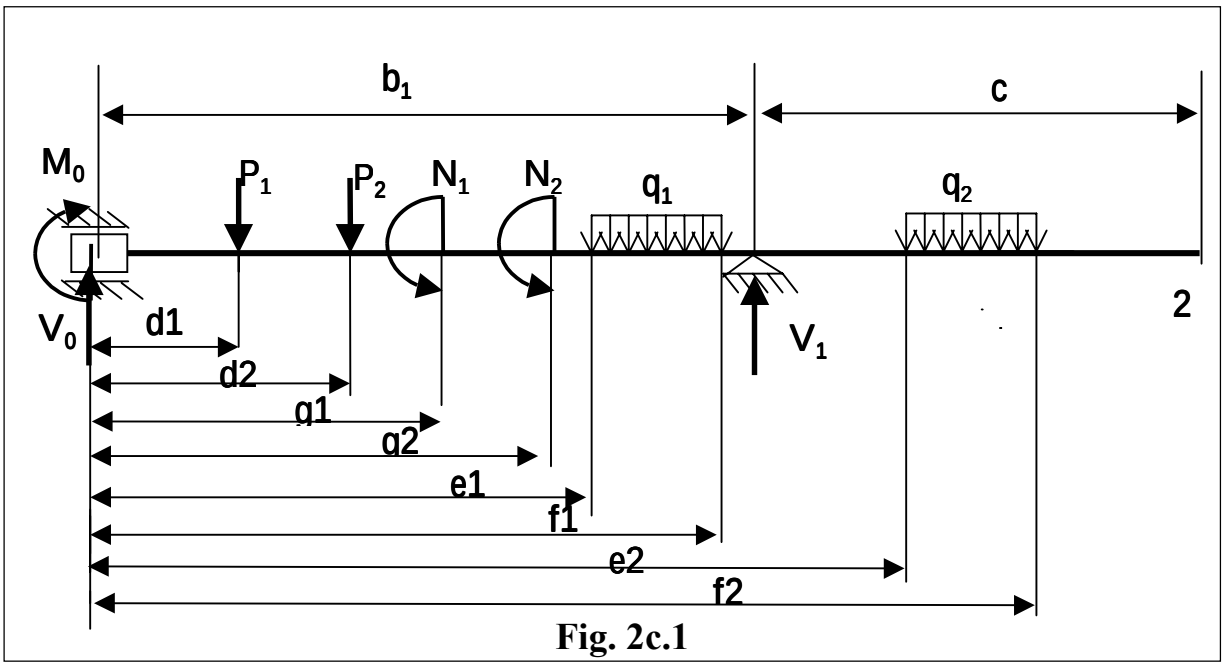


Fig. 2c.1

Conform *axiomei legăturilor* încastrarea şi reazemul punctual rigid prin care bara este legată de mediul fix, se înlocuiesc cu *reactiunile* V_0, M_0, V_1 cunoscute ca direcție si poziție, dar necunoscute ca module.

Pentru determinarea celor 3 reacțiuni se utilizează cele două ecuații din Mecanică şi o ecuație de deplasări:

$$\downarrow \Sigma Z_s = V_0 + V_1 \tag{1}$$

$$\Sigma \overleftarrow{\mathrm{M}}_{1s} = M_0 + V_0 b_1 \tag{2}$$

$$E\mathrm{I}w_1 = \Phi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6} = 0 \tag{3}$$

Din relația (2) rezultă M_0 în funcție de V_1:

$$M_0 = \Sigma \overleftarrow{M}_{1s} - V_0 b_1 \tag{2'}$$

Înlocuind (2') în relația (3) rezultă:

$$\Phi_{1s} - \frac{\left(\Sigma \overleftarrow{\mathrm{M}}_{1s} - V_0 b_1\right) b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6} = 0; \tag{4}$$

Rezultă relațiile pentru calculul celor trei reacțiuni sunt:

$$V_0 = \frac{3}{b_1}\left(\frac{\Sigma \overleftarrow{\mathrm{M}}_{1s}}{2} - \frac{\Phi_{1s}}{b_1^2}\right); \tag{5}$$

$$\mathrm{M}_0 = \frac{3\Phi_{1s}}{b_1^2} - \frac{\Sigma \overleftarrow{\mathrm{M}}_{1s}}{2} \tag{6}$$

$$V_1 = \downarrow \Sigma Z_s - \frac{3}{b_1}\left(\frac{\sum \overleftarrow{M}_{1s}}{2} - \frac{\Phi_{1s}}{b_1^2}\right) \tag{7}$$

Calculul săgeților şi rotirilor într-o secțiune oarecare a barei situată la distanta x de capătul din stânga se face cu ajutorul relațiilor generale:

$$EI\varphi(x) = \Phi'(x) + EI\varphi_0; \qquad EIw(x) = \Phi(x) + EI\varphi_0 x + EIv_0 \tag{8}$$

În cazul particular al aceastei probleme, deaorece avem $w_0=0$, $\varphi_0=0$ relațiile (8) devin: $EI\varphi(x) = \Phi'(x)$; $EIw(x) = \Phi(x)$ (9)

Deplasarea şi rotirea capătului din dreapta la barei notat cu 2 (pentru x $=b_1+c$) se detremină astfel:

$$\begin{aligned} EIw_2 &= \Phi_{2s} - \frac{M_0(b_1+c)^2}{2} - \frac{V_0(b_1+c)^3}{6} - \frac{V_1 c^3}{6} \\ EI\varphi_2 &= \Phi'_{2s} - \frac{M_0(b_1+c)}{1} - \frac{V_0(b_1+c)^2}{2} - \frac{V_1 c^2}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 2C UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 2c s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
Nr	**b1**	**c**	**d1**	**P1**	**d2**	**P2**	**e1**	**f1**	**q1**	**e2**	**f2**	**q2**	**g1**	**N1**	**g2**	**N2**

DATE DE IESIRE (REZULTATE)

R	S	T	U	V	W	X
Φ_{1S}	Φ_{2S}	M_{1S}	Φ'_{1S}	Φ'_{2S}	Z_S	M_0
CFOR	CFOR	E*(B-D)+G*(B-F)+J*(H-I)*B-(H+I)/2+M*(L-K)*(B-(L+K)/2)	CFOR	CFOR	E+G+J*(H-I)+M*(L-K)	3*R/B^2T/2

Y	Z	AA	AB	AC
V_0	V_1	$EI\varphi_1$	$EI\varphi_2$	$EI\ w_2$
3*T/(2*B)-3*R/B^3	W-3*T/(2*B)+3*R/B^3	U+X*B-Y*B^2/2	V+X*(B+C)-Y*(B+C)^2/2-Z*C^2/2	S+X*(B+C)^2/2-Y*(B+C)^3/6-Z*C^3/6

MODEL 2d

BARA DREAPTĂ ÎNCASTRATĂ LA UN CAPĂT PE DOUĂ REAZEME PUNCTUALE CU CONSOLĂ (I+2R)

Modelul prezintă rezolvarea unui caz de grindă continuă şi anume o bară dreptă de secțiune constantă, încărcată cu diferite sarcini concentrate şi distribuite uniform, încastrată la un capăt şi situată pe două reazeme punctuale rigide la acelaşi nivel cu încastrarea, având configurația generală prezentată în figura 2d.1: bara este supusă la încovoiere simplă prin acțiunea unor *sarcini exterioare* întâlnite curent în aplicații, care sunt cunocute ca module, direcții şi poziție: două forțe concentrate P_1, P_2 acționând normal pe axa barei; două sarcini uniform distribuite q_1, q_2, normale la axa barei; două cupluri concentrate N_1, N_2 dirijate după axa Oy, cunoscute ca sens şi module. Se cere să se determine reacțiunile, să se traseze diagramele de eforturi T şi M şi să se calculeze deplasarea şi rotirea capătului din dreapta la barei .

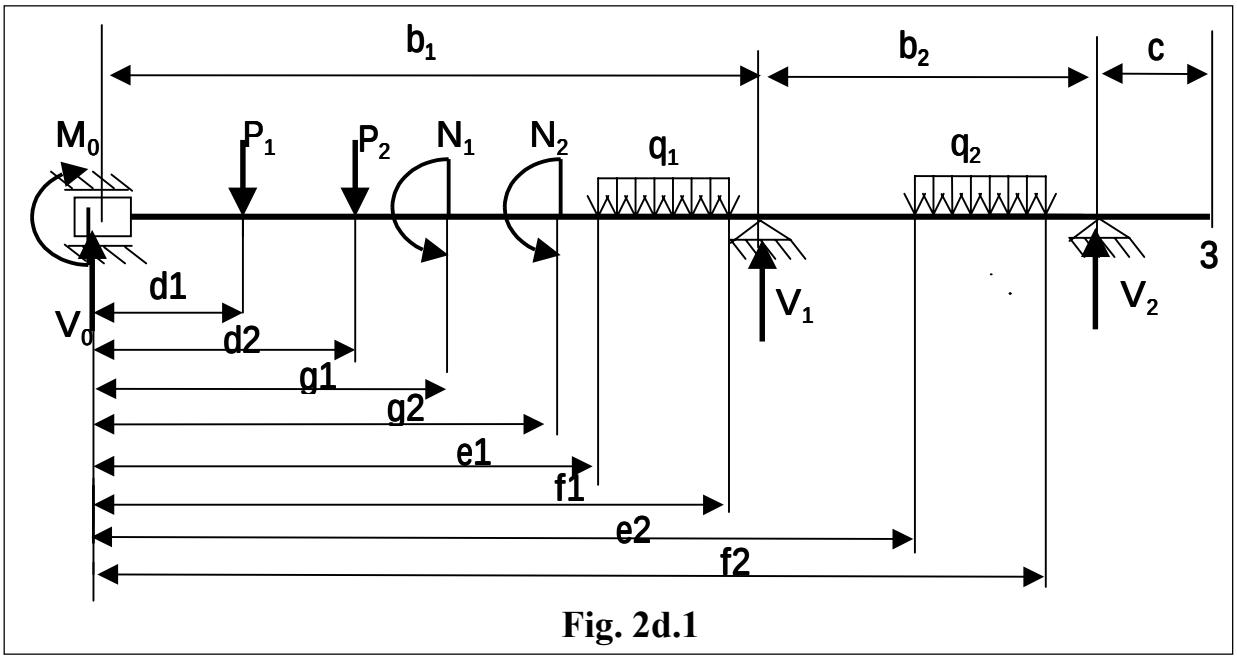


Fig. 2d.1

Conform *axiomei legăturilor* încastrarea şi reazemele punctuale rigide prin care bara este legată de mediul fix se înlocuiesc cu *reactiunile* V_0, M_0, V_1 şi V_2 cunoscute ca direcție si poziție, dar necunoscute ca module.

Pentru determinarea celor 4 reacțiuni se utilizează cele două ecuații de echilibru din Mecanică şi două ecuații de deplasări:

$$\downarrow \Sigma Z_s = V_0 + V_1 + V_2 \tag{1}$$

$$\Sigma \overleftarrow{M}_{2s} = M_0 + V_0(b_1+b_2) + V_1 b_2 \tag{2}$$

$$EIw_1 = \Phi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6} = 0 \tag{3}$$

$$EIw_2 = \Phi_{2s} - \frac{M_0 (b_1+b_2)^2}{2} - \frac{V_0 (b_1+b_2)^3}{6} - \frac{V_1 b_2^3}{6} = 0 \tag{4}$$

Se exprimă V_1 din relatia (2) şi V_0 din relația (3), în funcție de M_0:

$$V_1 = \frac{1}{b_1}\left[\Sigma M_{2s} - M_0 - V_0(b_1+b_2)\right] \tag{2'}$$

$$V_0 = \frac{1}{b_1}\left(\frac{6\Phi_{1s}}{b_1^2} - 3M_0\right) \tag{3'}$$

Înlocuind (2') şi (3') în relația (4) rezultă:

$$\Phi_{2s} - \frac{M_0 (b_2+b_2)^3}{6} - \frac{1}{b_1}\left(\frac{6\Phi_{1s}}{b_1^2} - 3\cdot M_0\right) - \frac{b_2^2}{6}\left(\Sigma \overleftarrow{M}_{2s} - \frac{b_1+b_2}{b_1}\left(\frac{6\Phi_{1s}}{b_1^2} - 3M_0\right) - M_0\right) = 0$$

$$\Phi_{2s} - M_0\left(\frac{(b_1+b_2)^2}{2} - \frac{3(b_1+b_2)(b_1+2b_2)}{6} - \frac{b_2^2}{6}\right) - \frac{\Phi_{1s}}{b_1^2}(b_1+b_2)(b_1+2b_2) - \frac{b_2^2}{6}\Sigma M_{2s} = 0$$

Din această ultimă relație rezultă M_0:

$$M_0 = \frac{6}{3b_1+4b_2}\left(\frac{\Phi_{1s}}{b_1}\left(3 + \frac{2b_2}{b_1} + \frac{b_1}{b_2}\right) + \frac{b_2}{6}\Sigma \overleftarrow{M}_{2s} - \frac{\Phi_{2s}}{b_2}\right) \tag{5}$$

Înlocuind M_0 în expresiile (3') şi (2') rezultă V_0 şi V_1:

$$V_0 = \frac{6\Phi_{1s}}{b_1^3} - \frac{18}{b_1(3b_1+4b_2)}\left(\frac{\Phi_{1s}}{b_1}\left(3 + \frac{2b_2}{b_1} + \frac{b_1}{b_2}\right) + \frac{b_2}{6}\Sigma \overleftarrow{M}_{2s} - \frac{\Phi_{2s}}{b_2}\right) \tag{6}$$

$$V_1 = \frac{1}{b_1}\left[\Sigma M_{2s} - M_0 - V_0(b_1+b_2)\right] \tag{7}$$

Din ecuația (1) rezultă reacțiunea V_2:

$$V_2 = \downarrow \Sigma Z_s - V_0 - V_1 \tag{8}$$

Calculul săgeților şi rotirilor într-o secțiune oarecare a barei situată la distanța x de capătul din stânga se face cu ajutorul relațiilor generale:

$$EI\varphi(x)=\Phi'(x)+EI\varphi_0; \qquad EIw(x)=\Phi(x)+EI\varphi_0 x+EIv_0 \tag{9}$$

Deplasarea şi rotirea capătului din dreapta la barei notat cu 3 (pentru $x=b_1+b_2+c$) se detremină astfel:

$$\begin{aligned} EIw_3 &= \Phi_{3s}-\frac{M_0(b_1+b_2+c)^2}{2}-\frac{V_0(b_1+b_2+c)^3}{6}-\frac{V_1(b_2+c)^3}{6}-\frac{V_2c^3}{6} \\ EI\varphi_3 &= \Phi'_{3s}-\frac{M_0(b_1+b_2+c)}{1}-\frac{V_0(b_1+b_2+c)^2}{2}-\frac{V_1(b_2+c)^2}{2}-\frac{V_2c^2}{2} \end{aligned} \tag{10}$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 2d UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 2d se pot utiliza formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
b1	**b2**	**c**	**d1**	**P1**	**d2**	**P2**	**e1**	**f1**	**q1**	**e2**	**f2**	**q2**	**g1**	**N1**	**g2**	**N2**

DATE DE IESIRE (REZULTATE)

R	S	T	U	V	W	X
Φ_{1S}	**Φ_{2S}**	**M_{2S}**	**Φ'_{1S}**	**Φ'_{2S}**	**Z_S**	**M_0**
CFOR	CFOR	E*(A+B-D)+G*(A+B-F)+J*(I-H)*(A+B-(I+H)/2)+M*(L-K)*(A+B-(L+K)/2)	CFOR	CFOR	E+G+J*(I-H)+M*(L-K)	6*(R*(3+2*B/A+A/B)/A+B*T/6-S/B)/(3*A+4*B)

Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE
V_0	**V_1**	**V_2**	**$EI\varphi_1$**	**$EI\varphi_2$**	**Φ_{3S}**	**EI w_3**
6*R/A^3-3*X/A	(T-X-Y*(A+B))/A	W-Z-AA	R+X*A-Y*A^2/2	S+X*(A+B)-Y*(A+B)^2/2-Z*B^2/2	CFOR	AD+X*(A+B+C)^2/2-Y*(A+B+C)^3/6-Z*(B+C)^3/6

MODELUL 2e

ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE ÎNCASTRATĂ LA AMBELE CAPETE (2I)

Modelul prezintă rezolvarea unui caz de grindă continuă şi anume o bară dreptă de secțiune constantă, încărcată cu diferite sarcini concentrate şi distribuite uniform, încastrată la ambele capete fără reazeme intermediare, având configurația generală prezentată în figura 2e.1: bara este supusă la încovoiere simplă prin acțiunea unor *sarcini exterioare* întâlnite curent în aplicații, care sunt cunocute ca module, direcții şi poziție: două forțe concentrate P_1, P_2 acționând normal pe axa barei; două sarcini uniform distribuite q_1, q_2 , normale la axa barei; două cupluri concentrate N_1, N_2 dirijate după axa Oy, cunoscute ca sens şi module. Se cere să se determine reacțiunile, să se traseze diagramele de eforturi T şi M şi să se calculeze deplasarea şi rotirea secțiunii de la mijlocul barei .

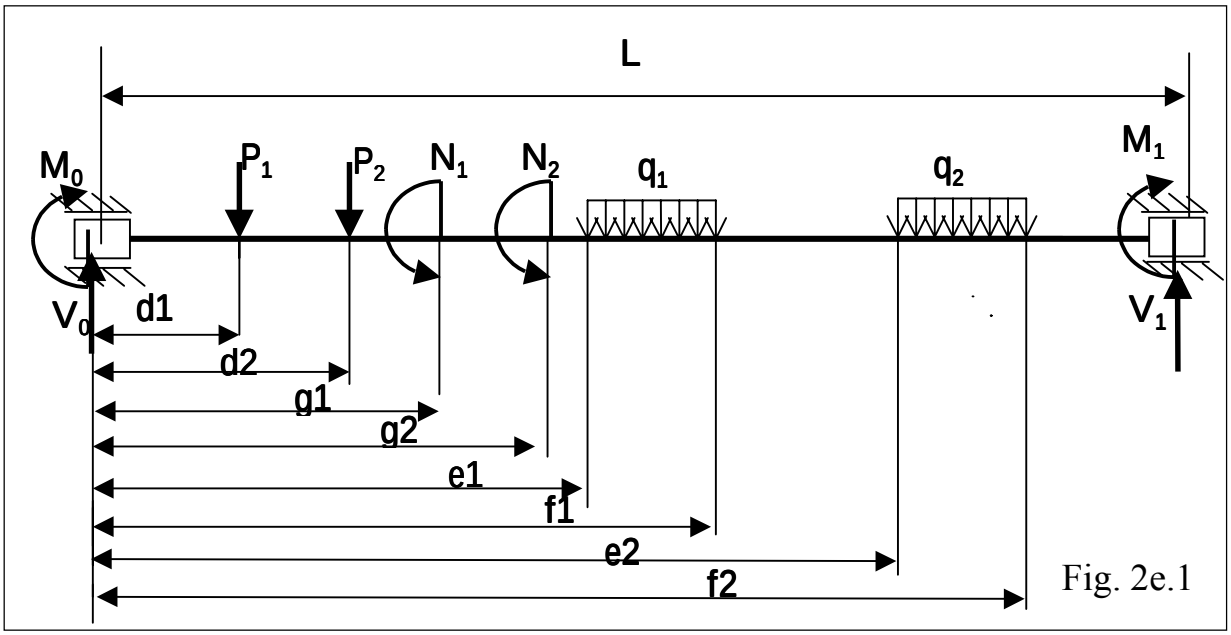


Fig. 2e.1

Conform *axiomei legăturilor* încastrarea şi reazemele punctuale rigide prin care bara este legată de mediul fix se înlocuiesc cu *reactiunile* V_0, M_0, V_1 şi M_1 cunoscute ca direcție si poziție, dar necunoscute ca module.

Pentru determinarea celor 4 reacțiuni se utilizează cele două ecuații din Mecanică şi două ecuații de deplasări:

$$\downarrow \Sigma Z_s = V_0 + V_1 \tag{1}$$

$$\Sigma \vec{M}_{1s} = M_1 + M_0 + V_0 b_1 \tag{2}$$

$$EIw_1 = 0 = \Phi_{1s} - \frac{M_0 L^2}{2} - \frac{V_0 L^3}{6} \tag{3}$$

$$EI\varphi_1 = 0 = \Phi'_{1s} - \frac{M_0 L}{1} - \frac{V_0 L^2}{2} \tag{4}$$

Din ecuațiile (3) şi (4) rezultă reacțiunile V_0 şi M_0:

$$V_0 = \frac{6}{L^2}\left(\Phi'_{1s} - \frac{2\Phi_{1s}}{L}\right) \tag{5}$$

$$M_0 = \frac{2}{L}\left(\frac{3\Phi_{1s}}{L} - \Phi'_{1s}\right) \tag{6}$$

Din relațiile (1) şi (2) rezultă reacțiunile V_1 respectiv M_1:

$$V_1 = \downarrow \Sigma Y_s - V_0 = \downarrow \Sigma Y_s - \frac{6}{L^2}\left(\Phi'_{1s} - \frac{2\Phi_{1s}}{L}\right) \tag{7}$$

$$M_1 = \sum \vec{M}_{1s} - V_0 L - M_0 = \sum \vec{M}_{1s} - \frac{4}{L}\Phi'_{1s} + \frac{6\Phi_{1s}}{L^2} \tag{8}$$

Calculul săgeților şi rotirilor într-o secțiune oarecare a barei situată la distanta x de capătul din stânga se face cu ajutorul relațiilor generale:

$$EI\varphi(x) = \Phi'(x) + EI\varphi_0; \qquad EIw(x) = \Phi(x) + EI\varphi_0 x + EIv_0 \tag{9}$$

În cazul particular al aceastei probleme, deaorece avem $w_0=0$, $\varphi_0=0$ relațiile (9) devin:

$$EI\varphi(x) = \Phi'(x); \qquad EIw(x) = \Phi(x) \tag{10}$$

Deplasarea şi rotirea secțiunii de la mijlocul barei notată cu 2 (x=L/2) se detremină astfel:

$$\begin{aligned} EIw_2 &= \Phi_{2s} - \frac{M_0 (L/2)^2}{2} - \frac{V_0 (L/2)^3}{6} \\ EI\varphi_2 &= \Phi'_{2s} - \frac{M_0 (L/2)}{1} - \frac{V_0 (L/2)^2}{2} \end{aligned} \tag{11}$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 2e UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea **Modelului 2e** s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
Nr	**L**	**b1**	**d1**	**P1**	**d2**	**P2**	**e1**	**f1**	**q1**	**e2**	**f2**	**q2**	**g1**	**N1**	**g2**	**N2**

DATE DE IESIRE (REZULTATE)

R	S	T	U	V	W	X
Φ_{1S}	Φ_{2S}	M_{1S}	Φ'_{1S}	Φ'_{2S}	Z_S	M_0
CFOR	CFOR	E*(B-D)+G*(B-F)+J*(I-H)*(B-(I+H)/2)+M*(L-K)*(B-(L-K)/2)	CFOR	CFOR	E+G+J*(I-H)+M*(L-K)	2*(3*R/B-U)/B

Y	Z	AA	AB	AC
V_0	V_1	M_1	$EI\varphi_2(L/2)$	$EI\ w_2(L/2)$
6*(U-2*R/B)/B^2	W-Y	T-Y*B-X	$\Phi'_S(L/2)+X*(L/2)-Y*(L/2)^2/2$	$\Phi_S(L/2)+X*(L/2)^2/2-Y*(L/2)^3/6$

MODELUL 2f

ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE ÎNCASTRATĂ LA CAPETE CU UN REAZEM INTERMEDIAR PUNCTUAL RIGID LA ACELAŞI NIVEL CU ÎNCASTRĂRILE (2I+R)

Modelul prezintă rezolvarea unui caz de grindă continuă şi anume o bară dreptă de secțiune constantă, încărcată cu diferite sarcini concentrate şi distribuite uniform, încastrată la ambele capete cu un reazem intermediar puncual rigid la acelaşi nivel cu încastrările, având configurația generală prezentată în figura 2f.1: bara este supusă la încovoiere simplă prin acțiunea unor *sarcini exterioare* întâlnite curent în aplicații, care sunt cunocute ca module, direcții şi poziție: două forțe concentrate P_1, P_2 acționând normal pe axa barei; două sarcini uniform distribuite q_1, q_2, normale la axa barei; două cupluri concentrate N_1, N_2 dirijate după axa Oy, cunoscute ca sens şi module. Se cere să se determine reacțiunile, să se traseze diagramele de eforturi T şi M şi să se calculeze deplasarea şi rotirea secțiunii de la mijlocul primei deschideri a barei .

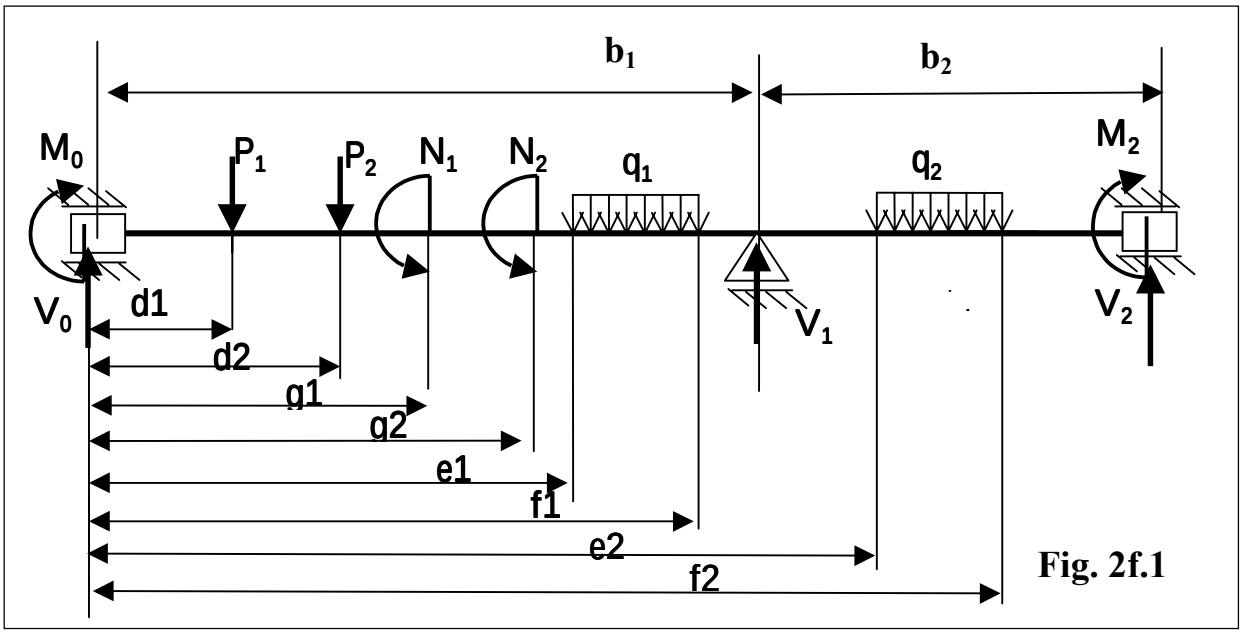


Fig. 2f.1

Conform *axiomei legăturilor* încastrarea şi reazemele punctuale rigide prin care bara este legată de mediul fix se înlocuiesc cu *reactiunile* V_0, M_0, V_1 V_2 şi M_2 cunoscute ca direcție si poziție, dar necunoscute ca module.

Pentru rezolvarea sistemului de trei ori static nedeterminat se aplică ecuațiile de echilibru din Mecanică:

$$\downarrow \Sigma Z_s = V_0 + V_1 + V_2 \tag{1}$$

$$\Sigma \vec{M}_{2s} = M_0 + M_2 + V_0(b_1+b_2) + V_1 b_2 \tag{2}$$

precum şi următoarele trei ecuații de deformații evidente:

$$EIw_1 = 0 = \Phi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6} \tag{3}$$

$$EIw_2 = 0 = \Phi_{2s} - \frac{M_0 (b_1+b_2)^2}{2} - \frac{V_0 (b_1+b_2)^3}{6} - \frac{V_1 b_2^3}{6} \tag{4}$$

$$EI\varphi_2 = 0 = \Phi'_{2s} - \frac{M_0 (b_1+b_2)}{1} - \frac{V_0 (b_1+b_2)^2}{2} - \frac{V_1 b_2^2}{2} \tag{5}$$

Din ecuația (3) rezultă M_0 în funcție de V_0:

$$M_0 = \frac{1}{3b_1^2}(6\Phi_{1s} - V_0 b_1^3) \tag{3'}$$

Se introduce relația (3') în ecuațiile (4) şi (5) rezultând un sistem cu două necunoscute V_0 şi V_1, care conduce la:

$$V_0 = \frac{3}{b_1}\left(\frac{3\Phi_{2s}}{b_2(b_1+b_2)} - \frac{\Phi'_{2s}}{(b_1+b_2)} - \frac{\Phi_{1s}(b_2+3b_1)}{b_1^2 b_2} \right) \tag{6}$$

$$M_0 = \frac{2\Phi_{1s}}{b_1^2} - \frac{3\Phi_{2s}}{b_2(b_1+b_2)} + \frac{\Phi'_{2s}}{(b_1+b_2)} + \frac{\Phi_{1s}(b_2+3b_1)}{b_1^2 b_2} \tag{7}$$

$$V_1 = \frac{1}{b_2^2}\left[2\Phi'_{2s} - 2(b_1+b_2)M_0 - (b_1+b_2)^2 V_0\right]; \tag{8}$$

$$V_2 = \sum Y_s \downarrow - V_0 - V_1; \tag{9}$$

$$M_2 = \sum \vec{M}_{2s} - M_0 - V_0(b_1+b_2) - V_1 b_2 \tag{10}$$

Calculul săgeților şi rotirilor într-o secțiune oarecare a barei situată la distanta x de capătul din stânga se face cu ajutorul relațiilor generale:

$$EI\varphi(x)=\Phi'(x)+EI\varphi_0; \qquad EIw(x)=\Phi(x)+EI\varphi_0 x+EIv_0 \tag{11}$$

În cazul particular al aceastei probleme avem: $w_0=0,\ \varphi_0=0$

Deplasarea şi rotirea secțiunii de la mijlocul barei notată cu 3 ($x=b_1/2$) se detremină astfel:

$$EIw_3=\Phi_{3s}-\frac{M_0(b_1/2)^2}{2}-\frac{V_0(b_1/2)^3}{6}$$
$$EI\varphi_3=\Phi'_{3s}-\frac{M_0(b_1/2)}{1}-\frac{V_0(b_1/2)^2}{2} \tag{13}$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 2e UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 2e s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
Nr	**b1**	**b2**	**d1**	**P1**	**d2**	**P2**	**e1**	**f1**	**q1**	**e2**	**f2**	**q2**	**g1**	**N1**	**g2**	**N2**

DATE DE IESIRE (REZULTATE)

R	S	T	U	V	W	X
Φ_{1S}	**Φ_{2S}**	**M_{2S}**	**Φ'_{1S}**	**Φ'_{2S}**	**Z_S**	**V_0**
CFOR	CFOR	E*(B+C-D)+G*(B+C-F)+J*(I-H)*(B+C-(I+H)/2)+M*(L-K)*(B+C-(L+K)/2)	CFOR	CFOR	E+G+J*(I-H)+M*(L-K)	3*(3*S/(C*(B+C))-V/(B+C)-R*(C+3*B)/(C*B^2))/B

Y	Z	AA	AB	AC
M_0	**V_1**	**V_2**	**M_2**	**$EI\varphi_1$**
2*R/B^2-3*S/(C*(B+C))+V/(B+C)+R*(C+3*B)/(C*B^2)	(2*V-2*Y*(B+C)-X*(B+C)^2)/C^2	W-X-Z	T-Y-X*(B+C)-Z*C	R+Y*B-X*B^2/2

MODEL 3a

SISTEM PLAN FORMAT DIN DOUĂ BARE DREPTE SUDATE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINAT

Enunț

Se consideră un cadru plan format din 2 bare drepte sudate, de aceeaşi lungime şi rigiditate constantă, încastrat la un capăt şi articulat la celălalt, supus la încovoiere, forfecare şi întindere-compresiune sub acțiunea unor sarcini exterioare, cum ar fi: forțe concentrate, sarcini uniform distribuite şi cupluri de forțe (fig. 3a.1). Se cere să se determine reacțiunile, să se traseze diagramele de eforturi axiale, tăietoare şi încovoietoare, să se dimensioneze şi să se calculeze deplasarea şi rotirea secțiunii aflată la mijlocul barei orizontale.

Metode şi relații pentru rezolvarea problemei

În locul legăturilor cu mediul fix se introduc *forțele şi momentele de legătură* (conform axiomei legăturilor), în total 5 reacțiuni cunoscute ca poziție şi direcții, dar necunoscute ca modul (fig. 3a.2). Sistemul este *de două ori static nederminat* deoarece se pot scrie trei ecuații de echilibru (gradul de nedeterminare se determină ca diferență dintre numărul total de necunoscute şi numărul de ecuații de echilibru din Mecanică*: GN=N-E)*.

a. Pentru rezolvarea problemei se foloseşte *metoda eforturilor* care cuprinde următoarele etape:

1. Se alege *sistemul de bază*, adică un *sistem static determinat* ce se obține din sistemul real prin suprimarea unui număr de legături exterioare (în cazul de față se suprimă articulația care răpeşte corpului două grade de libertate, şi anume, deplasările după Ox şi Oy) astfel încât acesta să devină static determinat şi se înlocuiesc aceste legături cu necunoscutele static nedeterminate X_1 şi X_2 (conform axiomei legăturilor) (fig. 3b.3).

2. Se exprimă *deplasările în sistemul de bază,* în secțiunea unde au fost introduse necunoscutele static nedeterminate X_1 şi X_2 aplicând principiului suprapunerii efectelor pentru cele trei seturi de sarcini (*sarcinile exterioare*, $X_1=1$ respectiv $X_2=1$):

- deplasările δ_{10} şi δ_{20} corespund *sarcinilor exterioare*, deplasări calculate după cele două direcții ale necunoscutelor X_1 şi X_2;
- deplasările corespunătoare unor sarcini unitare $X_1=1$ (δ_{11}, δ_{21}) respectiv respectiv $X_2=1$ (δ_{12}, δ_{22}), calculate după cele două direcții ale necunoscutelor X_1 şi X_2 ;

Prin suprapunerea efectelor celor trei grupe de sarcini se obțin deplasările totale *în sistemul de bază,* care trebuie să fie *identice cu cele din sistemul real*:

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

3. Deplasările de mai sus se calculează prin metoda Mohr-Maxwell şi aplicând regula lui Vereşceaghin de integrare grafică (sau regula 1/3 a lui Simpson) şi luând în considerare numai solicitarea principală de încovoiere (se neglijează efectul eforturilor de întindere-compresiune şi eforturile tăietoare):

$$\delta_{i0} = \sum \int \frac{m_i M^o}{EI} dx \qquad i = 1,2; \qquad \delta_{ik} = \sum \int \frac{m_i m_k}{EI} dx \qquad i,k = 1,2$$

După determinarea valorilor deplasărilor δ_{i0} , δ_{ik} se rezolvă sistemul format din cele două ecuații obținând cele două necunoscute cu ajutorul regulii lui Cramer:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -\delta_{10} & \delta_{12} \\ -\delta_{20} & \delta_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\delta_{20}\delta_{12} - \delta_{10}\delta_{22}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}; \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{11} & -\delta_{10} \\ \delta_{21} & -\delta_{20} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\delta_{10}\delta_{21} - \delta_{20}\delta_{11}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}$$

b. Diagramele de eforturi *N, T şi M* se pot trasa fie direct în sistemul real ținând seama că $H_B=X_1$ şi $V_B=X_2$, fie aplicând principul suprapunerii efectelor celor trei seturi de sarcini în sistemul de bază după cum urmează:

$$N = N^o + n_1 \cdot X_1 + n_2 \cdot X_2$$

$$T = T^o + t_1 \cdot X_1 + t_2 \cdot X_2$$

$$M = M^o + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 \qquad \text{unde:}$$

- N^o, T^o şi M^o reprezintă diagramele de eforturi axiale, tăietoare şi încovoietoare *din sistemul de bază* datorate acțiunii *sarcinilor exterioare;*
- n_k, t_k şi m_k reprezintă diagramele de eforturi axiale, tăietoare respectiv încovoietoare *din sistemul de bază* datorate acțiunii forțelor $X_1=1$, $X_2=1$

c. Deplasarea şi rotirea secțiunii C de la mijlocul barei orizontale se pot determina folosind acelaşi principiu al suprapunerii efectelor sarcinilor exterioare date şi a eforturilor static nedeterminate (X_1 şi X_2), acum cunoscute, pentru sistemul de bază, prin metoda energetică Mohr Maxwell.

Deplasarea pe direcție verticală respectiv rotirea secțiunii C se determină cu relațiile:

$$\delta_C = \delta_{C0} + \delta_{C1} X_1 + \delta_{C2} X_2$$
$$\varphi_C = \varphi_{C0} + \varphi_{C1} X_1 + \varphi_{C2} X_2 \qquad \text{unde:}$$

- δ_{C0} /φ_{C0}– este deplasarea respectiv rotirea secțiunii *C* pe direcția verticală sub acțiunea forțelor exterioare date în sistemul de bază:

$$\delta_{C0} = \sum \int \frac{m_C M^o}{EI} dx; \qquad \varphi_{C0} = \sum \int \frac{m^*_C M^o}{EI} dx$$

- δ_{C1} /φ_{C1} şi δ_{C2} /φ_{C2} – deplasările respectiv rotirile secțiunii C pe direcția verticală în sistemul de bază, sub acțiunea forțelor unitare $X_1=1$ respectiv $X_2=1$ în sistemul de bază:

$$\delta_{Ck} = \sum \int \frac{m_C m_k}{EI} dx; \quad \varphi_{Ck} = \sum \int \frac{m^*_C m_k}{EI} dx \qquad k = 1,2$$

Deplasarea pe direcție verticală / rotirea secțiunii A se determină folosind metoda Mohr-Maxwell astfel:

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\left[\int (M^0 + X_1 m_1 + X_2 m_2) m_C dx\right] = \frac{1}{EI}\int M m_C dx$$

$$\varphi_C = \frac{1}{EI}\left[\int (M^0 + X_1 m^*_1 + X_2 m^*_2) m^*_C dx\right] = \frac{1}{EI}\int M m^*_C dx$$

CAZ PARTICULAR

Se consideră cadrul plan format din trei bare sudate încastrat în *A* şi articulat în *B,* încărcat cu un sistem de forțe ca figura 3b.1. **S**e cunosc*: P = 20 kN; L=1m,* secțiunea barei circulară de diametru *d*, tensiunea admisibilă şi modulul de elasticitate al materialului: σ_a*=150 MPa*, *E= 2,1.10*^{5} *MPa.* **Se cere:**

a) să se determine reacțiunile V_A, H_A, M_A, V_B, H_B (încastrarea *A* şi articulația *B*)

b) să se traseze diagramele de eforturi: *N* (axiale), *T* (tăietoare) şi *M* (încovoietoare);

c) să se dimensioneze bara la solicitarea principală de încovoiere;

d) să se calculeze deplasarea pe verticală şi rotirea secțiunii de la mijlocul barei orizontale

Rezolvare

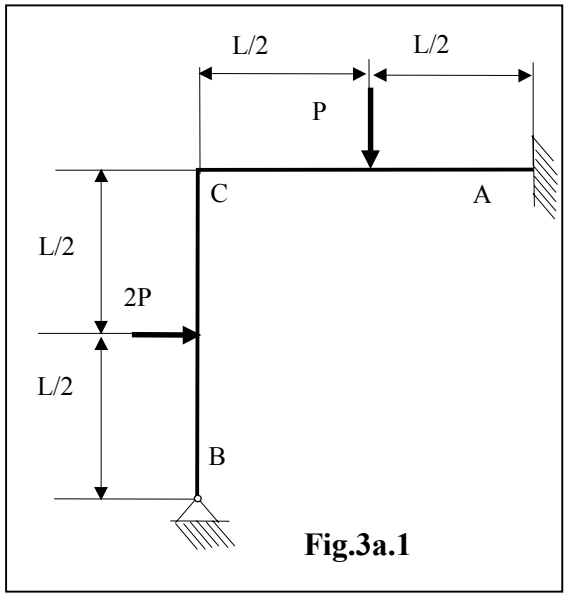


Fig.3a.1

1. Sistemul fiind de două ori static nedeterminat *se alege sistemul de bază* ca în fig. 3a.3, prin suprimarea articulației B şi introducerea necunoscutelor static nedeter-minate X_1 şi X_2. Se obține un sistem static determinat pentru care vom determina deplasările sub acțiunea celor trei seturi de sarcini : *(2P şi q),* $(X_1=1)$ şi $(X_2=1)$

Ecuațiile canonice ale metodei eforturilor se scriu:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0$$

$$\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

Deplasările se calculează folosind metoda Mohr-Maxwell conform relațiilor:

$$\delta_{10} = \sum \int \frac{m_1 M^o}{EI} dx; \qquad \delta_{20} = \sum \int \frac{m_2 M^o}{EI} dx;$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{m_1^2}{EI} dx; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx; \quad \delta_{22} = \sum \int \frac{m_2^2}{EI} dx;$$

Pentru calculul integralelor folosind metoda lui Vereşceaghin se parcurg următorii paşi:

- se construieşte diagrama de momente încovoietoare (M^o) pentru sistemul de bază în care acționează numai sarcinile exterioare $2P$ şi q (fig.3b.4);
- se construiesc diagramele de momente încovoietoare (m_1) pentru sistemul de bază în care acționează numai sarcina $X_1=1$, respectiv (m_2) pentru sistemul de bază în care acționează numai sarcina $X_2=1$ (fig.3b.4) .
- se calculează integralele de mai sus aplicând regula lui Vereşceaghin de integrare grafo-analitică, înmulțind ariile corespunyătoare din diagrama M^0 (m_j) cu ordonatele corespunzătoare din diagrama m_k:

$$\delta_{k0} = \sum A_i^{(0)} y_{Ci}^{(k)}; \qquad \delta_{jk} = \sum A_j^{(j)} y_{Cj}^{(k)}$$

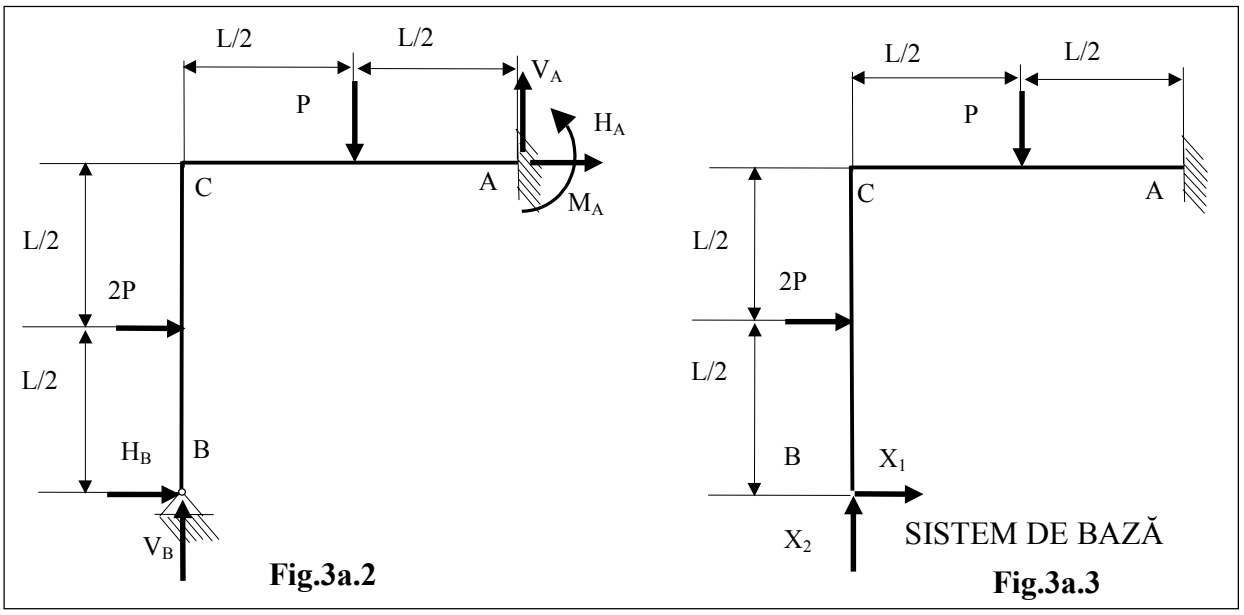


Fig.3a.2 **Fig.3a.3**

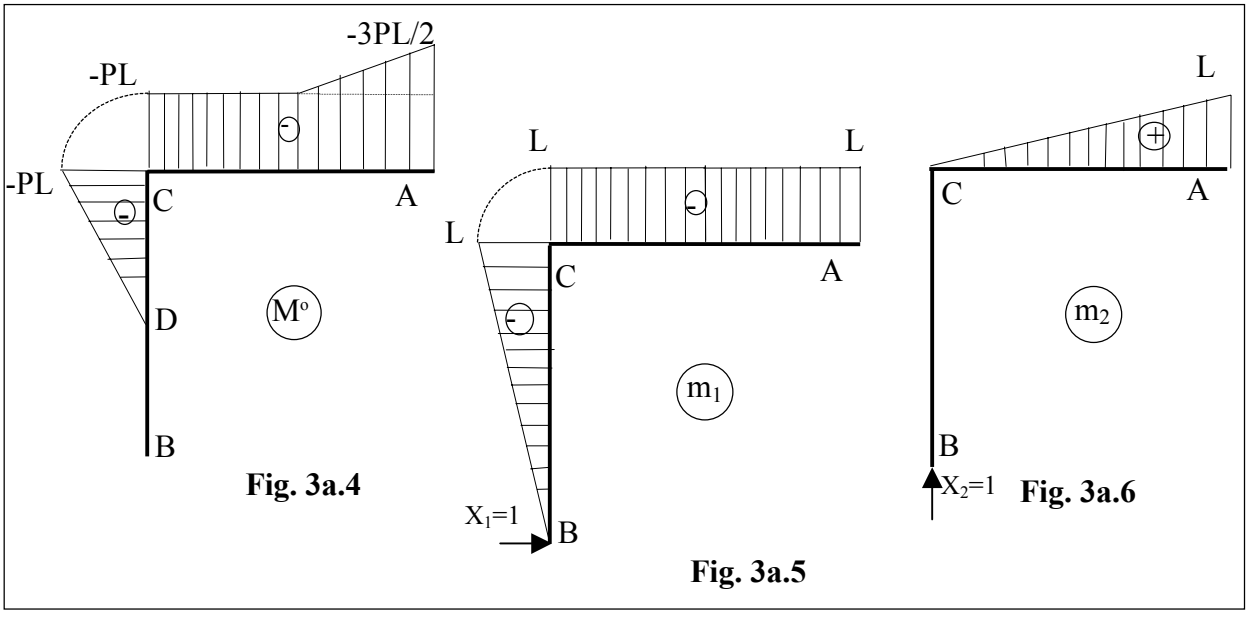


Fig. 3a.4 **Fig. 3a.5** **Fig. 3a.6**

$$\delta_{10}=\sum A_j^{(o)}y_{Cj}^{(1)}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot(-PL)\cdot\left(-\frac{5L}{6}\right)+\cdot L\cdot(-PL)\cdot(-L)+\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot\left(-\frac{PL}{2}\right)\cdot(-L)\right]=\frac{4PL^3}{3EI}$$

$$\delta_{20}=\sum A_j^{(o)}y_{Cj}^{(2)}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot(-PL)\cdot 0+\cdot L\cdot(-PL)\cdot\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot\left(-\frac{PL}{2}\right)\cdot\frac{5L}{6}\right]=-\frac{29PL^3}{48EI}$$

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{m_1^2}{EI}dx=\sum A_j^{(1)}y_{Cj}^{(1)}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot L\cdot(-L)\cdot(-\frac{2L}{3})+L\cdot(-L)\cdot(-L)\right]=\frac{4L^3}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\sum\int\frac{m_1 m_2}{EI}dx=\sum A_j^{(1)}y_{Cj}^{(2)}=\frac{1}{EI}\left[L\cdot(-L)\cdot\frac{L}{2}\right]=-\frac{L^3}{2EI}$$

$$\delta_{22}=\sum\int\frac{m_2^2}{EI}dx=\sum A_j^{(2)}y_{Cj}^{(2)}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot L\cdot L\cdot\frac{2L}{3}\right]=\frac{L^3}{3EI}$$

Rezultă următorul sistem de ecuații cu două necunoscute:

$$\frac{4PL^3}{3EI}+X_1\cdot\frac{4L^3}{3EI}-X_2\cdot\frac{L^3}{2EI}=0\quad\Rightarrow X_1=\frac{41P}{56}=-0{,}732P\,;$$

$$-\frac{29PL^3}{48EI}-X_1\cdot\frac{L^3}{2EI}+X_2\cdot\frac{L^3}{3EI}=0\;\Rightarrow\;X_2=\frac{5P}{7}=0{,}714P$$

Reacțiunile cerute (fig.3a.2) sunt:

V_A =0,268 P; H_A =-1,268 P; M_A= -0,054 PL

V_B=X_2=0,714 P; H_B =X_1=-0,732 P

4. Diagramele de eforturi N, T şi M

Diagramele de eforturi se determină pe baza *principiului suprapunerii efectelor*, aşa cum rezultă din fig. 3a.7, 3a.8 şi 3a.9:

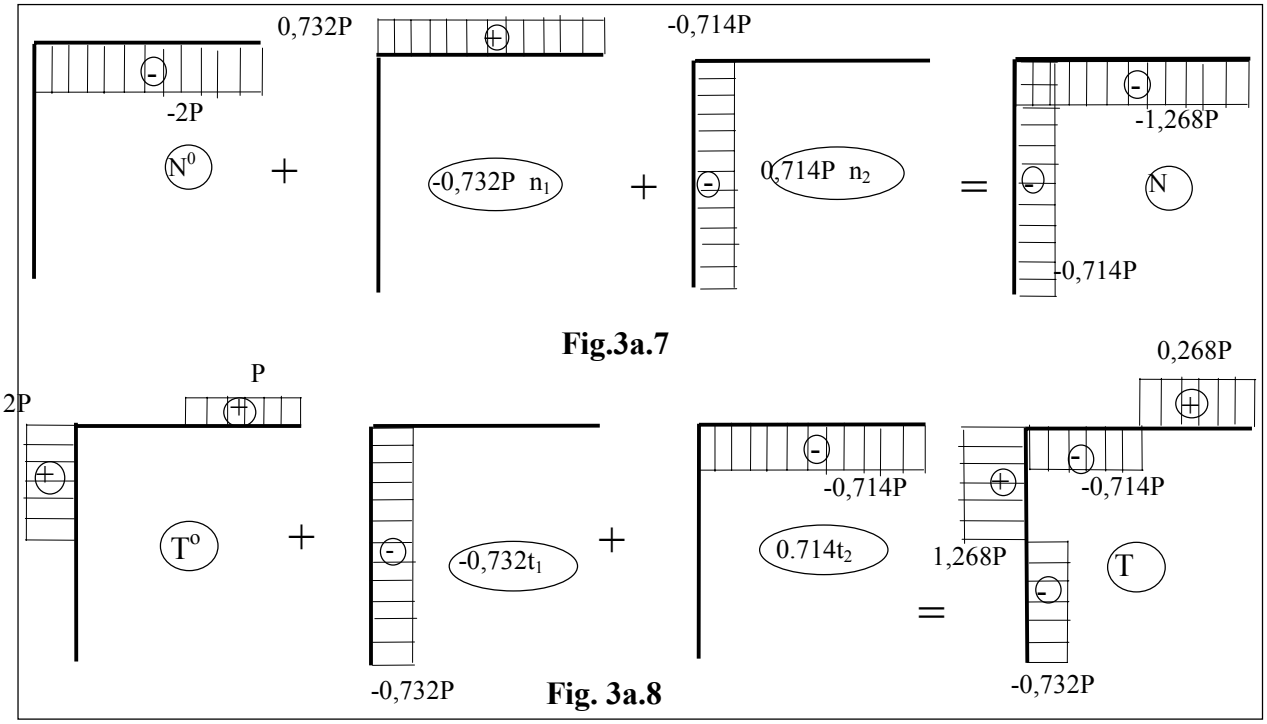


Fig.3a.7

Fig. 3a.8

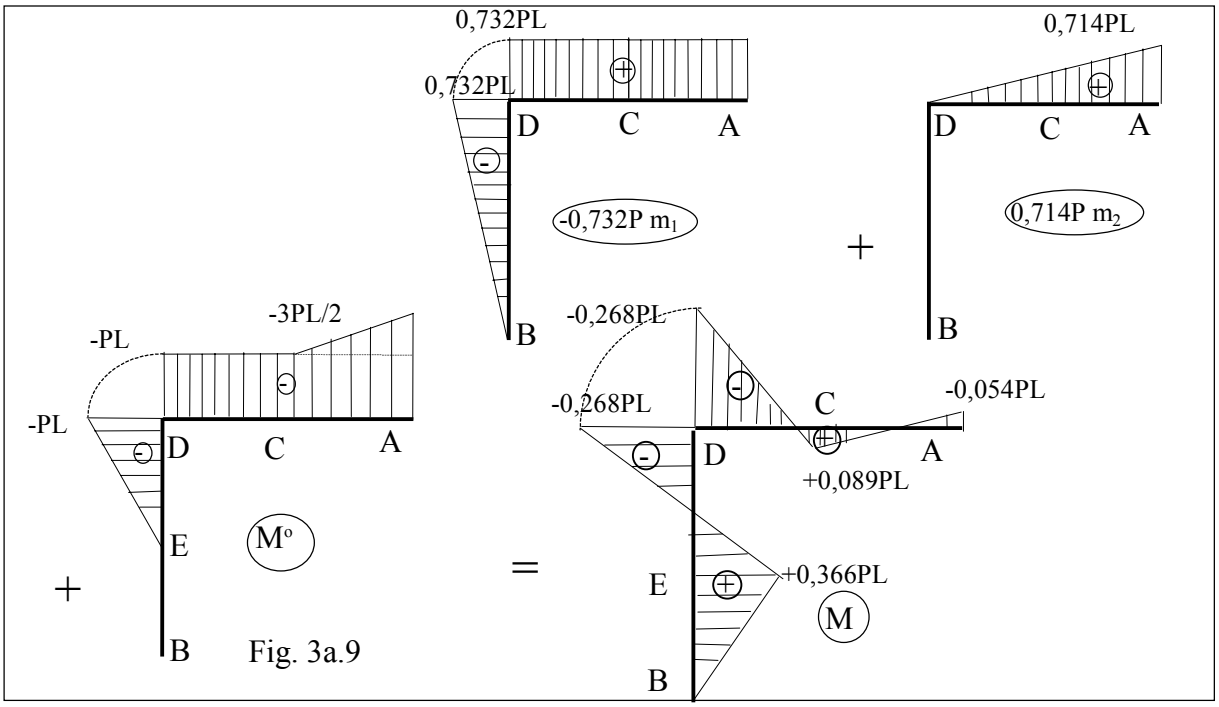


Fig. 3a.9

5. Dimensionarea barei la încovoiere

Din diagrama M (fig.3.5) se determină momentul maxim $| M_{max} | = 0,366PL$ şi poziția lui pe bară (secțiunea D). Valoarea numerică a momentului maxim este $M_{iymax}=7,32\ kNm=7,32\cdot10^6\ Nmm$

Relația de dimensionare la solicitarea de încovoiere este:

$$\frac{M_{iy\max}}{W_y}\le\sigma_a\Rightarrow W_{ynec}=\frac{M_{iy\max}}{\sigma_a};$$

unde: W_y - este modulul de rezistență al secțiunii: $W_y=\frac{I_y}{z_{\max}}=\frac{\pi d^3}{32}$

$$\frac{\pi d^3}{32}=\frac{M_{iy\,max}}{\sigma_a}\Rightarrow d=\sqrt[3]{\frac{32M_{iy\,max}}{\pi\sigma_a}}=\sqrt[3]{\frac{32\cdot7320000}{\pi\cdot150}}=79,21mm\ \Rightarrow d=80mm$$

6. Calculul deplasării şi rortirii secțiunii C

Deplasarea şi rotirea secțiunii C de la mijlocul barei orizontale se determină folosind metoda energetică Mohr Maxwell astfel:

$\delta_A=\frac{1}{EI}\int Mm_A dx;\qquad \varphi_A=\frac{1}{EI}\int Mm^*_A\,dx$ Aplicând regula 1/3 Simpson avem:

$$\delta_A=\int\frac{m_A M}{EI}dx=\frac{1}{6EI}\cdot\frac{L}{2}\left(-0,054PL\cdot(-0,5L)+4\cdot0,0175PL\cdot(-0,25L)+0,089PL\cdot0\right)=0,792\cdot10^{-3}\frac{PL^3}{EI}$$

$$\varphi_A=\int\frac{m^*_A M}{EI}dx=\frac{1}{6EI}\cdot\frac{L}{2}\left(-0,054PL\cdot1+4\cdot0,0175PL\cdot1+0,089PL\cdot1\right)=8,75\cdot10^{-3}\frac{PL^2}{EI}$$

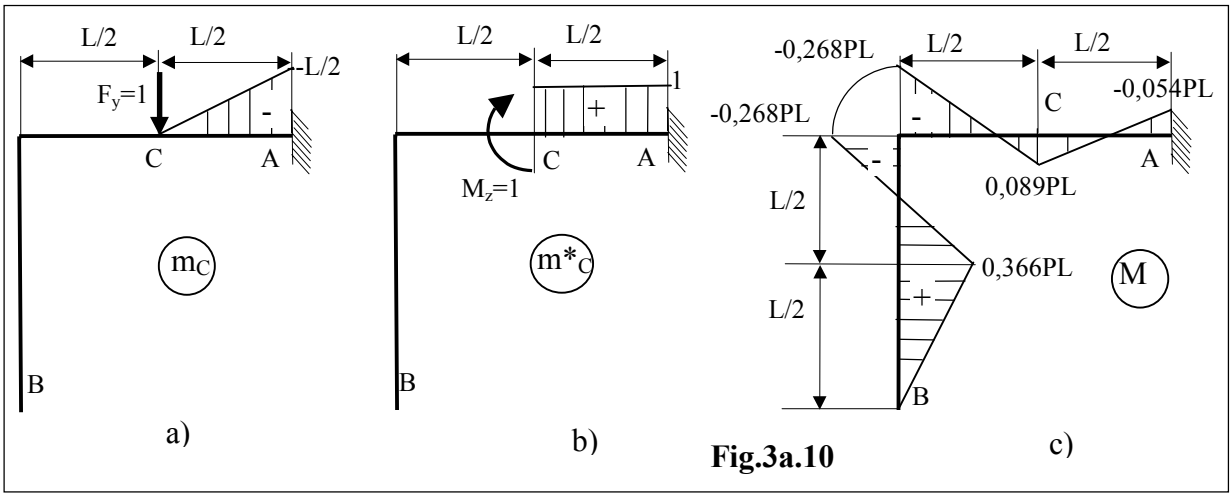


Fig.3a.10

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 3a UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 3a se calculează separat coeficienții deplasărilor $\delta_{i0} = \alpha \frac{PL^3}{EI}$; $\delta_{ij} = \beta \frac{PL^3}{EI}$ pentru un număr de cazuri simple, apoi folosind principiul suprapunerii efectelor se obțin rezultatele problemei date. S-a folosit următorul algoritm în Excel :

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
Nr.	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**q1**	**q2**	**q3**	**q4**	**q5**	**q6**	**q7**
Crt.	-2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE
q8	**q9**	**N1**	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**	**N6**	**N7**	**N8**	**N9**	**N10**	**N11**	**N12**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

DATE DE IEŞIRE

AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
$\delta_{10} \cdot \frac{EI}{PL^3}$	$\delta_{20} \cdot \frac{EI}{PL^3}$	$\delta_{11} \cdot \frac{EI}{L^3}$	$\delta_{12}\ (=\delta_{12}) \cdot \frac{EI}{L^3}$	$\delta_{22} \cdot \frac{EI}{L^3}$	**X_1/P**	**X_2/P**
4/3	-29/48	4/3	-1/2	1/3	-0,732	9,714

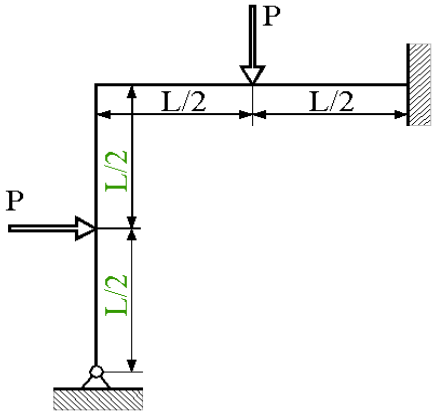
Valorile coeficienților $\delta_{i0} \cdot \frac{EI}{PL^3}$, $\delta_{ij} \cdot \frac{EI}{PL^3}$, care se introduc în programul Excel, pentru fiecare caz simplu de încărcare a cadrului plan format din trei bare, sunt date la rezolvarea Modelului 3b.

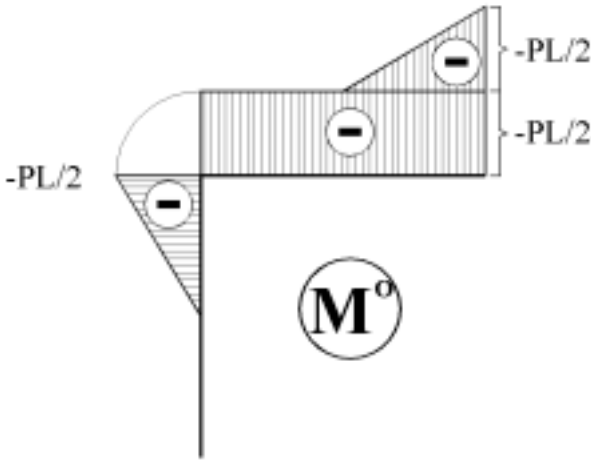
PROBLEME REZOLVATE

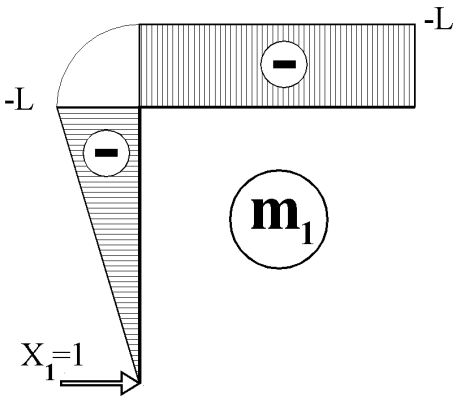
Problema nr. 3a.1.

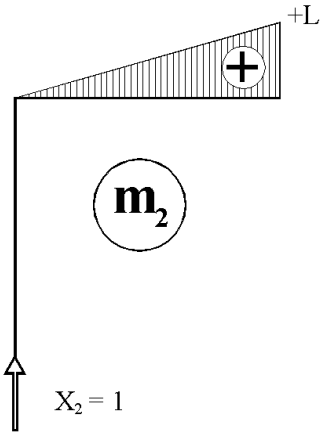
Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)

Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



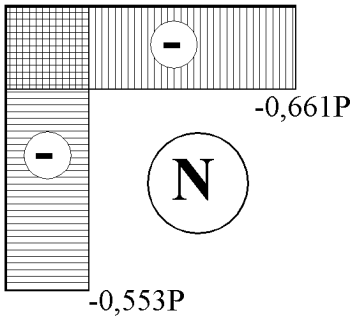


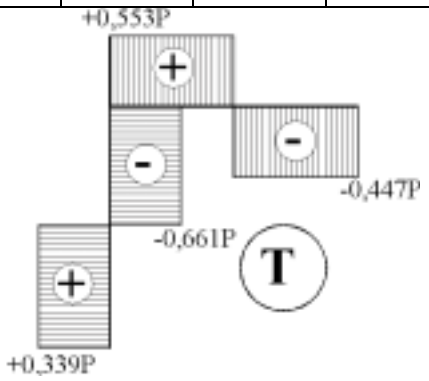


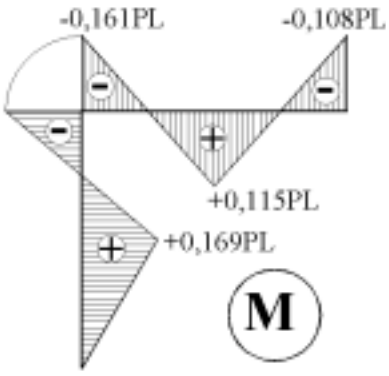


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{35}{48}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{-17}{48}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{-L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	-0,339P	0,553P	0,169 PL	62 mm

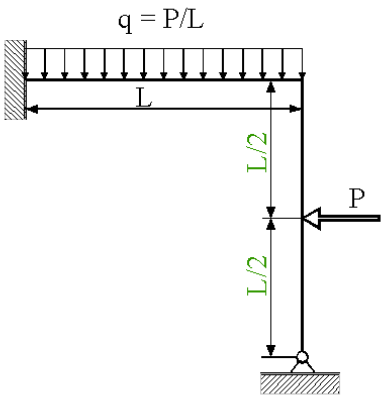


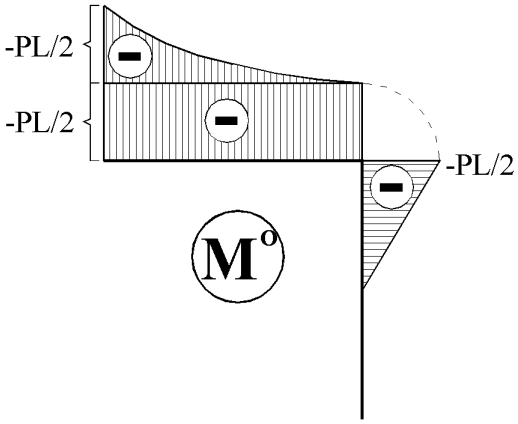


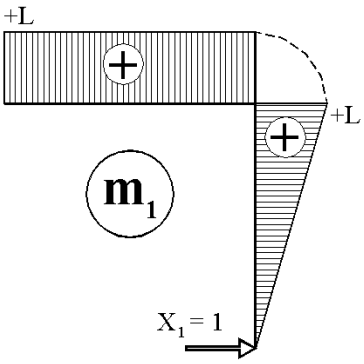


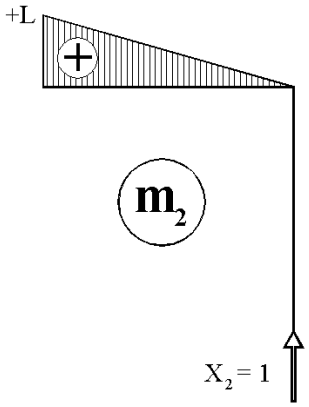
Problema nr. 3a.2.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



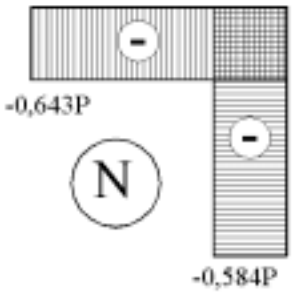


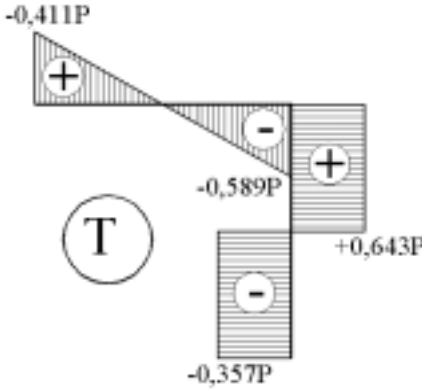


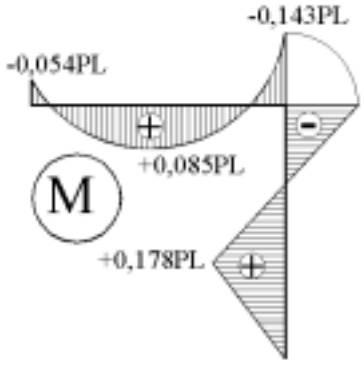


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{37}{48}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{-3}{8}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	0,357P	0,589P	0,178 PL	63 mm

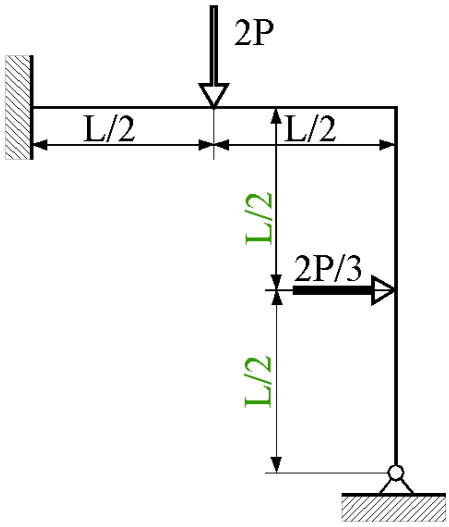


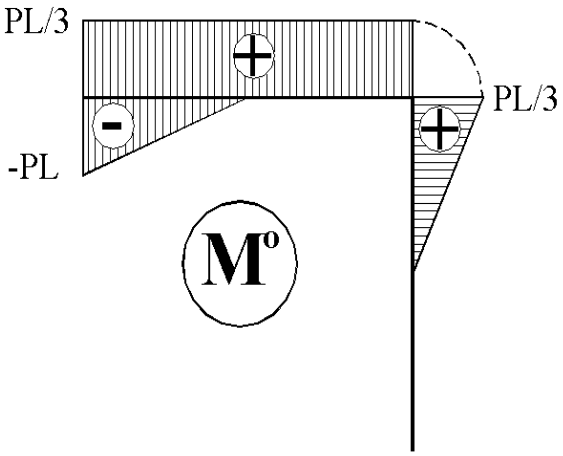


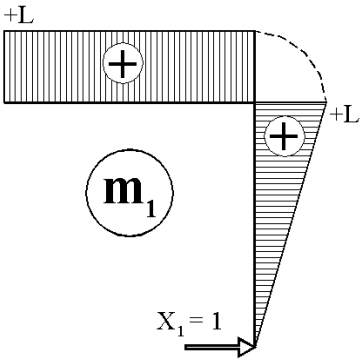


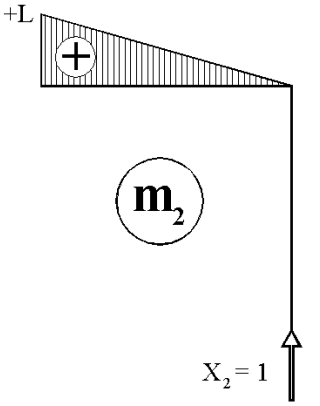
Problema nr. 3a.3.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



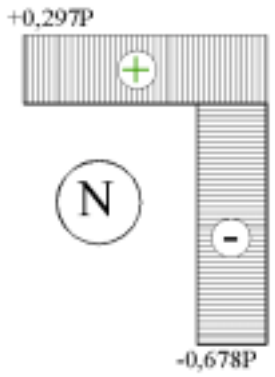


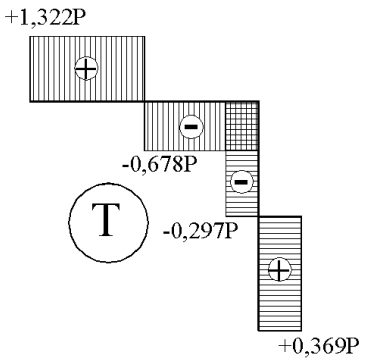


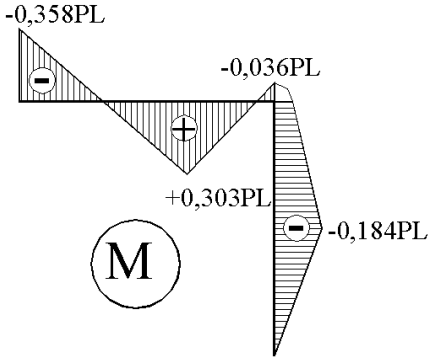


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{11}{72}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{1}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	-0,369P	0,678P	0,358PL	79 mm

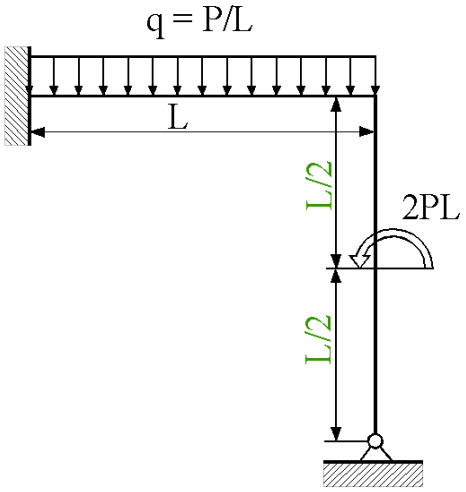


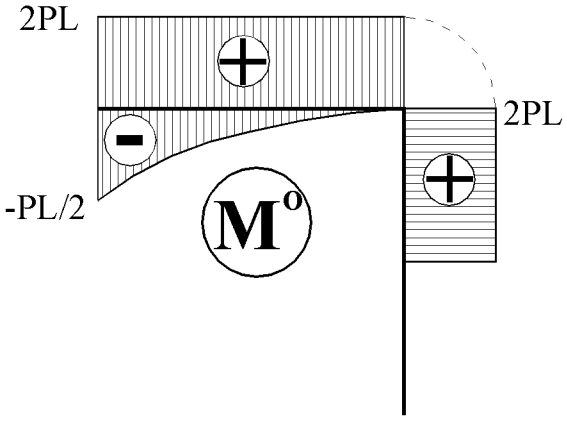


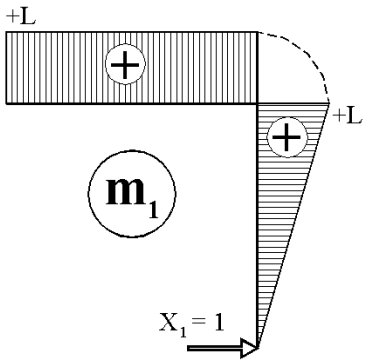


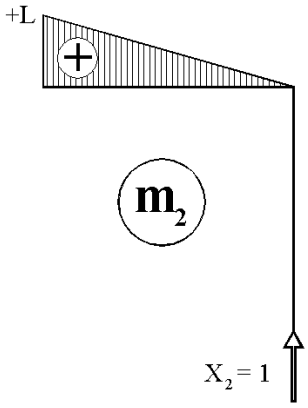
Problema nr. 3a.4.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



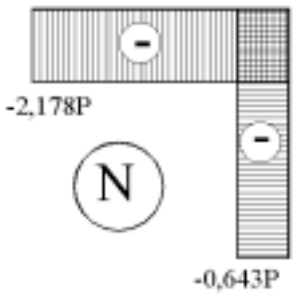


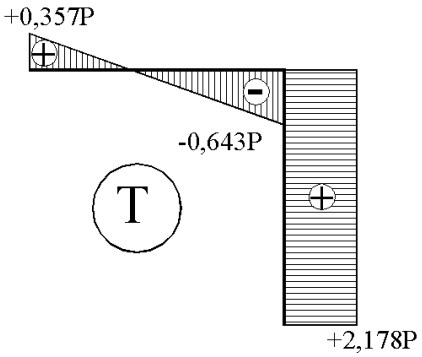


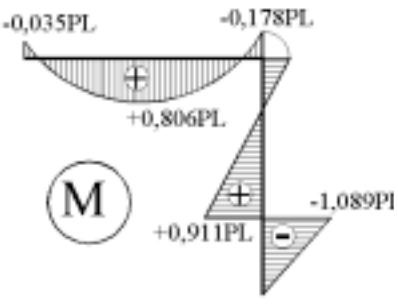


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{31}{12}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{7}{8}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	-2,178P	0,643P	1,089PL	114 mm

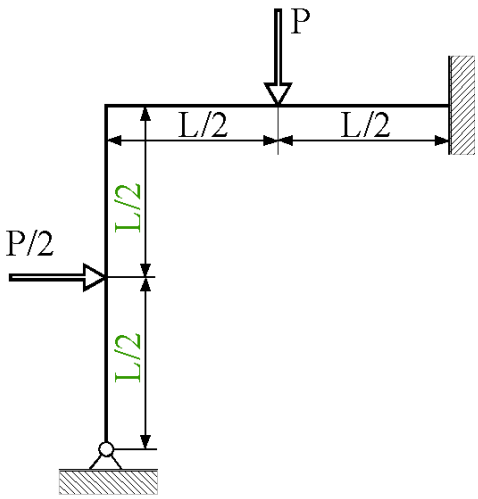


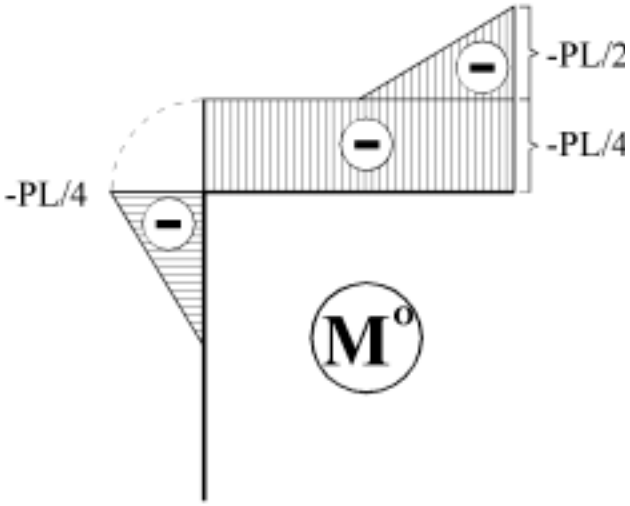


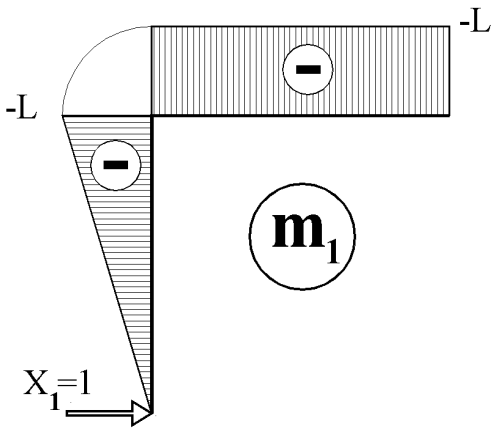


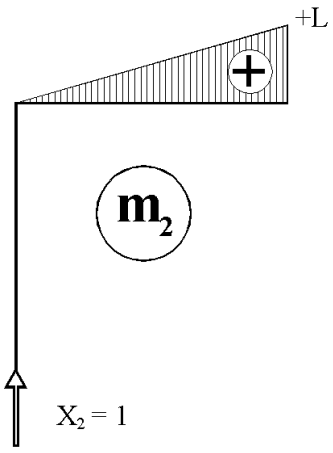
Problema nr. 3a.5.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



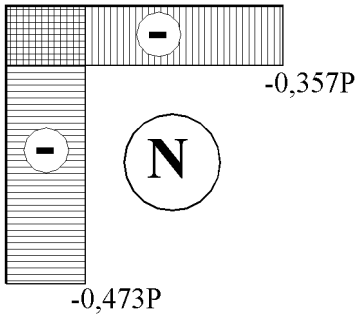


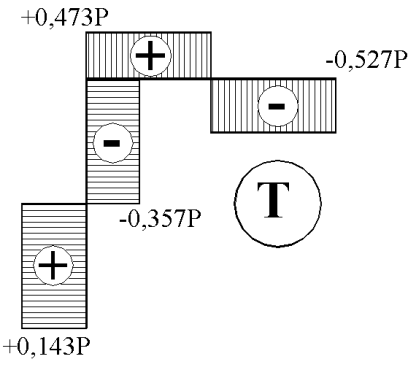


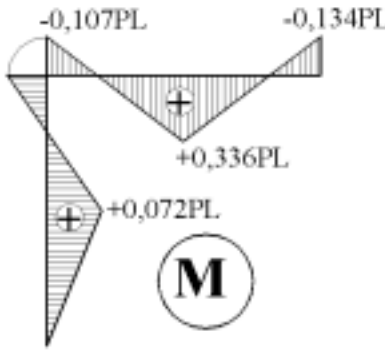


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{41}{96}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{7}{48}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	-0,143P	0,473P	0,336PL	78 mm

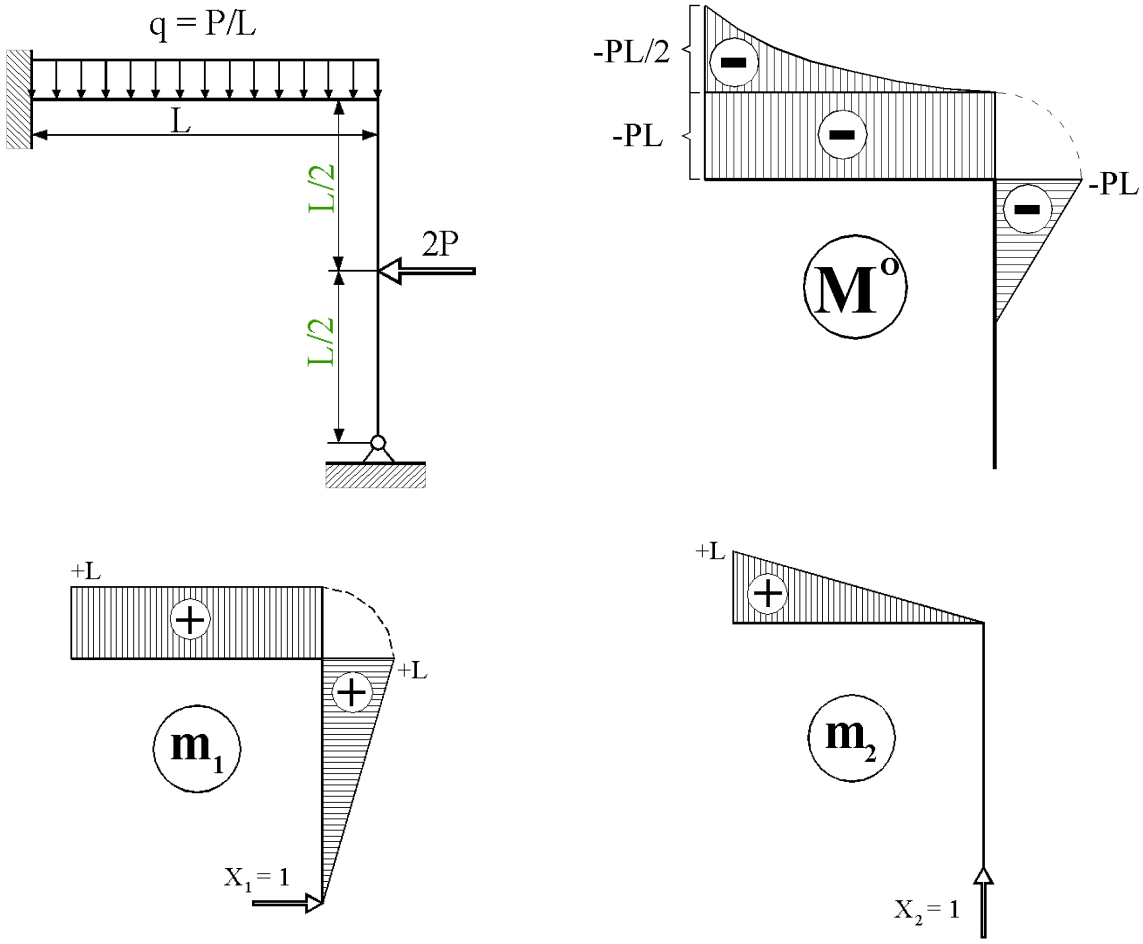






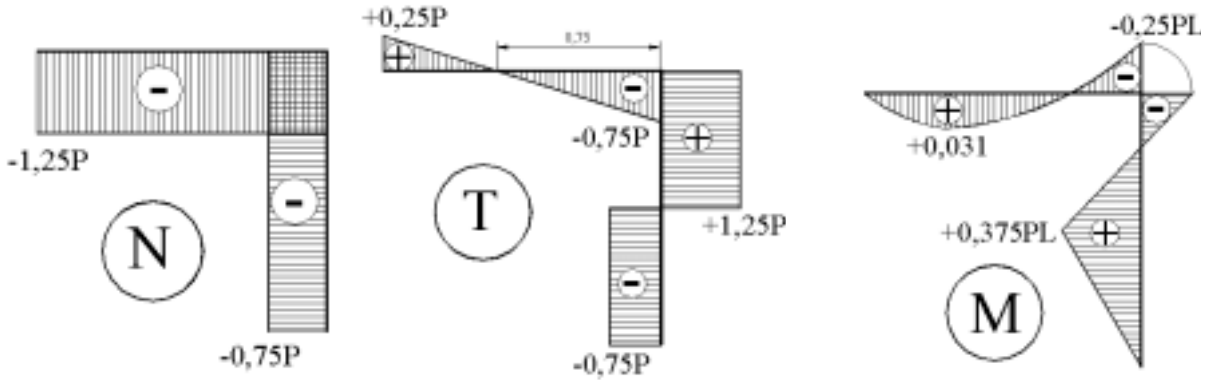
Problema nr. 3a.6.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



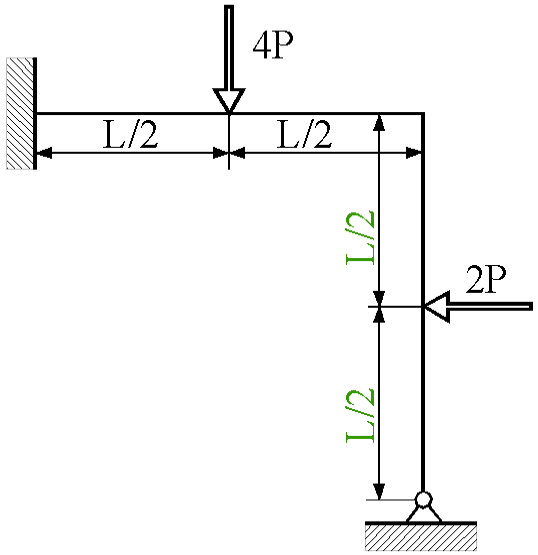
Rezultate:

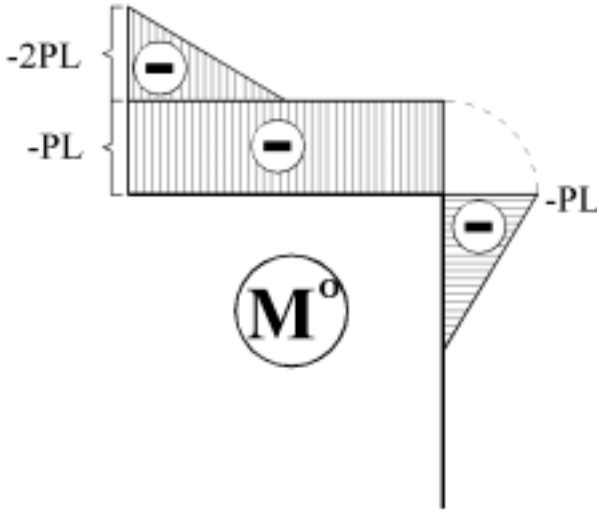
δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{33}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{5}{8}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	0,75P	0,75P	0,375PL	80

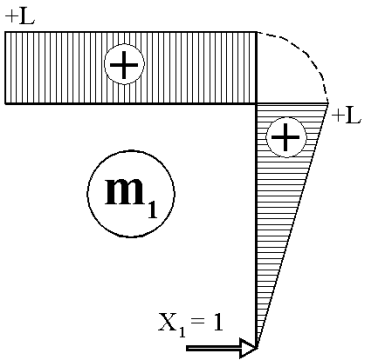


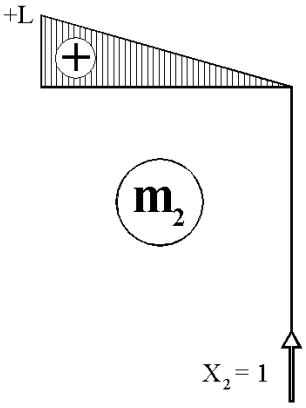
Problema nr. 3a.7.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



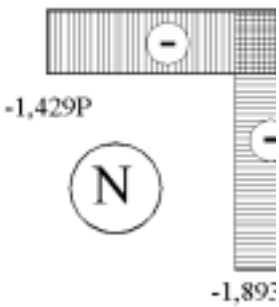


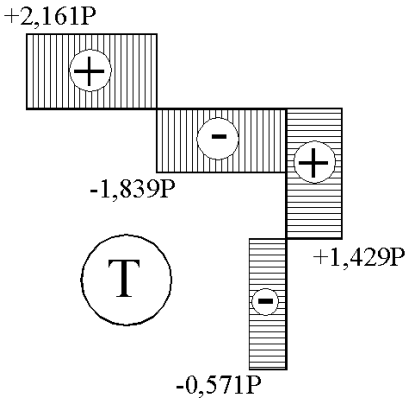


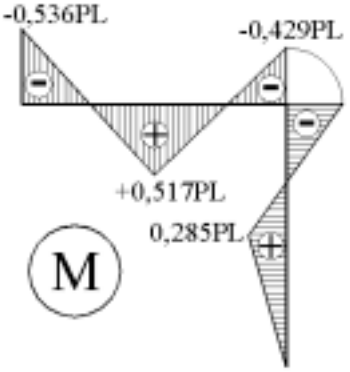


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{41}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{11}{12}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	0,571P	1,893P	0,536PL	90 mm

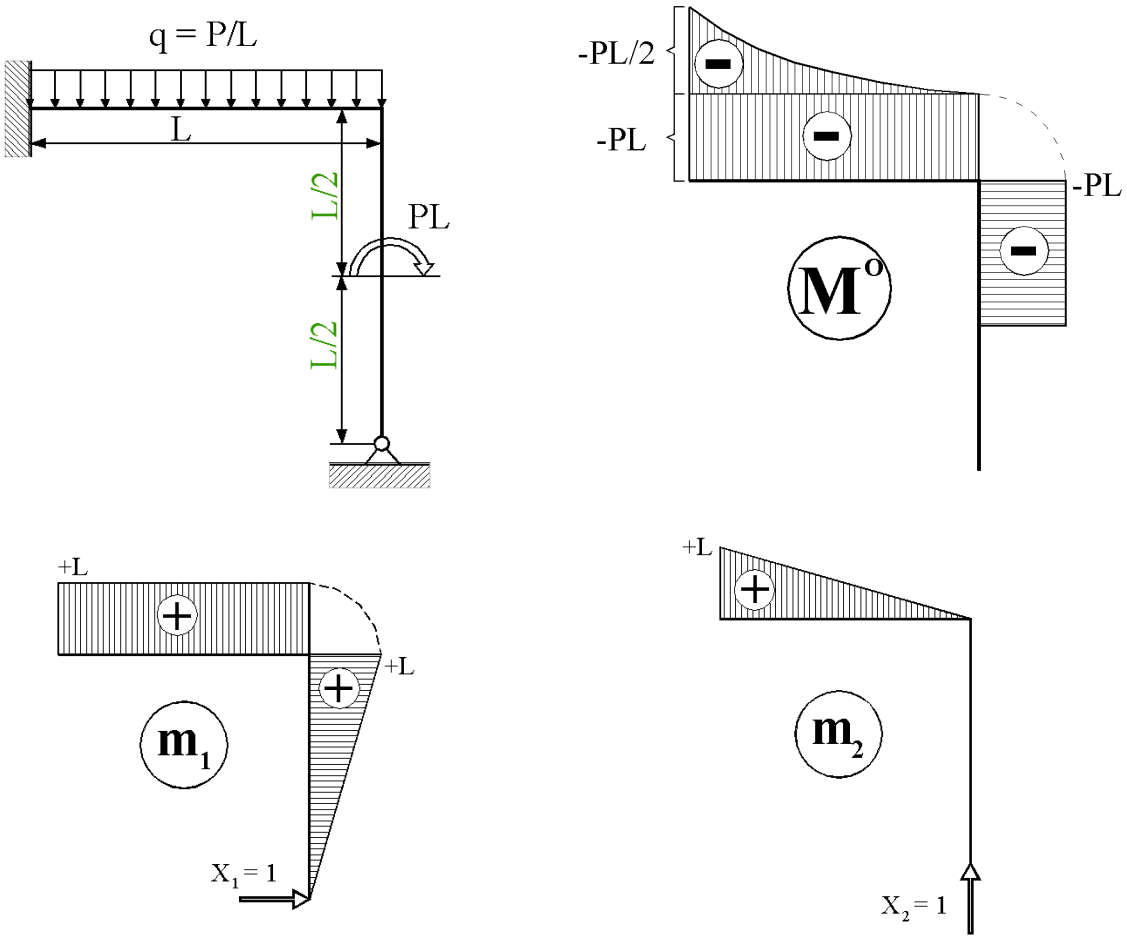






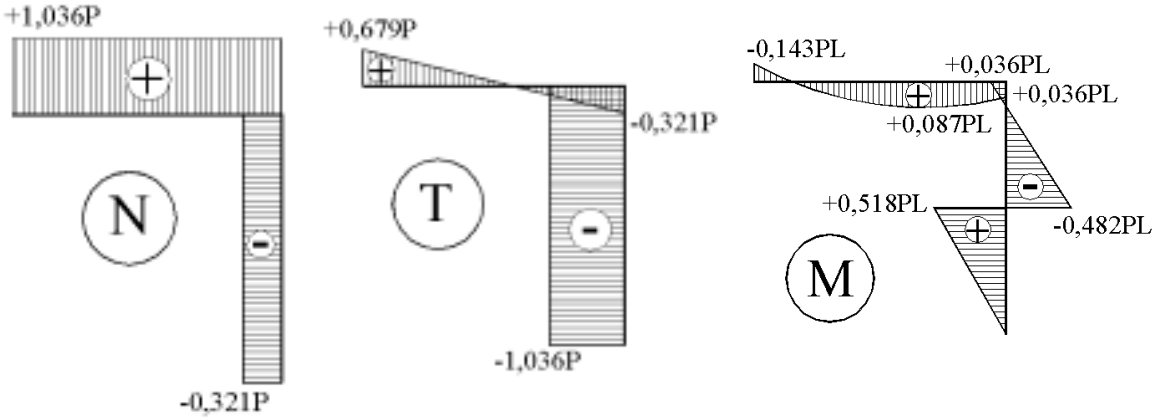
Problema nr. 3a.8.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



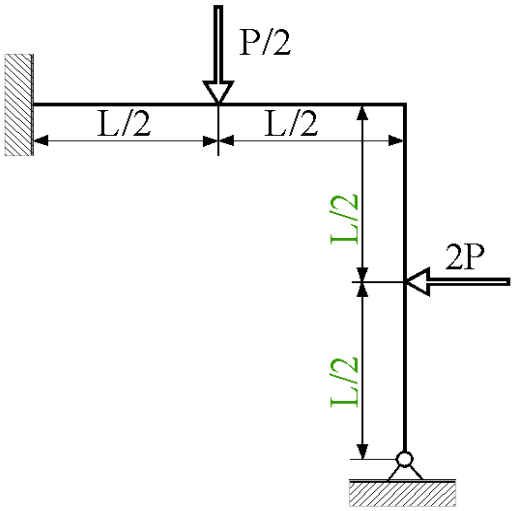
Rezultate:

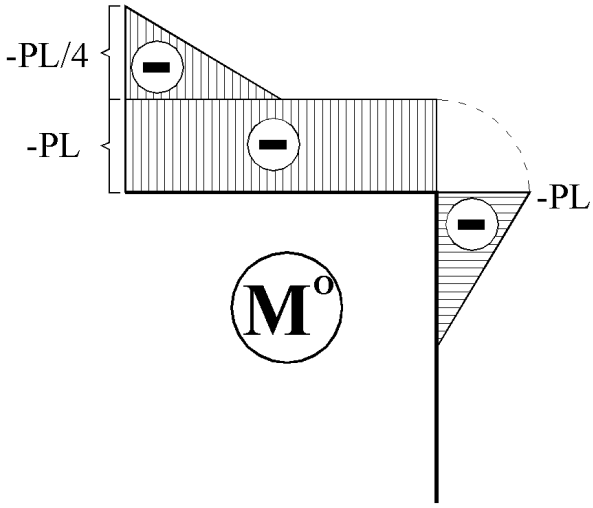
δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{37}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{5}{8}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	1,036P	0,321P	0,518PL	89 mm

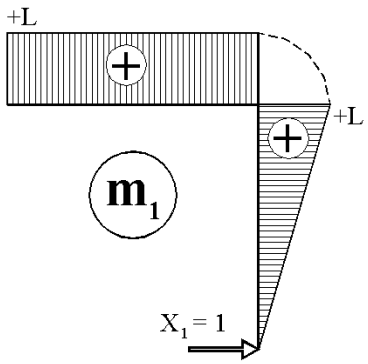


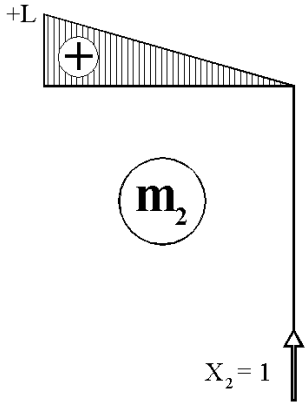
Problema nr. 3a.9.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



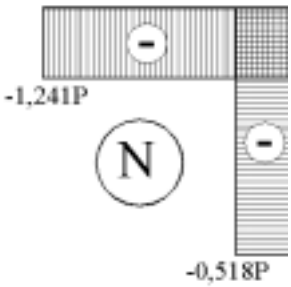


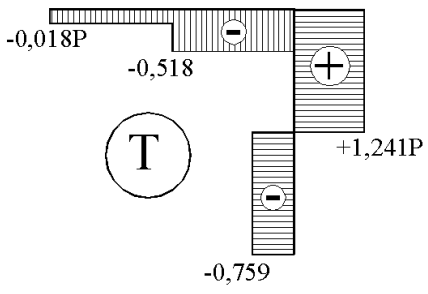


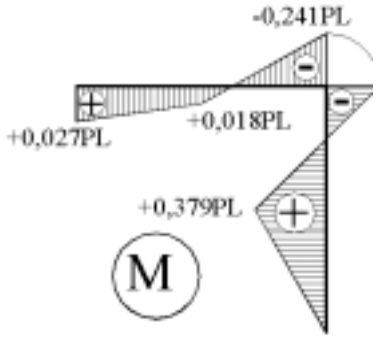


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{61}{48}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{53}{96}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	0,759P	0,518P	0,379PL	81 mm

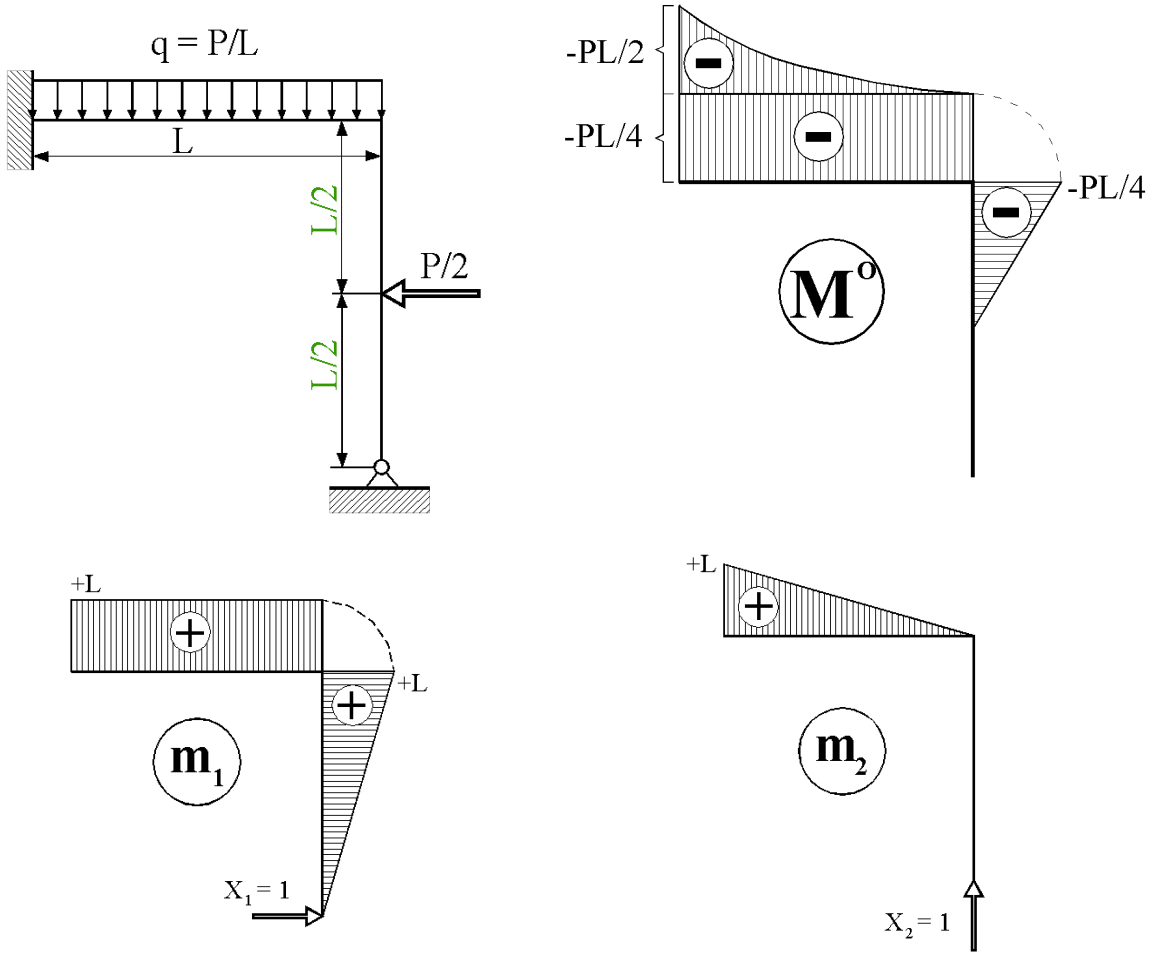






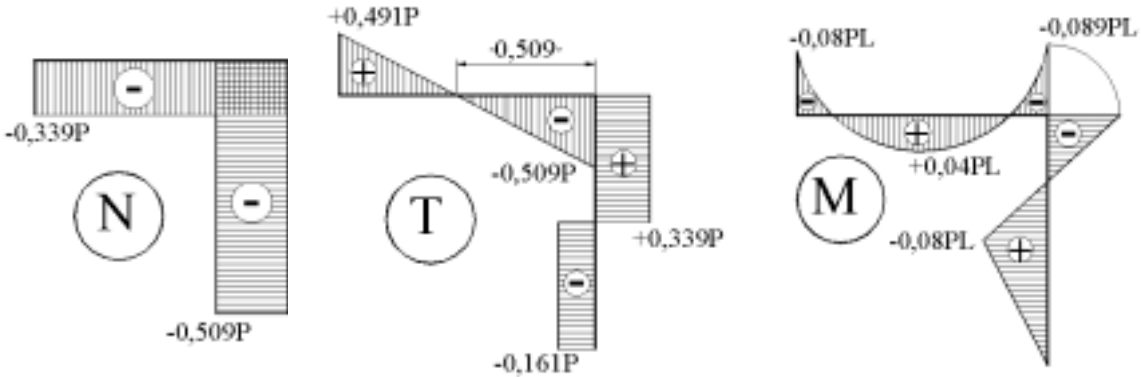
Problema nr. 3a.10.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



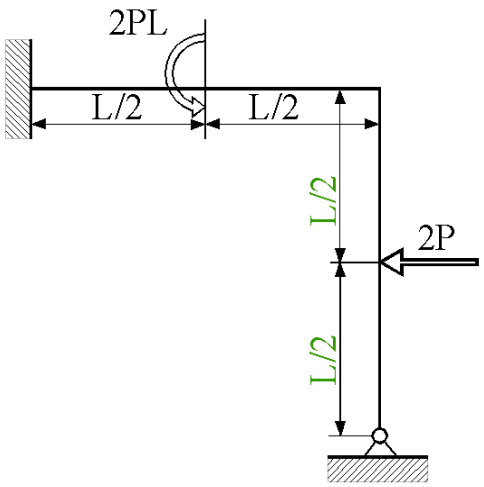
Rezultate:

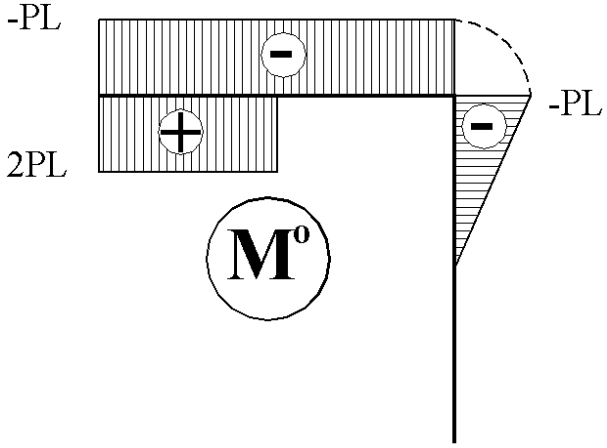
δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{15}{32}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{1}{4}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	0,161P	0,509P	0,089PL	50 mm

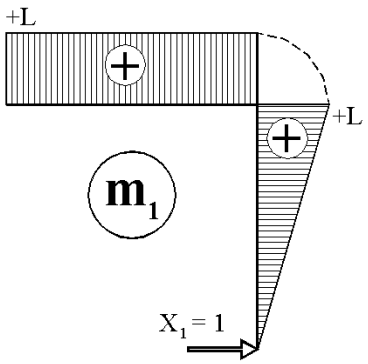


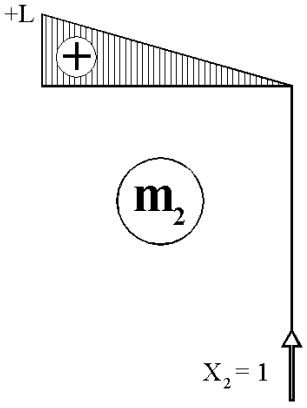
Problema nr. 3a.11.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



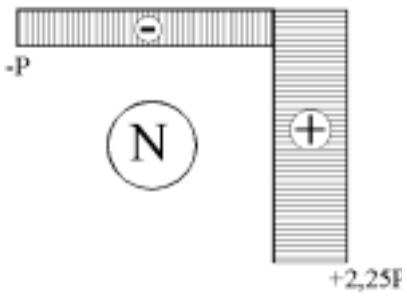


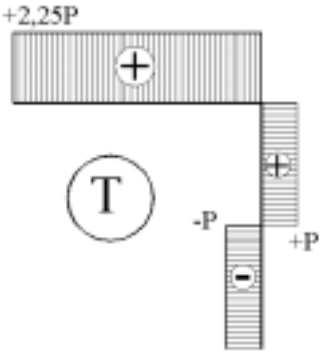


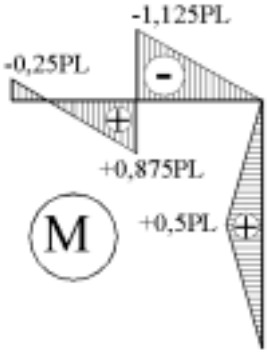


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{5}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	P	-2,25P	1,125PL	116 mm

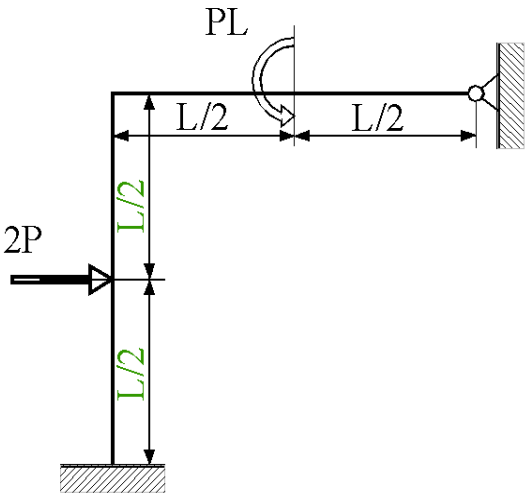


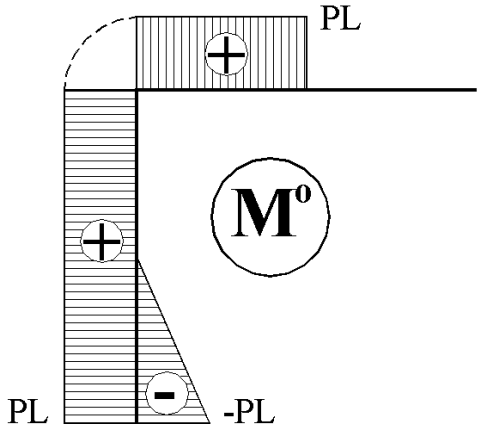


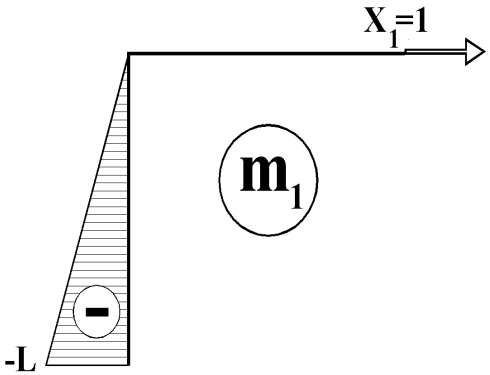


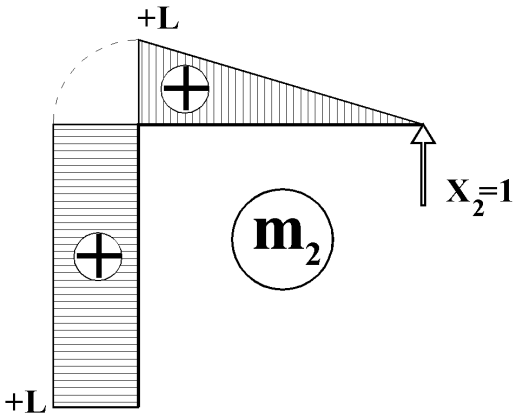
Problema nr. 3a.12.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



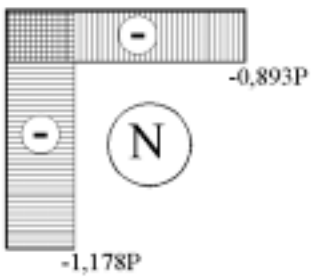


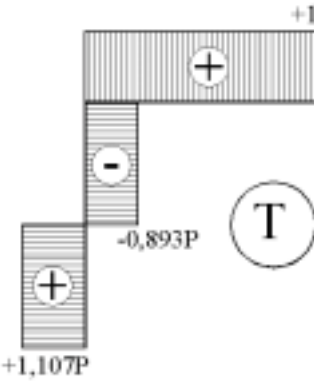


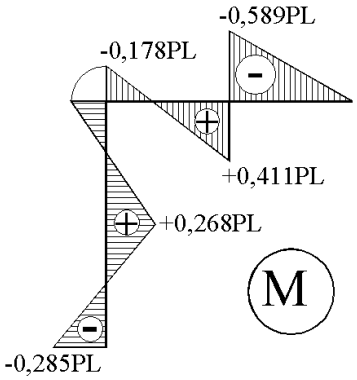


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{7}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{9}{8}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-0,893P	-1,178P	0,589PL	93 mm

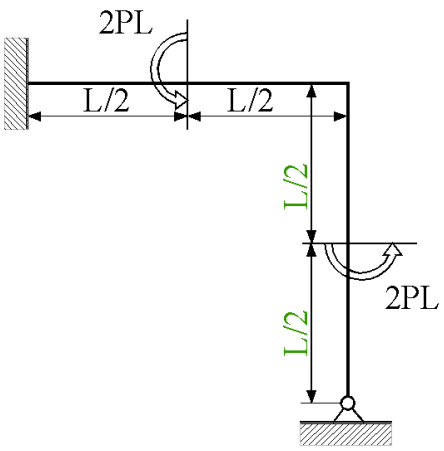


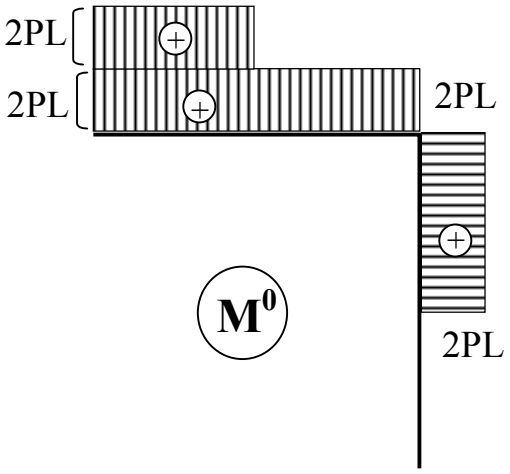


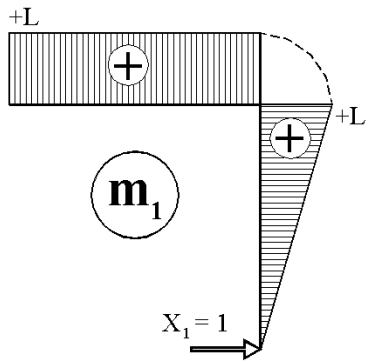


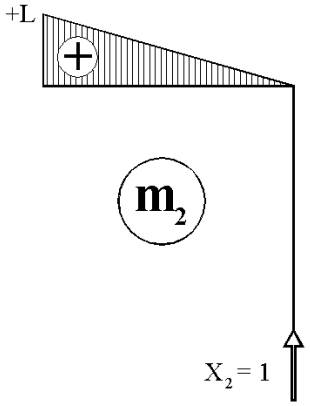
Problema nr. 3a.13.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



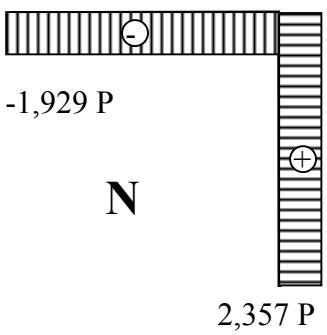


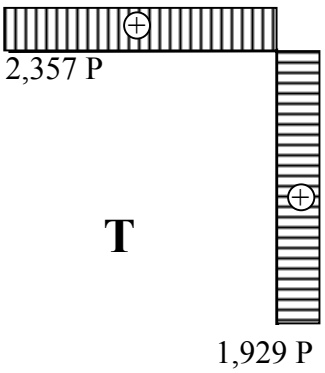


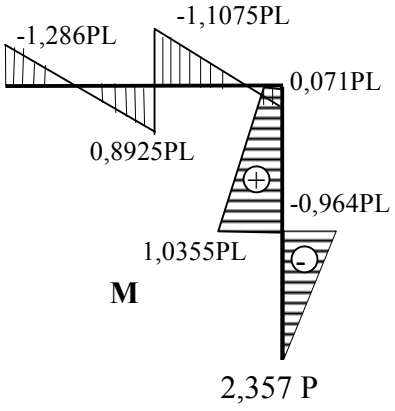


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{15}{4}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{7}{4}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	-1.929P	-2.357P	1,286 PL	120 mm

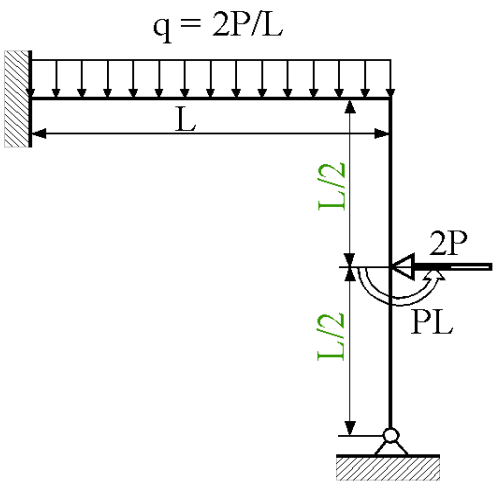


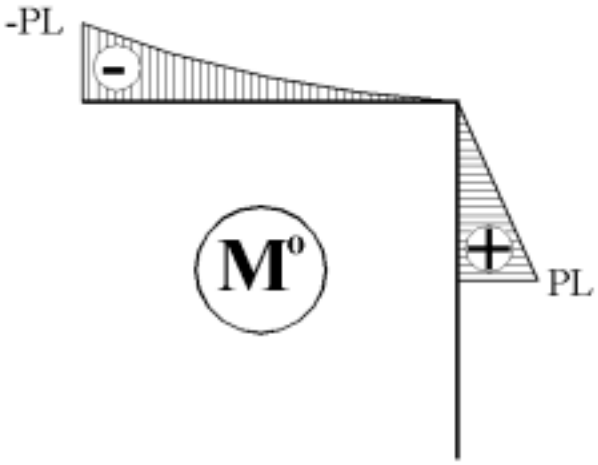


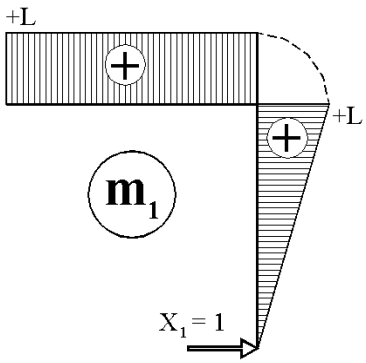


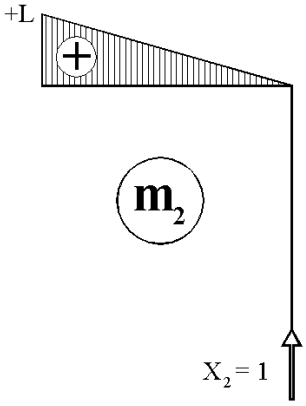
Problema nr. 3a.14.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



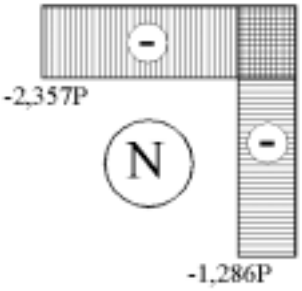


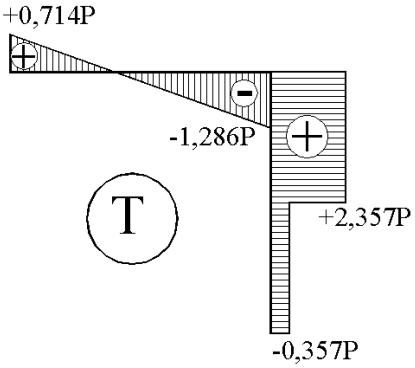


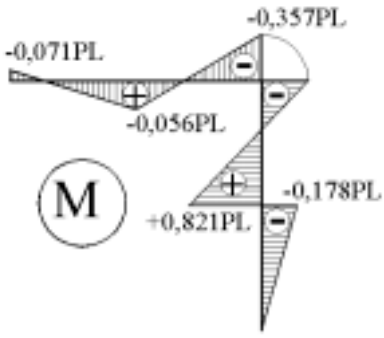


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{1}{6}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{1}{4}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	-0,357P	1,286P	0,821PL	104 mm

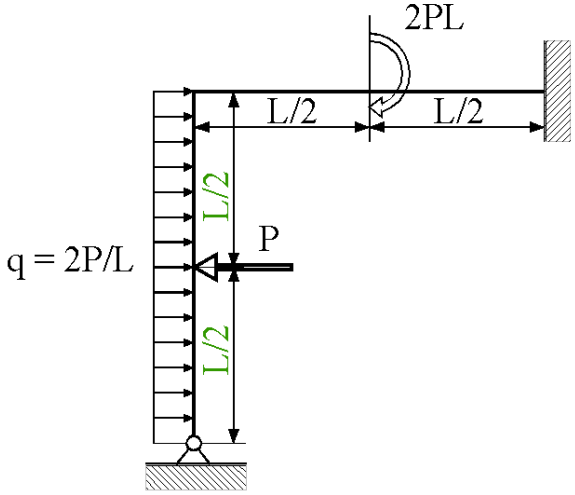


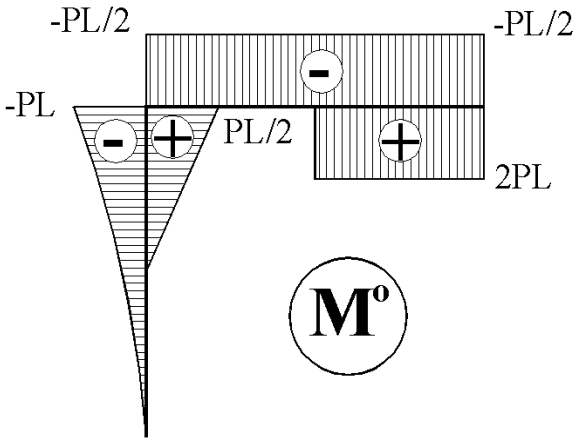


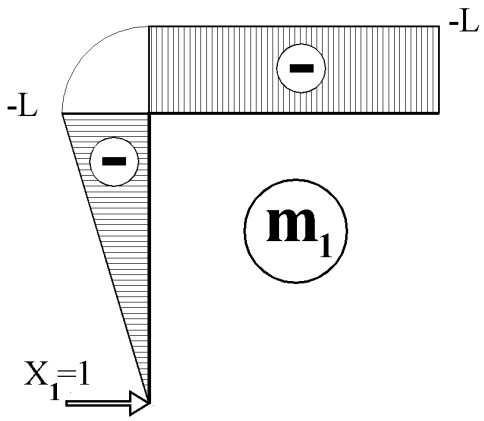


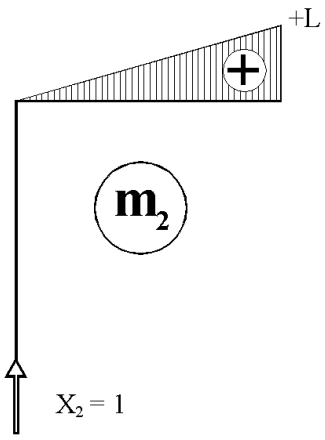
Problema nr. 3a.15.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



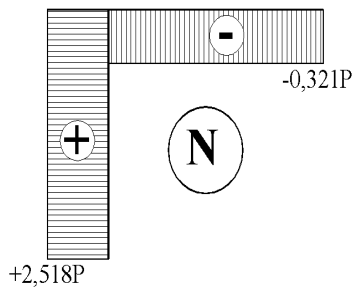


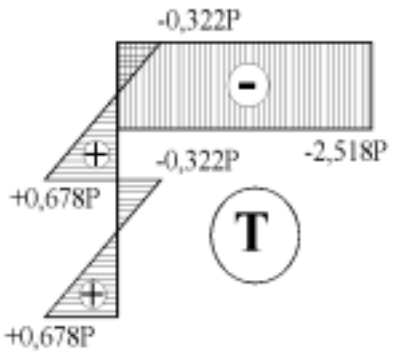


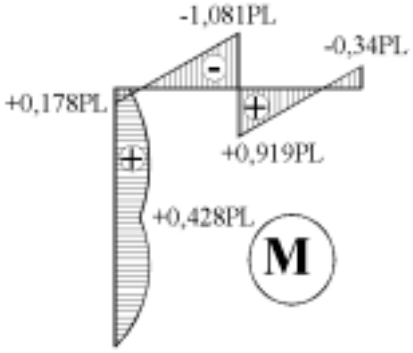


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{17}{48}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{L^3}{2\cdot E\cdot I}$	$\frac{L^3}{3\cdot E\cdot I}$	-0,678P	-2,518P	1,081PL	114 mm

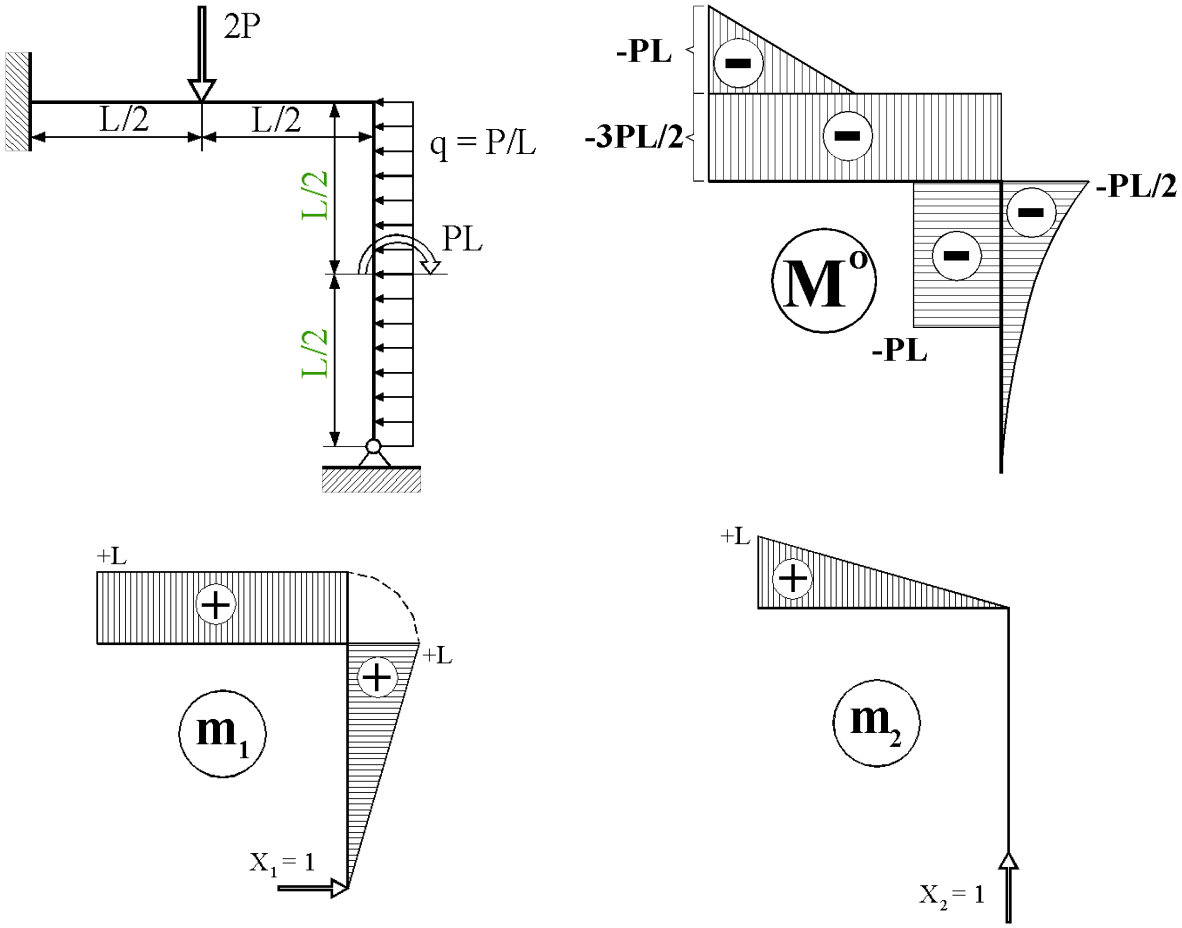






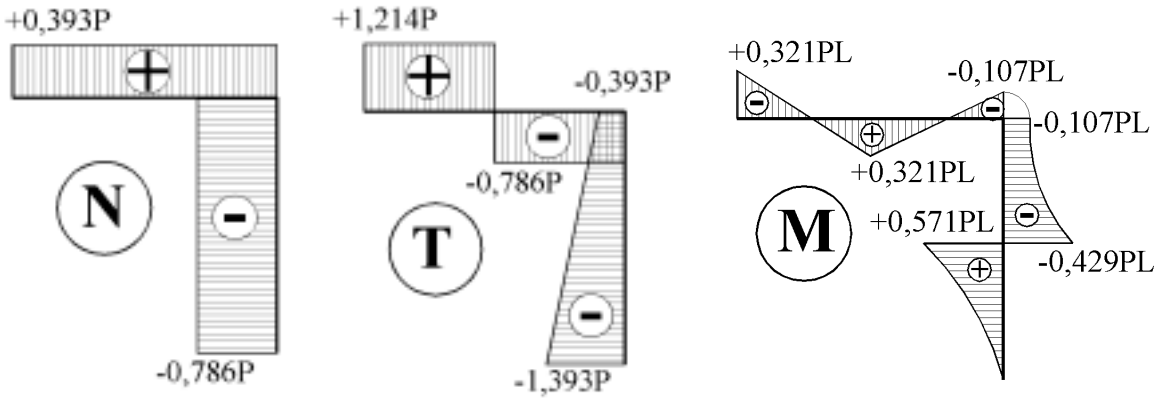
Problema nr. 3a.16.

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{9}{4}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{23}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	1,393P	0,786P	0,571PL	92 mm



MODEL 3b

SISTEM PLAN FORMAT DIN DOUĂ BARE DREPTE SUDATE DE TREI ORI STATIC NEDETERMINAT

Enunț

Se consideră un cadru plan format din două bare drepte sudate, de aceeaşi lungime şi rigiditate constantă, încastrat la capete, supus la încovoiere, forfecare şi întindere-compresiune, datorită acțiunii următoarelor tipuri *sarcini exterioare:* foțe concentrate, sarcini uniform distribuite şi cupluri de forțe (fig. 3b.1). Se cere să se determine reacțiunile, să se traseze diagramele de eforturi axiale, tăietoare şi încovoietoare, să se dimensioneze şi să se calculeze deplasarea şi rotirea secțiunii aflată la mijlocul barei orizontale.

Metode şi relații pentru rezolvarea problemei

În locul legăturilor suprimate se introduc *forțele şi momentele de legătură* (conform axiomei legăturilor), în total 6 reacțiuni, cunoscute ca poziție şi direcții, dar necunoscute ca modul (fig. 3b.2). Sistemul este *de trei ori static nederminat* deoarece se pot scrie trei ecuații de echilibru (gradul de nedeterminare este egal cu diferența dintre numărul total de necunoscute şi numărul de ecuații de echilibru din Mecanică*: GN=N-E)*.

a. Pentru rezolvarea problemei se foloseşte *metoda eforturilor*:

1. Se alege *sistemul de bază*, adică un *sistem static determinat* care se obține din sistemul real prin suprimarea unui număr de legături exterioare (în cazul de față se suprimă încastrarea care răpeşte corpului trei grade de libertate, şi anume, deplasările după Ox şi Oy, respectiv rotirea după Oz) astfel încât sistemul să devină static determinat înlocuindu-se aceste legături cu *necunoscutele static nedeterminate* X_1 , X_2 *respectiv* X_3 (fig. 3b.3).
2. Se exprimă deplasările din secțiunea unde au fost introduse necunoscutele static nedeterminate X_1 , X_2 şi X_3 , *în sistemul de bază,* aplicând principiul

suprapunerii efectelor pentru cele patru grupe de sarcini (*sarcinile exterioare*, $X_1=1$, $X_2=1$ *şi* respectiv $X_3=1$):

- deplasările δ_{10} , δ_{20} şi δ_{30} corespund *sarcinilor exterioare*, deplasări calculate după cele trei direcții ale necunoscutelor X_1 , X_2 şi X_3;
- deplasările corespunătoare unor sarcini unitare $X_1=1$ (δ_{11}, δ_{21} , δ_{31}) , $X_2=1$ (δ_{12}, δ_{22} , δ_{32}) respectiv $X_3=1$ (δ_{13}, δ_{23} , δ_{33}) determinate după cele trei direcții ale necunoscutelor X_1 , X_2 şi X_3 ;

3. Prin suprapunerea efectelor celor patru grupe de sarcini se obțin deplasările totale *în sistemul de bază,* care trebuie să fie *identice cu cele din sistemul real*:

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0$$

$$\delta_3 = \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$

Deplasările de mai sus se calculează prin metoda Mohr-Maxwell şi aplicând regula lui Vereşceaghin de integrare grafică (sau regula 1/3 a lui Simpson) şi luând în considerare numai solicitarea principală de încovoiere (se neglijează efectul eforturilor de întindere-compresiune şi tăietoare):

$$\delta_{i0} = \sum \int \frac{m_i M^o}{EI} dx \qquad i = 1,2,3; \qquad \delta_{ik} = \sum \int \frac{m_i m_k}{EI} dx \qquad i,k = 1,2,3$$

După determinarea valorilor deplasărilor δ_{i0} , δ_{ik} se rezolvă sistemul format din cele trei ecuații cu trei necunoscute X_1, X_2 şi X_3 .

Soluțiile X_1, X_2 şi X_3 se determină aplicând regula lui Cramer:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-\delta_{10}\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{30}\delta_{12}\delta_{23} - \delta_{20}\delta_{13}\delta_{33} + \delta_{30}\delta_{13}\delta_{22} + \delta_{20}\delta_{12}\delta_{33} + \delta_{10}\delta_{33}^2}{\delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} + 2\delta_{12}\delta_{23}\delta_{13} - \delta_{22}\delta_{13}^2 - \delta_{11}\delta_{23}^2 - \delta_{33}\delta_{12}^2};$$

$$X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-\delta_{20}\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{10}\delta_{13}\delta_{23} - \delta_{30}\delta_{12}\delta_{13} + \delta_{20}\delta_{13}^2 + \delta_{30}\delta_{12}\delta_{23} + \delta_{10}\delta_{12}\delta_{33}}{\delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} + 2\delta_{12}\delta_{23}\delta_{13} - \delta_{22}\delta_{13}^2 - \delta_{11}\delta_{23}^2 - \delta_{33}\delta_{12}^2};$$

$$X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-\delta_{30}\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{20}\delta_{12}\delta_{13} - \delta_{10}\delta_{12}\delta_{23} + \delta_{10}\delta_{22}\delta_{13} + \delta_{20}\delta_{11}\delta_{23} + \delta_{30}\delta_{12}^2}{\delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} + 2\delta_{12}\delta_{23}\delta_{13} - \delta_{22}\delta_{13}^2 - \delta_{11}\delta_{23}^2 - \delta_{33}\delta_{12}^2};$$

3. b. Diagramele de eforturi *N, T şi M* se pot trasa fie direct în sistemul real ținând seama că $H_A=X_1$, $V_A=X_2$, şi $M_A=X_3$, fie în sistemul de bază aplicând

principul suprapunerii efectelor celor patru grupe de sarcini (*sarcinile exterioare*, X_1, X_2 şi X_3):

$$N = N^o + n_1 \cdot X_1 + n_2 \cdot X_2 + n_3 \cdot X_3$$

$$T = T^o + t_1 \cdot X_1 + t_2 \cdot X_2 + t_3 \cdot X_3$$

$$M = M^o + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 + m_3 \cdot X_3$$ unde:

-N^o, T^o şi M^o reprezintă diagramele de eforturi axiale, tăietoare şi încovoietoare *din sistemul de bază* sub acțiunea sarcinilor exterioare;

- n_k, t_k şi m_k reprezintă diagramele de eforturi axiale, tăietoare şi încovoietoare *în sistemul de bază* sub acțiunea necunoscutei satatic nedeterminate $X_k=1$.

c. Deplasarea şi rotirea secțiunii C de la mijlocul barei orizontale se pot determina folosind acelaşi principiu al suprapunerii efectelor sarcinilor exterioare date şi a eforturilor static nedeterminate X_1, X_2 şi X_3, cunoscute acum, tot în sistemul de bază, folosind metoda energetică Mohr Maxwell.

$$\delta_C = \delta_{C0} + \delta_{C1} X_1 + \delta_{C2} X_2 + \delta_{C3} X_3$$

$$\varphi_C = \varphi_{C0} + \varphi_{C1} X_1 + \varphi_{C2} X_2 + \varphi_{C3} X_3$$

unde:

- δ_{C0} /φ_{C0}– este deplasarea respectiv rotirea secțiunii *C* pe direcția verticală sub acțiunea forțelor exterioare date în sistemul de bază:

$$\delta_{C0} = \sum \int \frac{m_C M^o}{EI} dx; \qquad \varphi_{C0} = \sum \int \frac{m^*_C M^o}{EI} dx$$

- δ_{C1} /φ_{C1} şi δ_{C2} /φ_{C2} – deplasările respectiv rotirile secțiunii C pe direcția verticală în sistemul de bază, sub acțiunea forțelor unitare $X_1=1$ respectiv $X_2=1$ în sistemul de bază:

$$\delta_{Ck} = \sum \int \frac{m_C m_k}{EI} dx; \quad \varphi_{Ck} = \sum \int \frac{m^*_C m_k}{EI} dx \qquad k = 1,2,3$$

Deplasarea pe direcție verticală / rotirea secțiunii C se determină desi astfel:

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\left[\int (M^0 + X_1 m_1 + X_2 m_2 + X_3 m_3) m_C dx\right] = \frac{1}{EI}\int M m_C dx$$

$$\varphi_C = \frac{1}{EI}\left[\int (M^0 + X_1 m^*_1 + X_2 m^*_2 + X_3 m^*_3) m^*_C dx\right] = \frac{1}{EI}\int M m^*_C dx$$

CAZ PARTICULAR

Se consideră cadrul plan format din două bare sudate încastrat în *A* şi *B,* încărcat cu un sistem de forțe ca figura 3b.1. **S**e cunosc*: P = 20 kN; L=1m,* secțiunea barei circulară de diametru *d*, tensiunea admisibilă σ_a*=150 MPa*, şi modulul de elasticitate al materialului *E= 2,1.10*^{6} *MPa.* **Se cere:**

a) să se determine reacțiunile din încastrările *A* şi *B* (V_A, H_A, M_A, V_B, H_B , M_B) ;

b) să se traseze diagramele de eforturi axiale (*N*), tăietoare *(T*) şi *de* eforturi încovoietoare *(M*);

c) să se dimensioneze bara la solicitarea principală de încovoiere;

d) să se calculeze deplasarea pe verticală şi rotirea secțiunii C

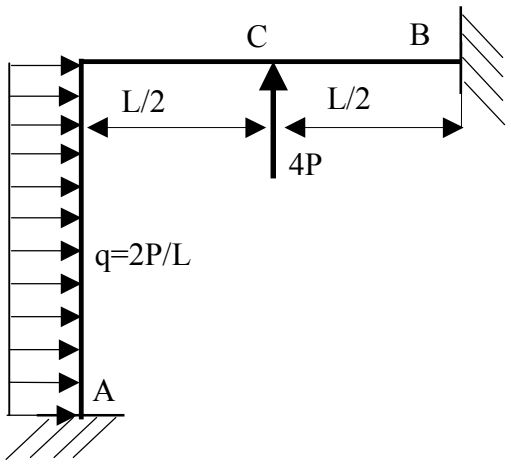


Fig. 3b.1

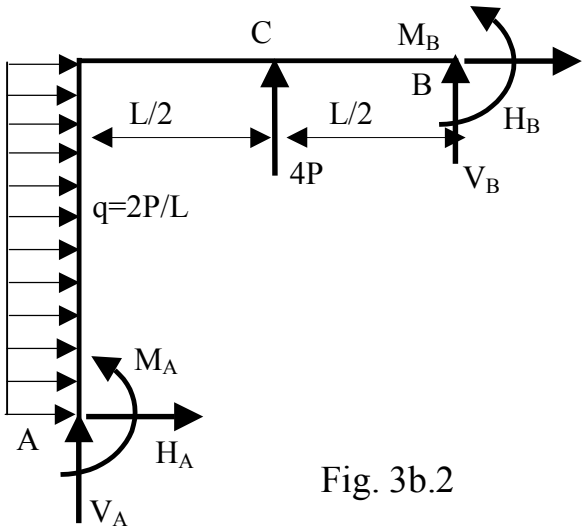


Fig. 3b.2

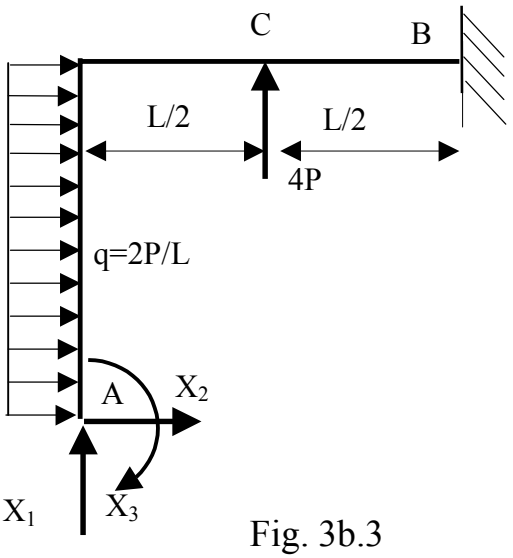


Fig. 3b.3

Rezolvare

Se alege *sistemul de bază* ca în fig. 3b.3 prin suprimarea încastrării din B şi introducerea necunoscutelor static nedeterminate X_1 X_2 şi X_3. Se obține un sistem static determinat pentru care se determină deplasările sub acțiunea celor 4 grupe de sarcini: *(4P, q), (X_1=1), (X_2=1)* şi *(X_3=1).*

Deplasările se calculează prin metoda Mohr-Maxwell conform relațiilor:

$$\delta_{10}=\sum\int\frac{m_1M^o}{EI}dx;\qquad \delta_{20}=\sum\int\frac{m_2M^o}{EI}dx;\qquad \delta_{30}=\sum\int\frac{m_3M^o}{EI}dx;$$

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{m_1^2}{EI}dx;\quad \delta_{12}=\delta_{21}=\sum\int\frac{m_1m_2}{EI}dx;\quad \delta_{13}=\delta_{31}=\sum\int\frac{m_1m_3}{EI}dx;$$

$$\delta_{22}=\sum\int\frac{m_2^2}{EI}dx;\quad \delta_{33}=\sum\int\frac{m_3^2}{EI}dx;\qquad \delta_{23}=\delta_{32}=\sum\int\frac{m_2m_3}{EI}dx;$$

- se construieşte diagrama de momente încovoietoare *(M^o)* pentru sistemul de bază în care acționează numai *sarcinile exterioare 4P* şi *q*;
- se construiesc diagramele de momente încovoietoare în sistemul de bază: când acționează numai sarcina *X_1=1(m_1)*, când acționează numai sarcina *X_2=1 (m_2)* respectiv când acționează numai sarcina *X_3=1 (m_3)* (fig.3b.4) .

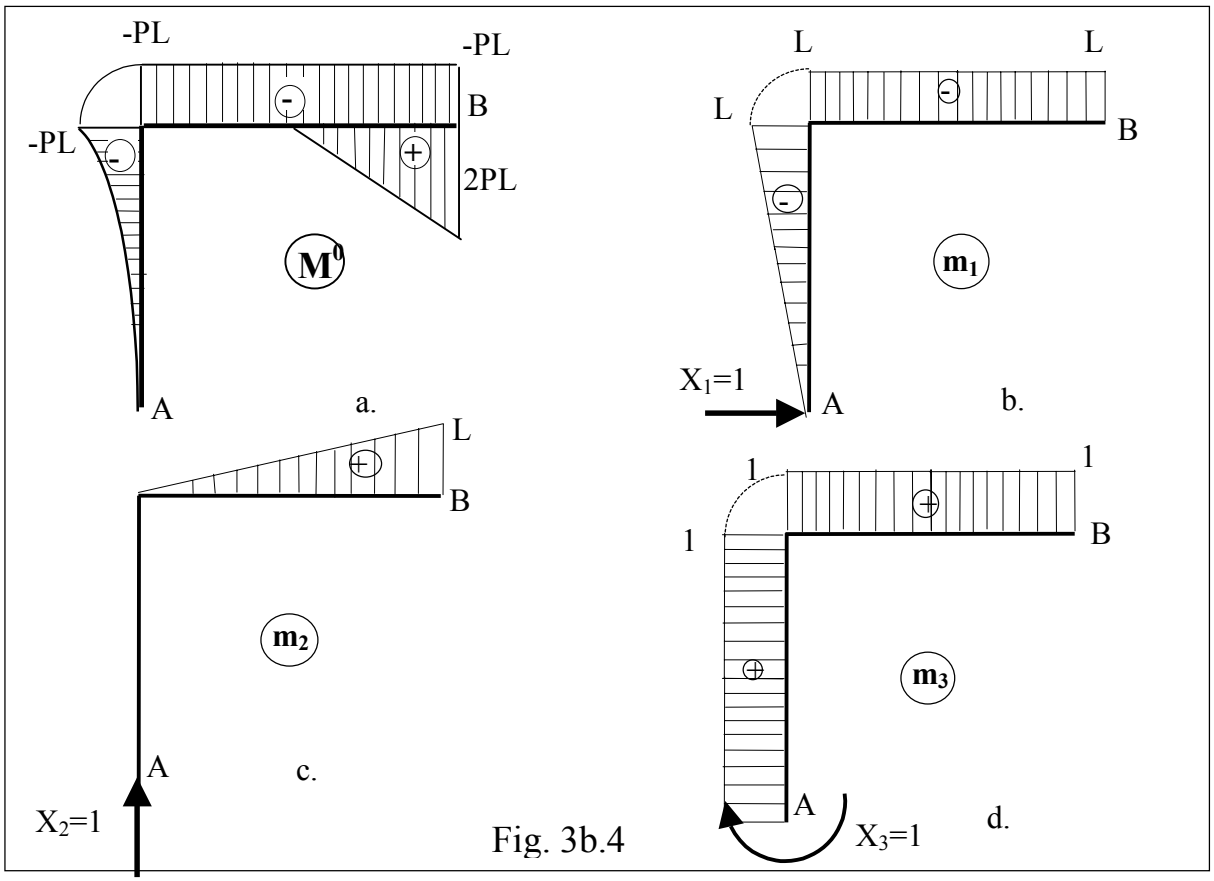


Fig. 3b.4

- Pentru calculul integralelor de mai sus se aplică regula lui Vereşceaghin (înmulțind ariile corespunzătoare din diagrama M^0 cu ordonatele corespunzătoare din diagrama m_k) :

$$\delta_{k0}=\sum A_i^{(0)}y_{Ci}^{(k)};\qquad \delta_{jk}=\sum A_j^{(j)}y_{Cj}^{(k)}$$

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\cdot L\cdot(-PL)\cdot\left(-\frac{3L}{4}\right)+L(-PL)(-L)+\frac{1}{2}\frac{L}{2}(2PL)(-L)\right]=-\frac{3PL^3}{4EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\cdot L\cdot(-PL)\cdot 0+L(-PL)\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\frac{L}{2}(2PL)\frac{5L}{6}\right]=-\frac{1PL^3}{12EI}$$

$$\delta_{30}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\cdot L\cdot(-PL)\cdot 1+L(-PL)\cdot 1+\frac{1}{2}\frac{L}{2}(2PL)\cdot 1\right]=-\frac{5}{6}\frac{PL^2}{EI}$$

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{m_1^2}{EI}dx=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot L\cdot L\cdot\frac{2L}{3}+L\cdot L\cdot L\right]=\frac{4L^3}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\sum\int\frac{m_1 m_2}{EI}dx=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}L\cdot L\cdot(-L)\right]=-\frac{L^3}{2EI}$$

$$\delta_{13}=\delta_{31}=\sum\int\frac{m_1 m_3}{EI}dx=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}L\cdot(-L)\cdot 1+L\cdot(-L)\cdot 1\right]=-\frac{3L^2}{2EI}$$

$$\delta_{22}=\sum\int\frac{m_2^2}{EI}dx=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot L\cdot L\cdot\frac{2L}{3}\right]=\frac{L^3}{3EI}$$

$$\delta_{23}=\delta_{32}=\sum\int\frac{m_2 m_3}{EI}dx=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}L\cdot L\cdot 1\right]=\frac{L^2}{2EI}$$

$$\delta_{33}=\sum\int\frac{m_3^2}{EI}dx=\frac{1}{EI}[2\cdot L\cdot 1\cdot 1]=2\frac{L}{EI}$$

Înlocuind valorile obținute în ecuațiile canonice rezultă:

$$\begin{cases}\frac{4L^3}{3EI}X_1-\frac{L^3}{2EI}X_2-\frac{3L^2}{2EI}X_3=-\frac{3PL^3}{4EI}\\ -\frac{L^3}{2EI}X_1+\frac{L^3}{3EI}X_2+\frac{1}{2}\frac{L^2}{EI}X_3=\frac{PL^3}{12EI}\\ -\frac{3L^2}{2EI}X_1+\frac{1L^2}{2EI}X_2+2\frac{L}{EI}X_3=\frac{5PL^2}{6EI}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16X_1-6X_2-18\frac{X_3}{L}=-9P\\ -6X_1+4X_2+6\frac{X_3}{L}=P\\ -9X_1+3X_2+12\frac{X_3}{L}=5P\end{cases}$$

$$\Delta=48;\qquad \Delta_1=-72P;\qquad \Delta_2=-72P;\qquad \Delta=-16P;$$

$$\Rightarrow\qquad X_1=-1{,}5P;\qquad X_2=-1{,}5P;\qquad \frac{X_3}{L}=-0{,}333P$$

Reacțiunile din încastrările *A* şi *B* sunt:

$H_A = X_1 = -1{,}5\ P;\qquad V_A = X_2 = -1{,}5\ P;$

$M_A = -X_3 = 0{,}333\ PL;$

$H_B = -H_A - qL = -0{,}5\ P;$

$V_B = -V_A - 4P = -2{,}5\ P\ ;$

$M_B = -M_A - 2P\cdot L/2 + 4P\cdot L/2 = 0{,}667\ PL$

4. Diagramele de eforturi N, T şi M

Aceste diagrame se trasează direct şi sunt prezentate în fig. 3b.5, 3b.6 şi 3b.7:

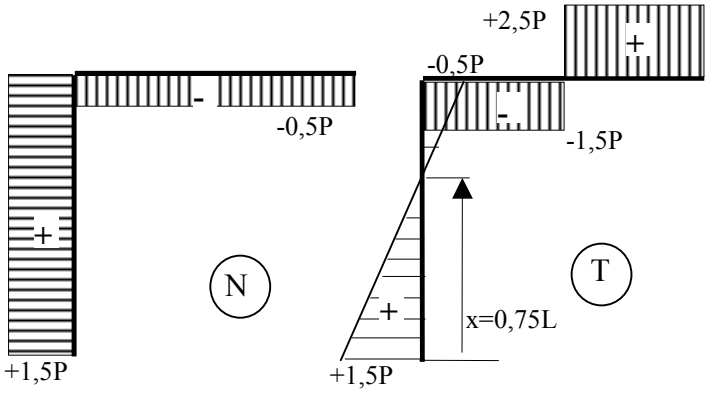


Fig. 3b.5 Fig. 3b.6 Fig. 3b.7

5. Dimensionarea barei la încovoiere

Din diagrama M (fig.3.5) se determină momentul maxim $M_{max}=0,667PL$

Relația de dimensionare la solicitarea de încovoiere este:

$$\frac{\pi d^3}{32}=\frac{M_{iy\,max}}{\sigma_a}\Rightarrow d=\sqrt[3]{\frac{32M_{iy\,max}}{\pi\sigma_a}}=\sqrt[3]{\frac{32\cdot 0,667\cdot 2\cdot 10^4\cdot 10^3}{\pi\cdot 150}}=96,75mm$$

6. Calculul deplasării şi rotirii secțiunii de la mijlocul barei orizontale

Pentru calculul deplasării şi rotirii secțiunii *C* de la mijlocul barei orizontale se foloseşte metoda Mohr Maxwell:

$$\delta_C=\int\frac{Mm_C}{EI}dx;\qquad \varphi_C=\int\frac{Mm_C^*}{EI}dx$$

unde *M* este diagrama de eforturi încovoietoare din sistemul real (fig. 3b.7) iar m_C şi m^*_C reprezintă diagrama de eforturi încovoietoare din sistemul de bază când în secțiunea C acționează o forță unitară verticală $F_y=1$ respectiv când în secțiunea C acționează un cuplu unitar $M_z=1$. (fig. 3b.8, 9)

Aplicând regula lui Simpson rezultă:

$$\delta_C=\int\frac{m_C M}{EI}dx=\frac{1}{6EI}\cdot\frac{L}{2}\left[(-0,583PL)\cdot(0)+4\cdot(0,042PL)\cdot(-0,25L)+(0,667PL)\cdot(-0,5L)\right]$$

$$\delta_C=-312,9\cdot 10^{-3}\frac{PL^3}{EI}$$

$$\varphi_C=\int\frac{m^*_C M}{EI}dx=\frac{1}{6EI}\cdot\frac{L}{2}\left[(-0,583PL)\cdot(1)+4\cdot(0,042PL)\cdot(1)+(0,667PL)\cdot(1)\right]$$

$$\varphi_C=21\cdot 10^{-3}\frac{PL^3}{EI}$$

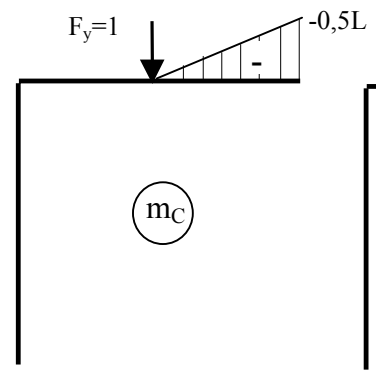


Fig. 3b.8

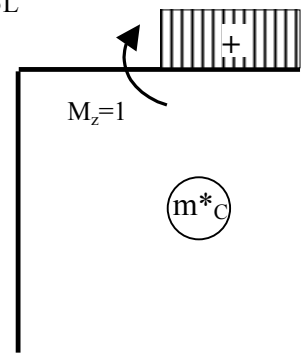


Fig. 3b.9

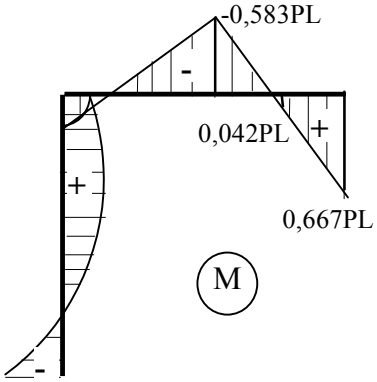


Fig. 3b.10

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 3b UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 3b se calculează separat coeficienții deplasărilor α şi β din formulele: $\delta_{i0} = \alpha \frac{PL^3}{EI}$; $\delta_{ij} = \beta \frac{PL^3}{EI}$ *i, j=1,2,3* pentru un număr de cazuri simple prezentate în continuare, apoi se foloseşte principiul suprapunerii efectelor pentru rezolvarea problemei dorite. Pentru calculul deplasărilor şi necunoscutelor X_1, X_2 şi X_3 s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Nr.	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**q1**	**q2**	**q3**	**q4**	**q5**	**q6**
Crt	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0

Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	
q7	**q8**	**q9**	**N1**	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**	**N6**	**N7**	**N8**	**N9**	**N10**	**N11**	**N12**	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

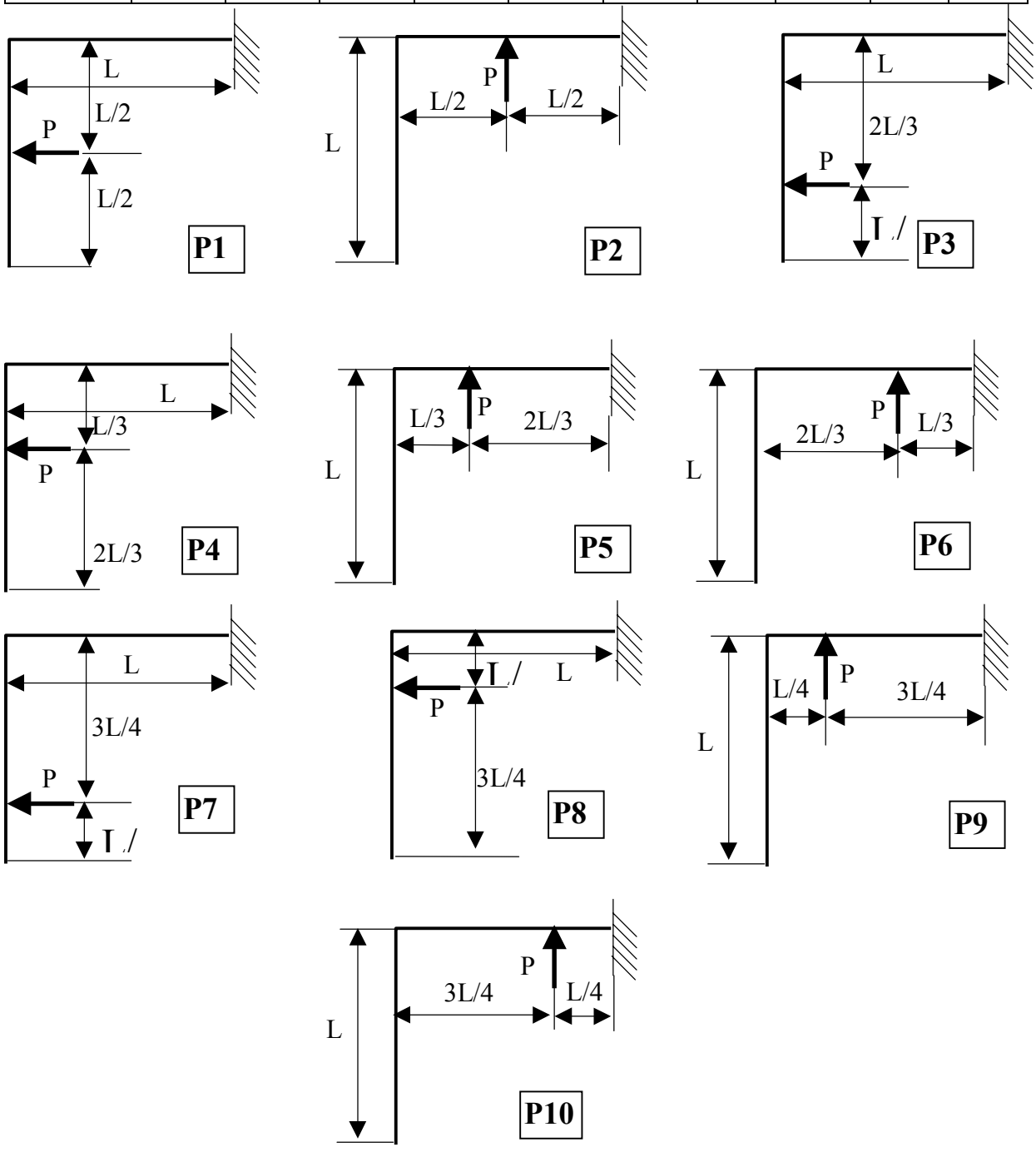
DATE DE IEŞIRE

AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ
α_1 **δ_{10}**	**α_2** **δ_{20}**	**α_3** **δ_{30}**	**β_1** **δ_{11}**	**β_2** **$\delta_{12}=\delta_{12}$**	**β_3** **δ_{13}**	**β_3** **δ_{22}**	**β_3** **$\delta_{23}=\delta_{32}$**	**β_3** **δ_{33}**	**X_1/P**	**X_2/P**	**X_3/PL**
-35/24	-5/6	-11/12	5/3	1	2	4/3	3/2	3	1,208	0,071	-0,314

CALCULUL COEFICIENȚILOR PENTRU CAZURI SIMPLE DE ÎNCĂRCARE A CADRULUI PLAN FORMAT DIN DOUĂ BARE

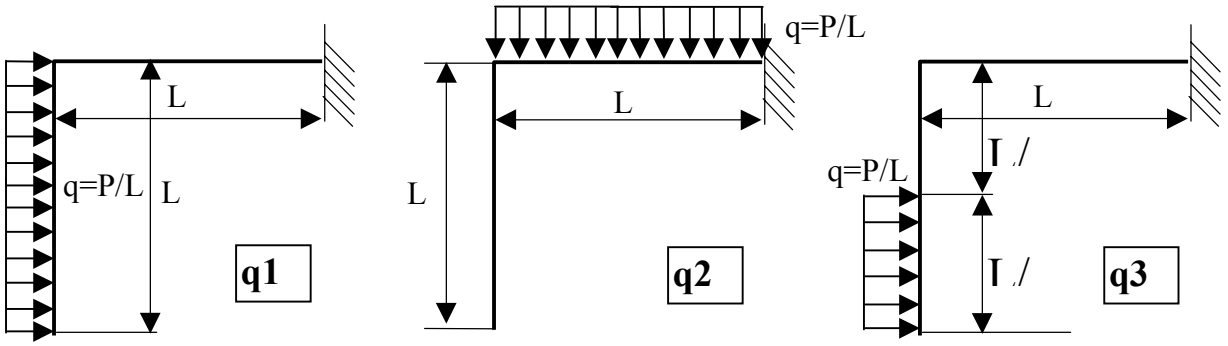
a. Valorile coeficienților pentru 10 cazuri de forțe concentrate

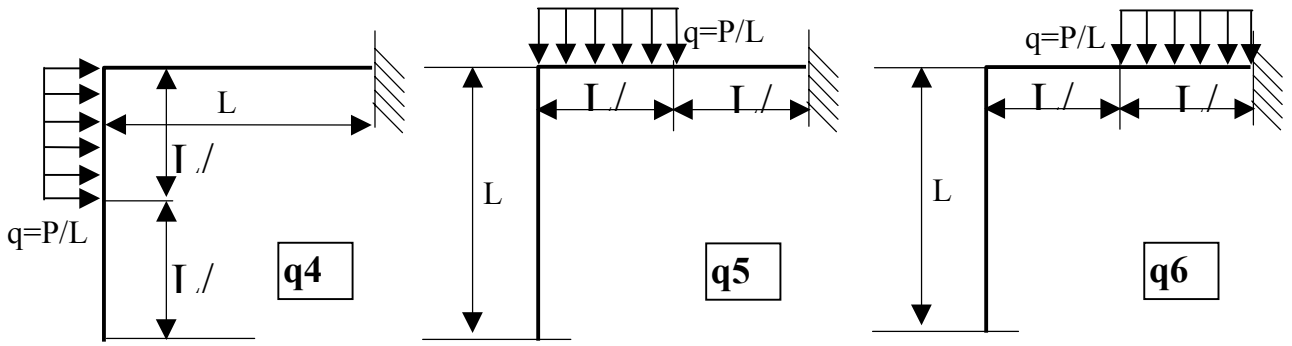
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
$\delta_{10}*EI/PL^3$	$-\frac{29}{48}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{68}{81}$	$-\frac{31}{81}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{123}{128}$	$-\frac{107}{384}$	$-\frac{9}{32}$	$-\frac{1}{32}$
$\delta_{20}*EI/PL^3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{14}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{11}{384}$
$\delta_{30}*EI/PL^2$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{33}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{32}$

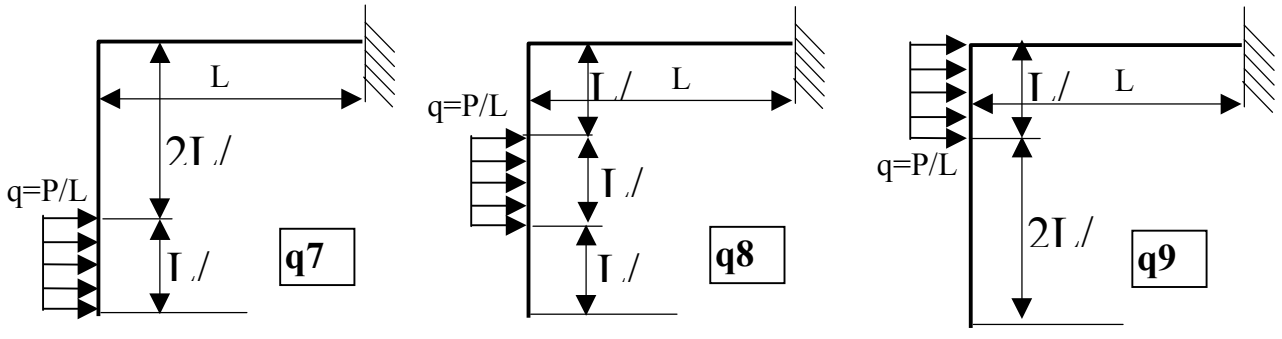


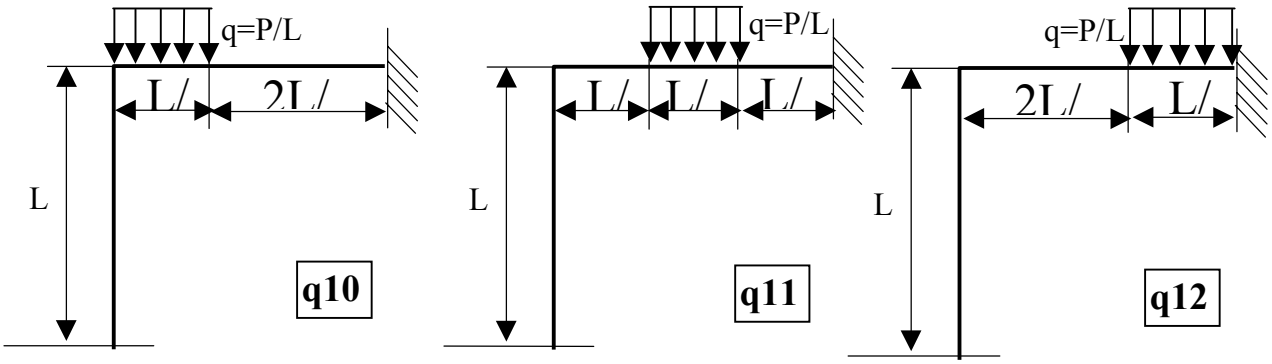
b. Valorile coeficienților pentru 12 cazuri de forțe distribuite

	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9	q10	q11	q12
$\delta_{10}*EI/PL^3$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{703}{1944}$	$\frac{393}{1944}$	$\frac{119}{1944}$	$\frac{19}{162}$	$\frac{7}{162}$	$\frac{1}{162}$
$\delta_{20}*EI/PL^3$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{41}{384}$	$-\frac{7}{384}$	$-\frac{5}{36}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{36}$	$-\frac{163}{1944}$	$-\frac{69}{1944}$	$-\frac{11}{1944}$
$\delta_{30}*EI/PL^2$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{25}{48}$	$-\frac{7}{48}$	$-\frac{7}{48}$	$-\frac{1}{48}$	$-\frac{32}{81}$	$-\frac{67}{324}$	$-\frac{5}{81}$	$-\frac{19}{162}$	$-\frac{7}{162}$	$-\frac{1}{162}$



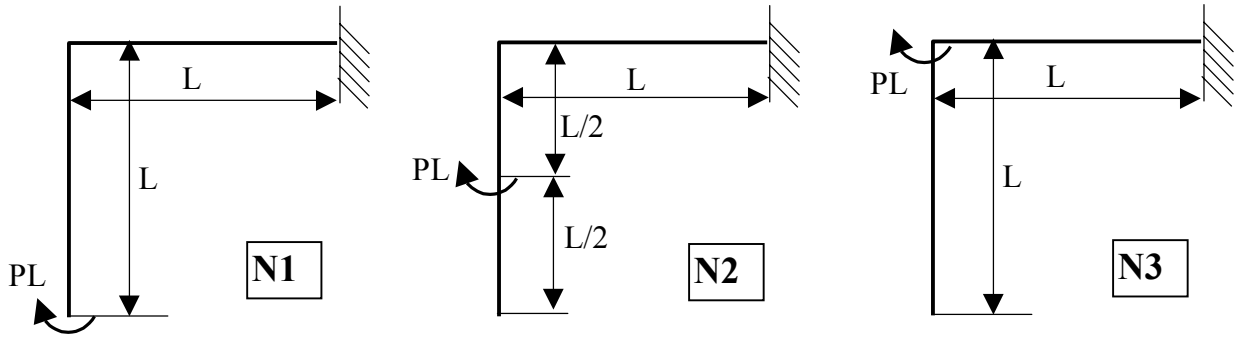


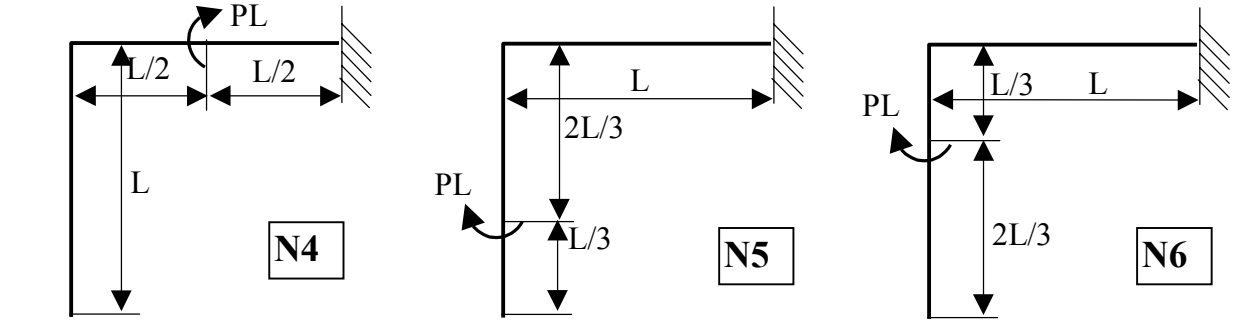


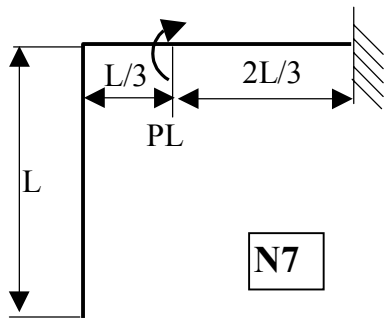


c. Valorile coeficienților pentru 12 cazuri de cupluri de forțe

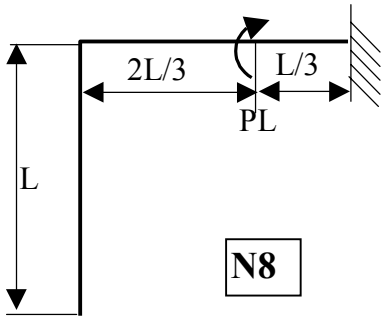
	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	N11	N12
δ_{10}*EI/PL^3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{8}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{9}$	$-\frac{23}{18}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{47}{32}$	$-\frac{39}{32}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
δ_{20}*EI/PL^3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{7}{32}$
δ_{30}*EI/PL^2	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$



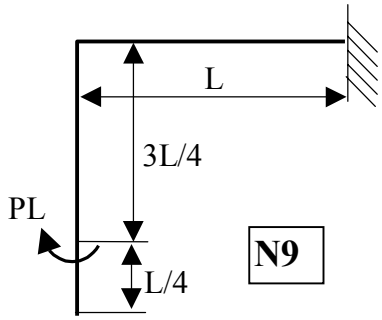




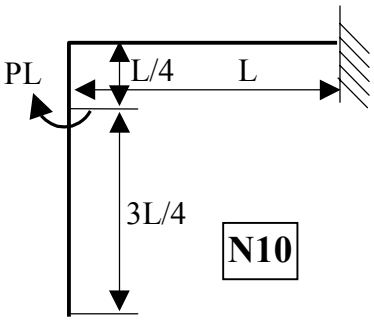
N7



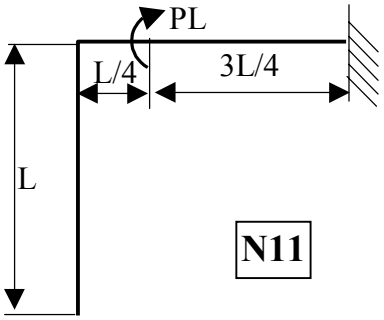
N8



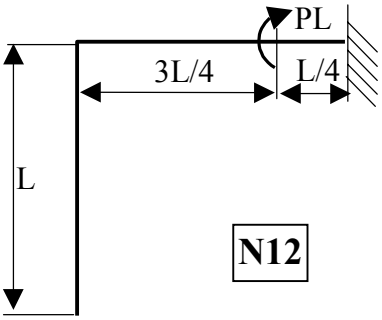
N9



N10



N11



N12

MODEL 3c

SISTEM PLAN DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINAT FORMAT DIN TREI BARE DREPTE SUDATE

Enunț

Se consideră un cadru plan format din trei bare drepte sudate, de aceeaşi lungime şi rigiditate constantă, încastrat un capăt şi articulat la celălalt, supus la încovoiere, forfecare şi întindere-compresiune sub acțiunea unor sarcini exterioare, cum ar fi: forțe concentrate, sarcini uniform distribuite şi cupluri de forțe (fig. 3c.1). Se cere să se determine reacțiunile, să se traseze diagramele de eforturi axiale, tăietoare şi încovoietoare, să se dimensioneze şi să se calculeze deplasarea şi rotirea secțiunii aflată la mijlocul barei orizontale.

Metode şi relații pentru rezolvarea problemei

În locul legăturilor cu mediul fix se introduc *forțele şi momentele de legătură* (conform axiomei legăturilor), în total 5 reacțiuni cunoscute ca poziție şi direcții, dar necunoscute ca modul (fig. 3c.2). Sistemul este *de două ori static nederminat* deoarece se pot scrie trei ecuații de echilibru (gradul de nedeterminare se determină ca diferență dintre numărul total de necunoscute şi numărul de ecuații de echilibru din Mecanică*: GN=N-E)*.

a. Pentru rezolvarea problemei se foloseşte *metoda eforturilor* care cuprinde următoarele etape:

1. Se alege *sistemul de bază*, adică un *sistem static determinat* ce se obține din sistemul real prin suprimarea unui număr de legături exterioare (în cazul de față se suprimă articulația care răpeşte corpului două grade de libertate, şi anume, deplasările după Ox şi Oy) astfel încât acesta să devină static determinat şi se înlocuiesc aceste legături cu necunoscutele static nedeterminate X_1 şi X_2 (conform axiomei legăturilor) (fig. 3c.3).

2. Se exprimă *deplasările în sistemul de bază,* în secțiunea unde au fost introduse necunoscutele static nedeterminate X_1 şi X_2 aplicând principiului suprapunerii efectelor pentru cele trei seturi de sarcini (*sarcinile exterioare*, $X_1=1$ respectiv $X_2=1$):

- deplasările δ_{10} şi δ_{20} corespund *sarcinilor exterioare*, deplasări calculate după cele două direcții ale necunoscutelor X_1 şi X_2;
- deplasările corespunătoare unor sarcini unitare $X_1=1$ (δ_{11}, δ_{21}) respectiv respectiv $X_2=1$ (δ_{12}, δ_{22}), calculate după cele două direcții ale necunoscutelor X_1 şi X_2 ;

Prin suprapunerea efectelor celor trei grupe de sarcini se obțin deplasările totale *în sistemul de bază,* care trebuie să fie *identice cu cele din sistemul real*:

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

3. Deplasările de mai sus se calculează prin metoda Mohr-Maxwell şi aplicând regula lui Vereşceaghin de integrare grafică (sau regula 1/3 a lui Simpson) şi luând în considerare numai solicitarea principală de încovoiere (se neglijează efectul eforturilor de întindere-compresiune şi eforturile tăietoare):

$$\delta_{i0} = \sum \int \frac{m_i M^o}{EI} dx \qquad i = 1,2; \qquad \delta_{ik} = \sum \int \frac{m_i m_k}{EI} dx \qquad i,k = 1,2$$

După determinarea valorilor deplasărilor δ_{i0} , δ_{ik} se rezolvă sistemul format din cele două ecuații obținând cele două necunoscute cu ajutorul regulii lui Cramer:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -\delta_{10} & \delta_{12} \\ -\delta_{20} & \delta_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\delta_{20}\delta_{12} - \delta_{10}\delta_{22}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}; \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{11} & -\delta_{10} \\ \delta_{21} & -\delta_{20} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\delta_{10}\delta_{21} - \delta_{20}\delta_{11}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}$$

b. Diagramele de eforturi *N, T şi M* se pot trasa fie direct în sistemul real ținând seama că $H_B=X_1$ şi $V_B=X_2$, fie aplicând principul suprapunerii efectelor celor trei seturi de sarcini în sistemul de bază după cum urmează:

$$N = N^o + n_1 \cdot X_1 + n_2 \cdot X_2$$

$$T = T^o + t_1 \cdot X_1 + t_2 \cdot X_2$$

$$M = M^o + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 \qquad \text{unde:}$$

- N^o, T^o şi M^o reprezintă diagramele de eforturi axiale, tăietoare şi încovoietoare *din sistemul de bază* datorate acțiunii *sarcinilor exterioare;*
- n_k, t_k şi m_k reprezintă diagramele de eforturi axiale, tăietoare respectiv încovoietoare *din sistemul de bază* datorate acțiunii forțelor $X_1=1$, $X_2=1$

c. Deplasarea şi rotirea secțiunii C de la mijlocul barei orizontale se pot determina folosind acelaşi principiu al suprapunerii efectelor sarcinilor exterioare date şi a eforturilor static nedeterminate (X_1 şi X_2), acum cunoscute, pentru sistemul de bază, prin metoda energetică Mohr Maxwell.

Deplasarea pe direcție verticală respectiv rotirea secțiunii C se determină cu relațiile:

$$\delta_C = \delta_{C0} + \delta_{C1} X_1 + \delta_{C2} X_2$$
$$\varphi_C = \varphi_{C0} + \varphi_{C1} X_1 + \varphi_{C2} X_2 \qquad \text{unde:}$$

- δ_{C0} /φ_{C0}– este deplasarea respectiv rotirea secțiunii *C* pe direcția verticală sub acțiunea forțelor exterioare date în sistemul de bază:

$$\delta_{C0} = \sum \int \frac{m_C M^o}{EI} dx; \qquad \varphi_{C0} = \sum \int \frac{m^*_C M^o}{EI} dx$$

- δ_{C1} /φ_{C1} şi δ_{C2} /φ_{C2} – deplasările respectiv rotirile secțiunii C pe direcția verticală în sistemul de bază, sub acțiunea forțelor unitare $X_1=1$ respectiv $X_2=1$ în sistemul de bază:

$$\delta_{Ck} = \sum \int \frac{m_C m_k}{EI} dx; \quad \varphi_{Ck} = \sum \int \frac{m^*_C m_k}{EI} dx \qquad k = 1,2$$

Deplasarea pe direcție verticală / rotirea secțiunii A se determină folosind metoda Mohr-Maxwell astfel:

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\left[\int (M^0 + X_1 m_1 + X_2 m_2) m_C dx\right] = \frac{1}{EI}\int M m_C dx$$

$$\varphi_C = \frac{1}{EI}\left[\int (M^0 + X_1 m^*_1 + X_2 m^*_2) m^*_C dx\right] = \frac{1}{EI}\int M m^*_C dx$$

CAZ PARTICULAR

Se consideră cadrul plan format din trei bare sudate încastrat în *A* şi articulat în *B,* încărcat cu un sistem de forțe ca figura 3c.1. **S**e cunosc*: P = 20 kN; L=1m,* secțiunea barei circulară de diametru *d*, tensiunea admisibilă şi modulul de elasticitate al materialului: σ_a*=150 MPa*, *E= 2,1.10*^{6} *MPa.* Se cer:

a) reacțiunile din încastrarea *A* şi articulația *B* (*V_A, H_A, M_A, V_B, H_B) ;*

b) să se traseze diagramele de eforturi: *N* (eforturi axiale), *T* (eforturi tăietoare) şi *M* (eforturi încovoietoare);

c) să se dimensioneze bara la solicitarea principală de încovoiere;

d) să se calculeze deplasarea pe verticală şi rotirea secțiunii C de la mijlocul barei orizontale

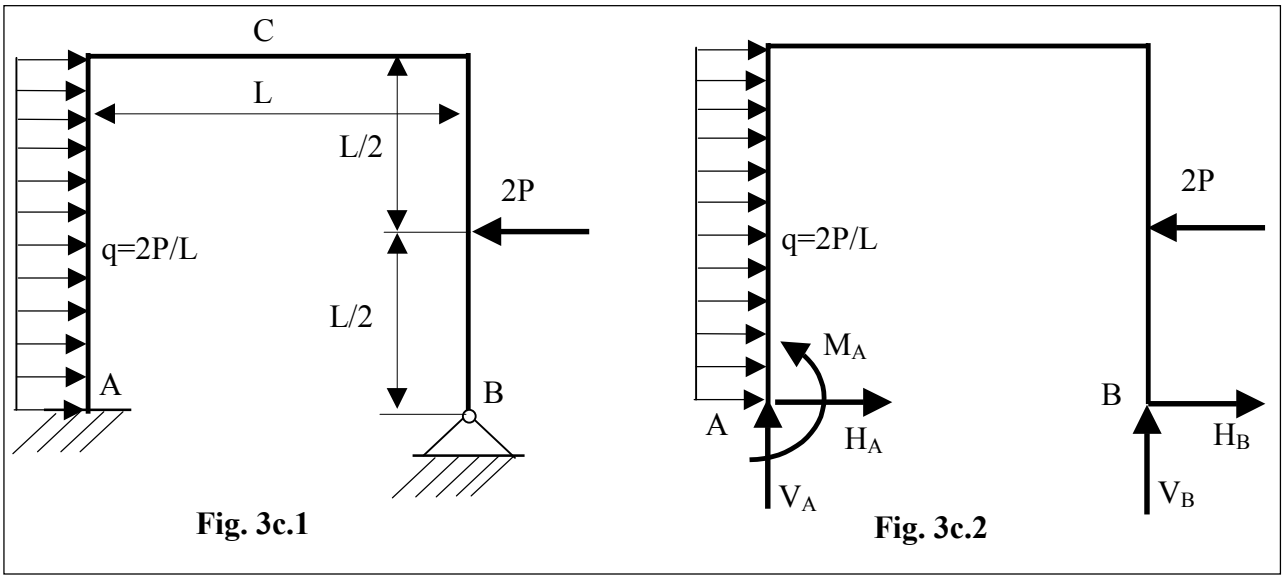


Fig. 3c.1

Fig. 3c.2

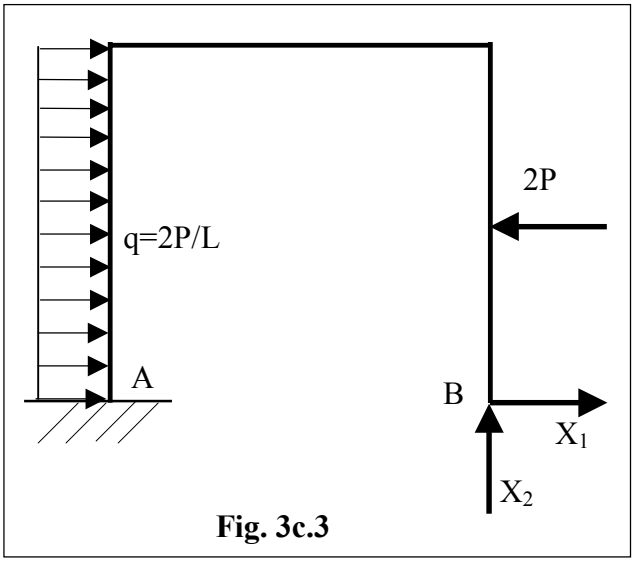


Fig. 3c.3

Rezolvare

a. Sistemul fiind de două ori static nedeterminat *se alege sistemul de bază* ca în fig. 3c.3, prin suprimarea articulației B şi introducerea necunoscutelor static nedeterminate X_1 şi X_2. Se obține un sistem static determinat pentru care vom determina deplasările sub

acțiunea a trei seturi de sarcini : *(2P şi q), (X_1=1)* şi *(X_2=1)*. Ecuațiile canonice ale *metodei eforturilor* se scriu în acest caz:

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0$$

Deplasările se calculează folosind metoda Mohr-Maxwell :

$$\delta_{10} = \sum \int \frac{m_1 M^o}{EI} dx; \qquad \delta_{20} = \sum \int \frac{m_2 M^o}{EI} dx;$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{m_1^2}{EI} dx; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx; \quad \delta_{22} = \sum \int \frac{m_2^2}{EI} dx;$$

Pentru calculul integralelor de mai sus se foloseşte regula lui Vereşceaghin şi se parcurg următorii paşi:

- se construieşte diagrama de momente încovoietoare *(M^o)* pentru sistemul de bază în care acționează numai sarcinile exterioare *2P* şi *q* (fig.3c.4);
- se construiesc diagramele de momente încovoietoare *(m_1)* pentru sistemul de bază în care acționează numai sarcina $X_1=1$, respectiv *(m_2)* pentru sistemul de bază în care acționează numai sarcina $X_2=1$ (fig.3c.4) .
- se calculează integralele de mai sus aplicând regula lui Vereşceaghin de integrare grafo-analitică, înmulțind ariile corespunyătoare din diagrama M^0 *(m_j)* cu ordonatele corespunzătoare din diagrama m_k: $\delta_{k0} = \sum A_i^{(0)} y_{Ci}^{(k)}; \qquad \delta_{jk} = \sum A_j^{(j)} y_{Cj}^{(k)}$

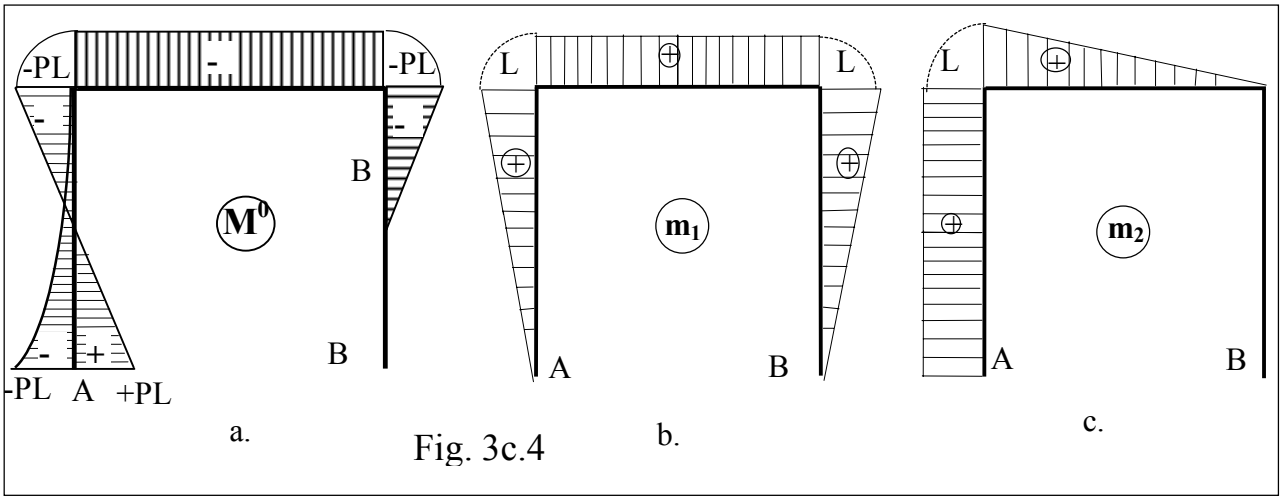


Fig. 3c.4

$$\delta_{10}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\frac{L}{2}(-PL)\frac{5L}{6}+L(-PL)L+\frac{1}{2}\frac{L}{2}(-PL)\frac{5L}{6}+\frac{1}{2}\frac{L}{2}(PL)\frac{L}{6}+\frac{1}{3}\cdot L\cdot(-PL)\cdot\frac{L}{4}\right]=-\frac{35PL^3}{24EI}$$

$$\delta_{20}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\frac{L}{2}(-PL)\cdot 0+L(-PL)\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\frac{L}{2}(-PL)L+\frac{1}{2}\frac{L}{2}(PL)L+\frac{1}{3}\cdot L\cdot(-PL)\cdot L\right]=-\frac{5PL^3}{6EI}$$

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{m_1^2}{EI}dx=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot L\cdot L\cdot\frac{2L}{3}+L\cdot L\cdot L+\frac{1}{2}\cdot L\cdot L\cdot\frac{2L}{3}\right]=\frac{5L^3}{3EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\sum\int\frac{m_1 m_2}{EI}dx=\frac{1}{EI}\left[L\cdot L\cdot\frac{L}{2}+\frac{1}{2}L\cdot L\cdot L\right]=\frac{L^3}{EI}$$

$$\delta_{22}=\sum\int\frac{m_2^2}{EI}dx=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot L\cdot L\cdot\frac{2L}{3}+L\cdot L\cdot L\right]=\frac{4L^3}{3EI}$$

Înlocuind valorile obținute în ecuațiile canonice rezultă următorul sistem:

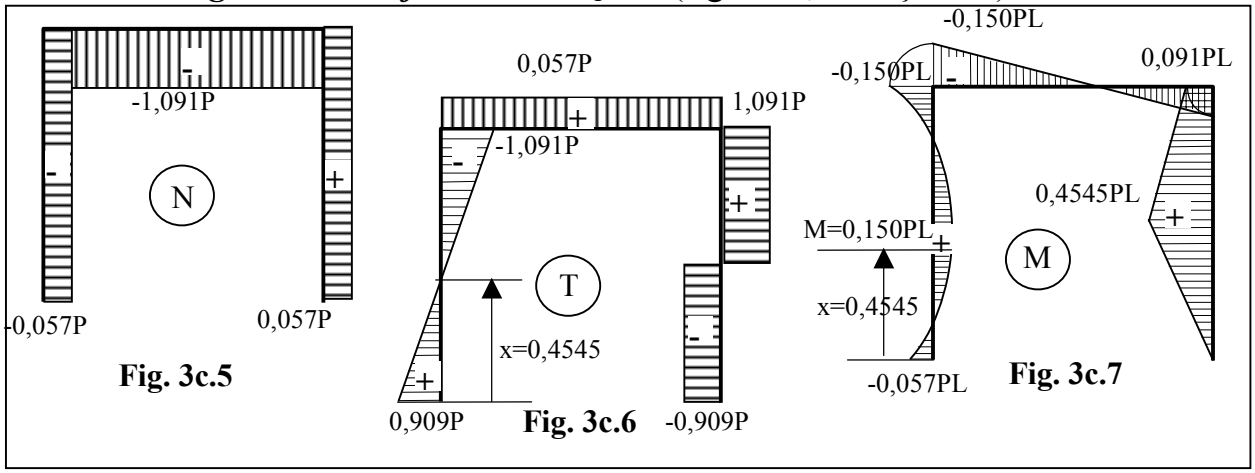
$$\begin{cases}\frac{5L^3}{3EI}X_1+\frac{L^3}{EI}X_2=\frac{35PL^3}{24EI}\\ \frac{L^3}{EI}X_1+\frac{4L^3}{3EI}X_2=\frac{5PL^3}{6EI}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}40X_1+24X_2=35P\\ 24X_1+32X_2=20P\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_1=0{,}909P\\ X_2=-0{,}057P\end{cases}$$

Reacțiunile din încastrarea *A* şi articulația *B*: V_A, H_A, M_A, V_B, H_B sunt:

$H_B = X_1=0{,}909\ P;\quad V_B = X_2=-0{,}057\ P;$

$H_A = -X_1 + q\cdot 2L - 2P=-0{,}909\ P;\ V_A= -X_2=0{,}057\ P;\quad M_A= 0{,}057\ PL.$

b. Diagramele de eforturi N, T şi M (fig. 3c.5, 3c.6 şi 3c.7)



c. Dimensionarea barei la încovoiere

Din diagrama M (fig.3.5) se determină momentul maxim $|M_{max}| = 0{,}4545PL$ şi poziția lui pe bară (în punctul D). Valoarea numerică a momentului maxim este $M_{max}=9{,}09\ kNm$

Relația de dimensionare la solicitarea de încovoiere este:

$$\frac{M_{iy\max}}{W_y}\le\sigma_a\Rightarrow W_{ynec}=\frac{M_{iy\max}}{\sigma_a};$$

unde: W_y - este modulul de rezistență al secțiunii: $W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{\pi d^3}{32}$

Înlocuind valorile obținute rezultă:

$$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{M_{iy\,max}}{\sigma_a} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32M_{iy\,max}}{\pi\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 9090000}{\pi \cdot 150}} = 85{,}14mm$$

d. Calculul deplasării şi rotirii secțiunii C

Pentru calculul deplasării şi rotirii secțiunii *C* de la mijlocul barei orizontale se foloseşte metoda Mohr Maxwell :

$$\delta_C = \int \frac{Mm_C}{EI} dx; \qquad \varphi_C = \int \frac{Mm_C^*}{EI} dx$$

unde *M* este diagrama de eforturi încovoietoare din sistemul real (din sistemul de bază atât pentru forțele date cât şi pentru necunoscutele static nedeterminate X_1 şi X_2 calculate fig. 3c.8) iar m_C şi m^*_C reprezintă diagrama de eforturi încovoietoare din sistemul de bază când în secțiunea C acționează o forță unitară verticală *P =1* respectiv când în secțiunea C acționează un cuplu unitar *N =1* (fig. 3c9, 3c.10).

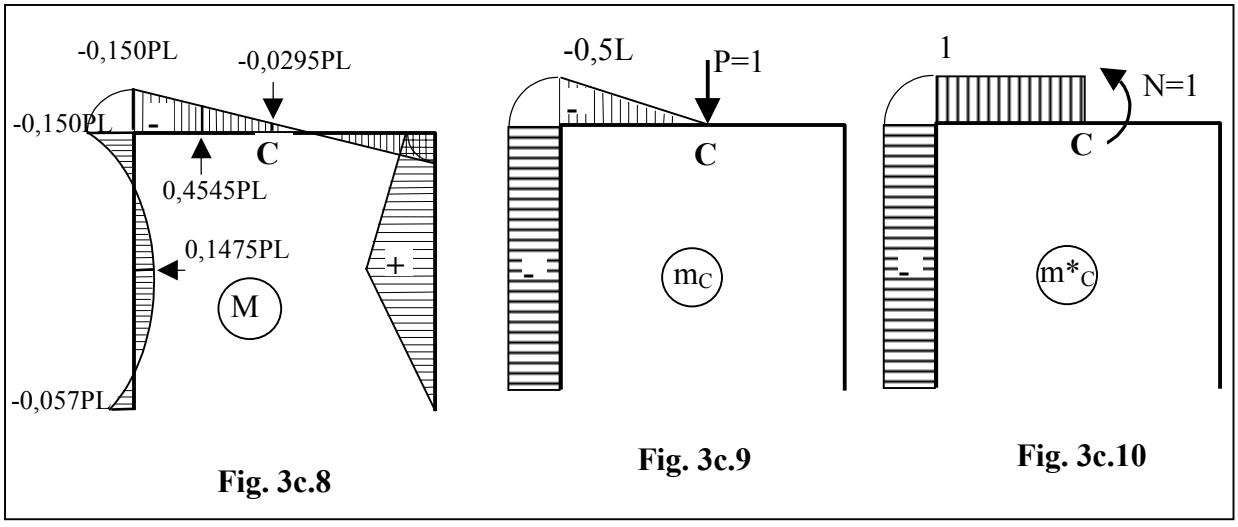


Fig. 3c.8 **Fig. 3c.9** **Fig. 3c.10**

Aplicând regula 1/3 a lui Simpson obținem :

$$\delta_C = \int \frac{m_C M}{EI} dx = \frac{1}{6EI} \cdot \frac{L}{2} [(-0{,}0295PL) \cdot (0) + 4 \cdot (-0{,}08975PL) \cdot (-0{,}25L) + (-0{,}150PL) \cdot (-0{,}5L)] +$$

$$+ \frac{1}{6EI} \cdot L[(-0{,}150PL) \cdot (-0{,}5L) + 4 \cdot (0{,}1475PL) \cdot (-0{,}5L) + (-0{,}057PL) \cdot (-0{,}5L)] = -18{,}1875 \cdot 10^{-3} \frac{PL^3}{EI}$$

$$\varphi_C = \int \frac{m^*_C \, M}{EI} dx = \frac{1}{6EI} \cdot \frac{L}{2} \left[(-0{,}0295PL) \cdot (1) + 4 \cdot (-0{,}08975PL) \cdot (1) + (-0{,}150PL) \cdot (1) \right] +$$

$$+ \frac{1}{6EI} \cdot L \left[(-0{,}150PL) \cdot (1) + 4 \cdot (0{,}1475PL) \cdot (1) + (-0{,}057PL) \cdot (1) \right] = -18{,}1875 \cdot 10^{-3} \frac{PL^3}{EI}$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 3c UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 3A se calculează separat coeficienţii deplasărilor α şi β din formulele: $\delta_{i0} = \alpha \frac{PL^3}{EI}$; $\delta_{ij} = \beta \frac{PL^3}{EI}$ pentru un număr de cazuri simple (vezi Model 3d) prezentate în continuare, apoi se foloseşte principiul suprapunerii efectelor. Pentru calculul deplasărilor şi necunoscutelor X_1 şi X_2 s-au utilizat formulele de calcul prezentate pentru problema de mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Nr.	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**q1**	**q2**	**q3**	**q4**	**q5**	**q6**
Crt	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0

Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	
q7	**q8**	**q9**	**N1**	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**	**N6**	**N7**	**N8**	**N9**	**N10**	**N11**	**N12**	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

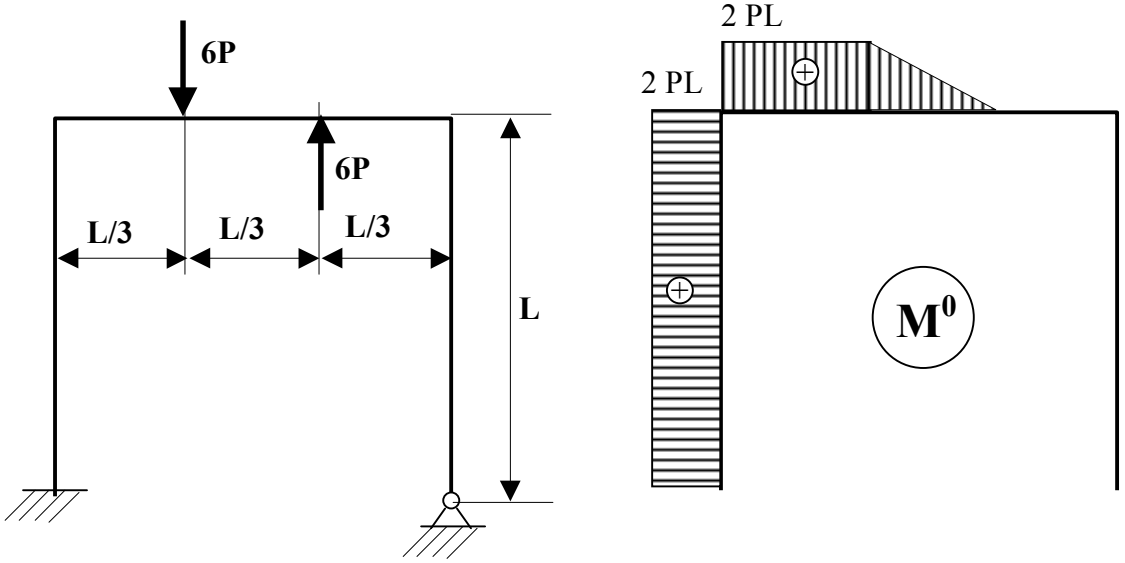
DATE DE IEŞIRE

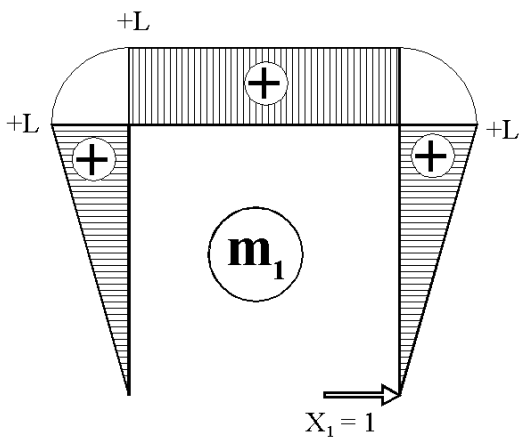
AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
$\delta_{10} \cdot \frac{EI}{PL^3}$	$\delta_{20} \cdot \frac{EI}{PL^3}$	$\delta_{11} \cdot \frac{EI}{L^3}$	δ_{12} (=δ_{12})$\cdot \frac{EI}{L^3}$	$\delta_{22} \cdot \frac{EI}{L^3}$	**X_1/P**	**X_2/P**
-35/24	-5/6	5/3	1	4/3	0,909	-0,057

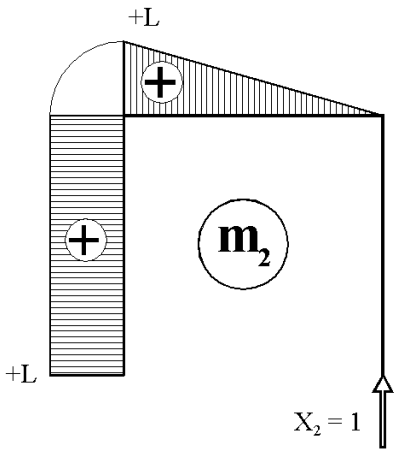
PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA NR. 3c.1

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.

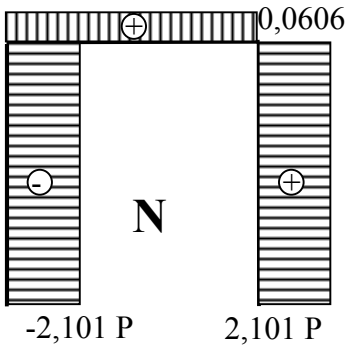


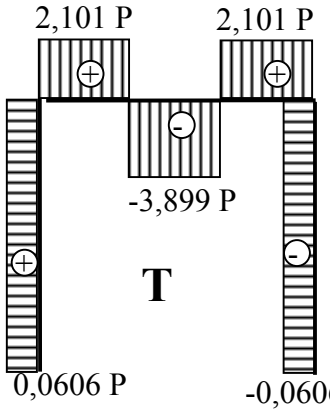


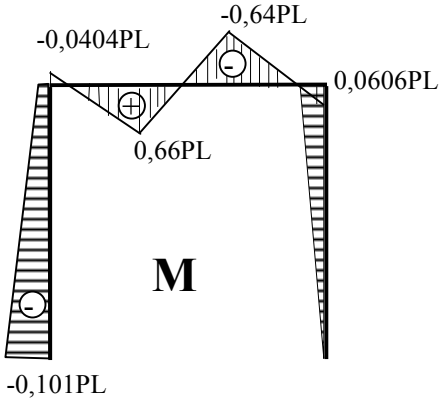


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$2\frac{P \cdot L^3}{E \cdot I}$	$\frac{74}{27} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I}$	$\frac{5}{3} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I}$	$\frac{L^3}{E \cdot I}$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{L^3}{E \cdot I}$	0,0606P	-2,101P	0,66PL	96 mm

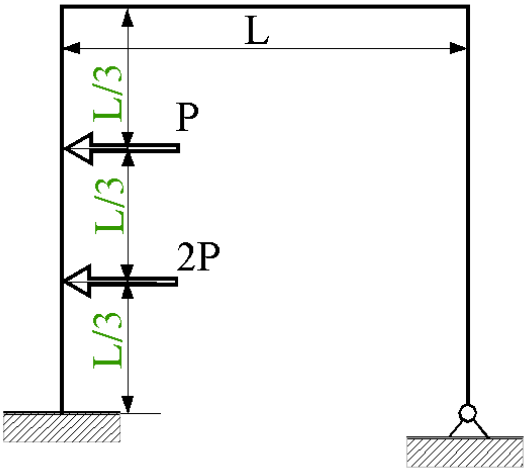


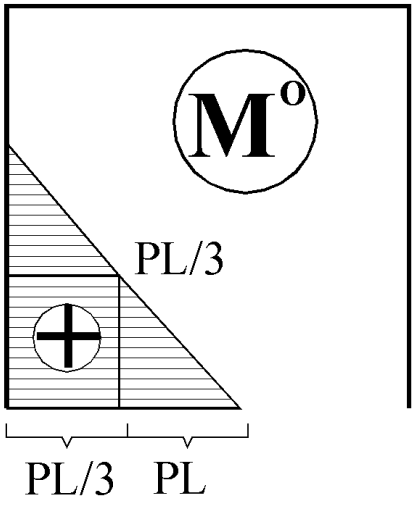


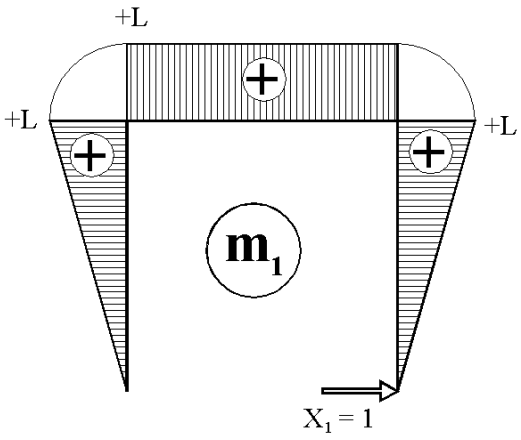


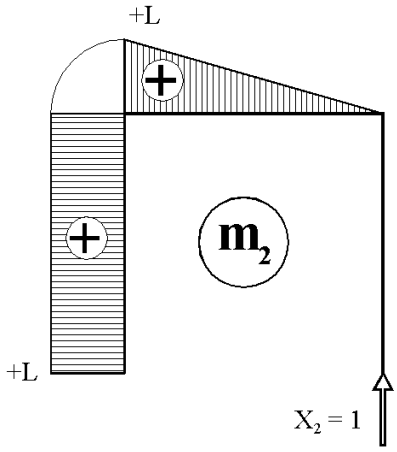
PROBLEMA NR. 3c.2

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



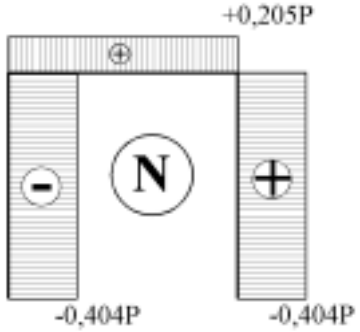


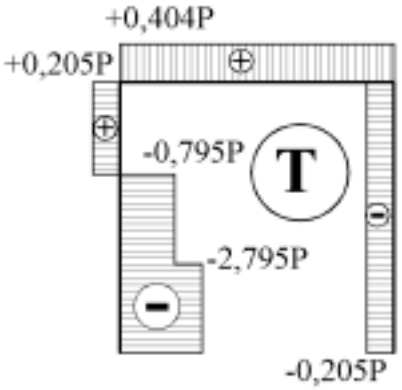


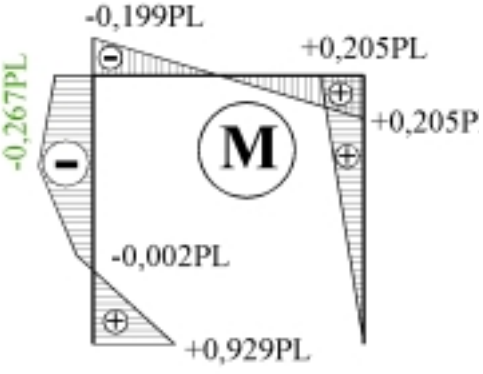


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{5}{81}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	0,205P	-0,404P	0,929PL	108 mm

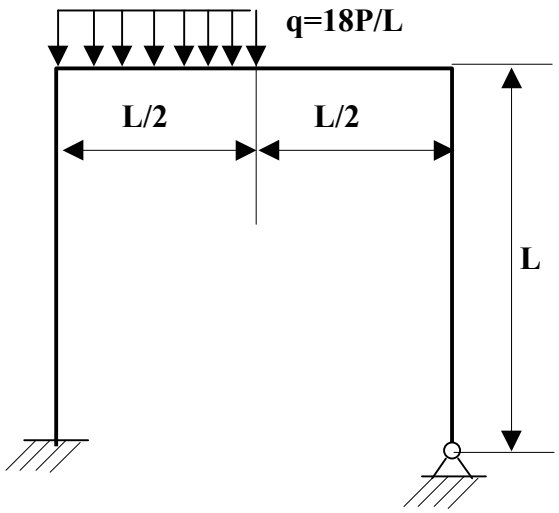


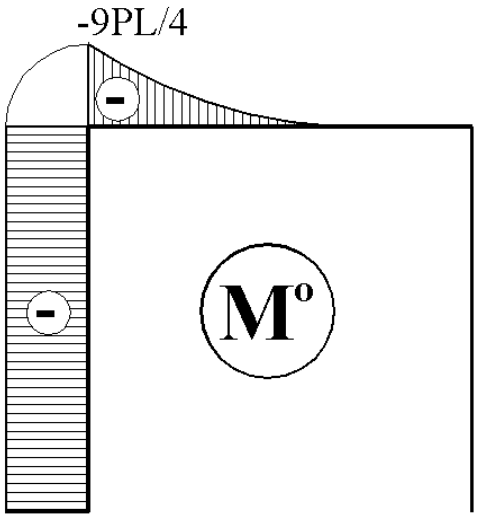


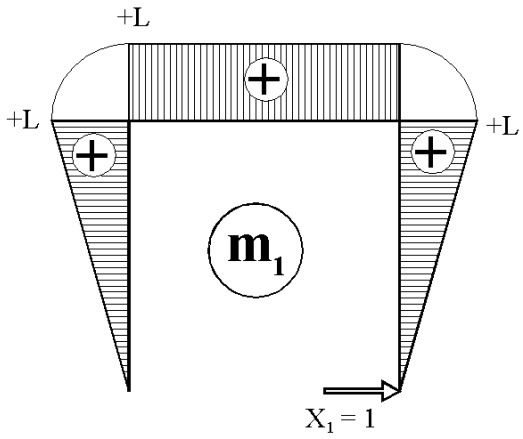


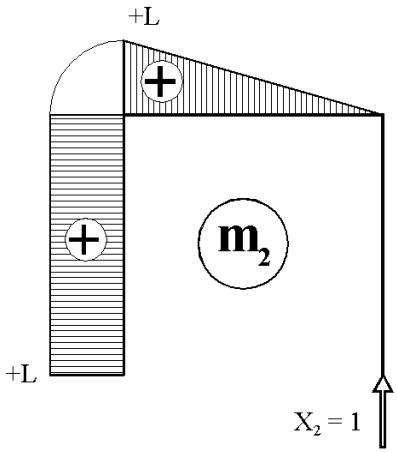
PROBLEMA NR. 3c.3

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



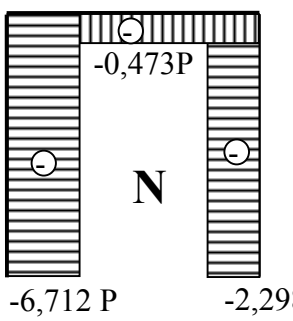


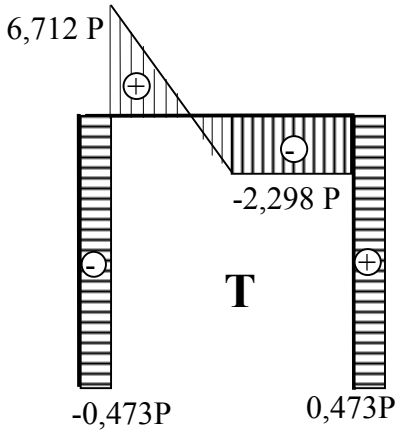


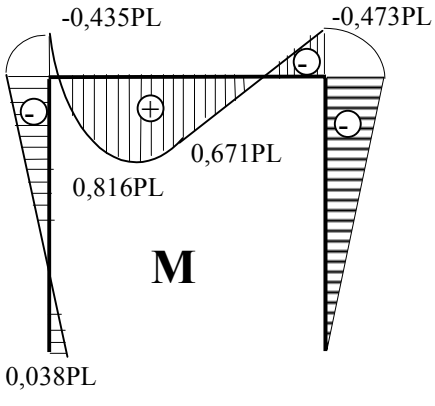


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{3}{2}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{165}{64}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-0,473P	2.288P	0,816 PL	103 mm

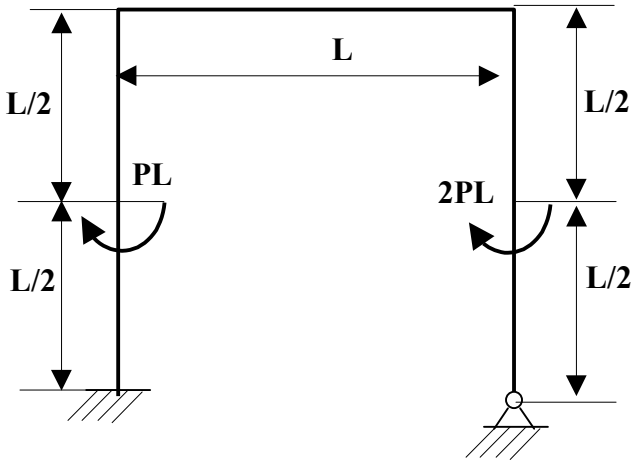


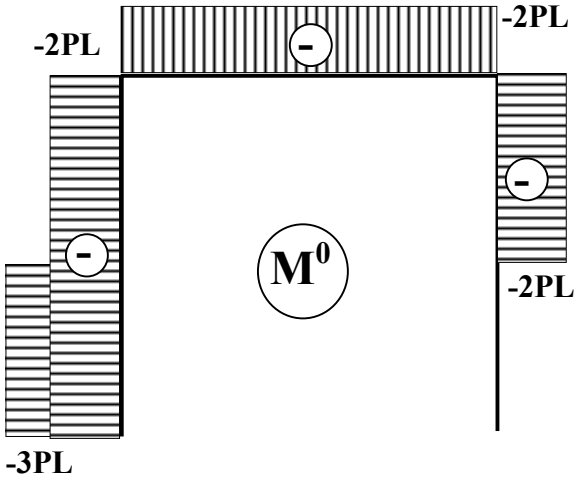


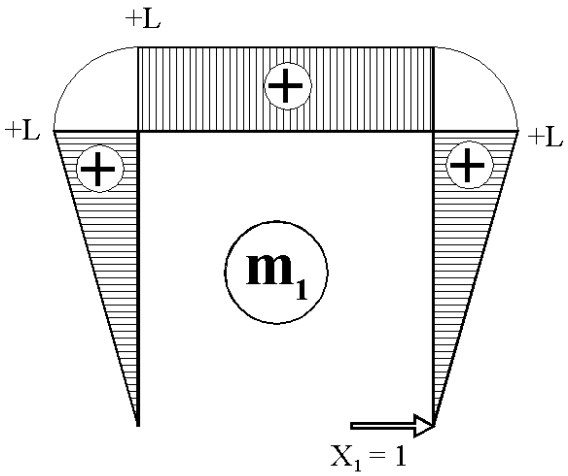


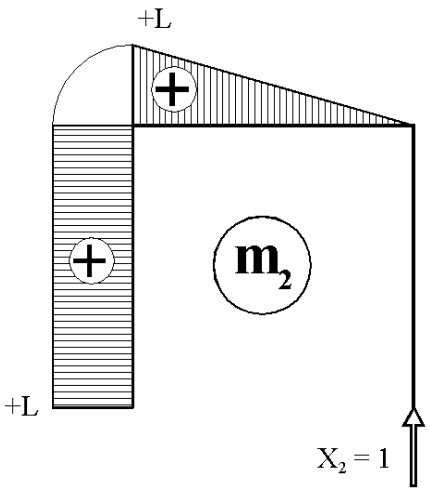
PROBLEMA NR. 3c.4

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



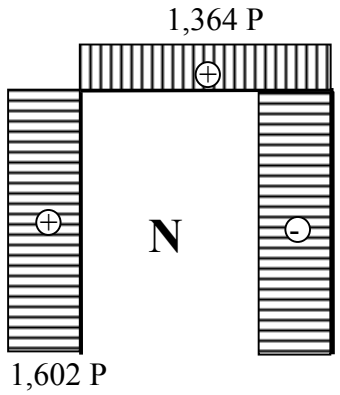


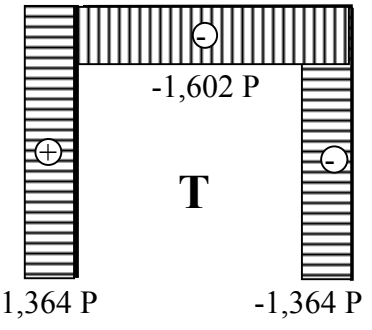


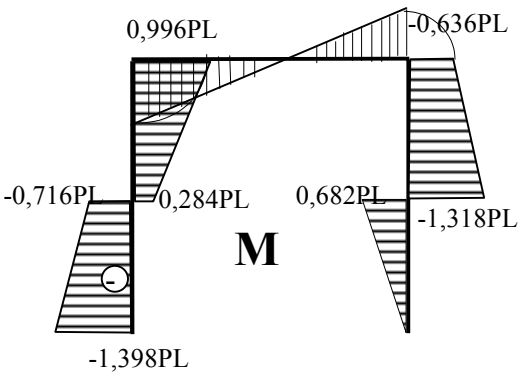


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{31}{8}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{7}{2}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	1,364P	1,602P	1,398PL	124 mm



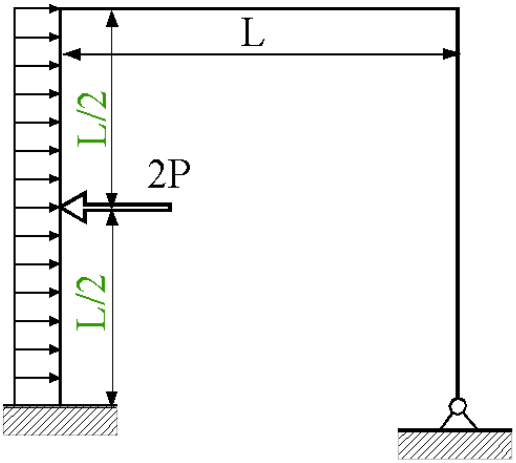


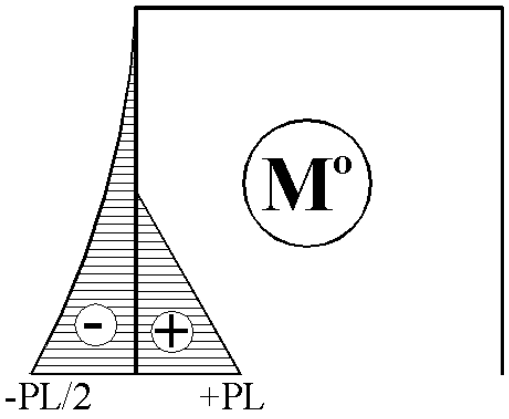


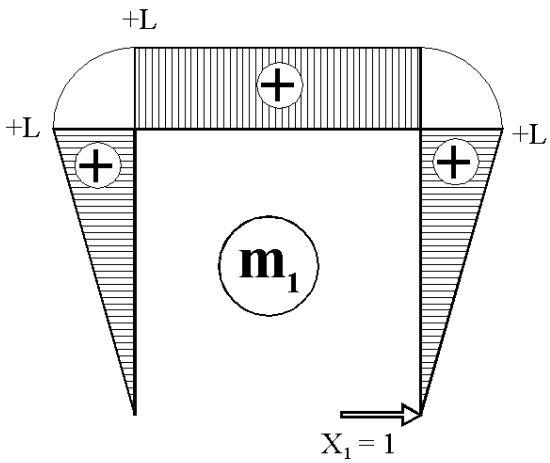
PROBLEMA NR. 3c.5

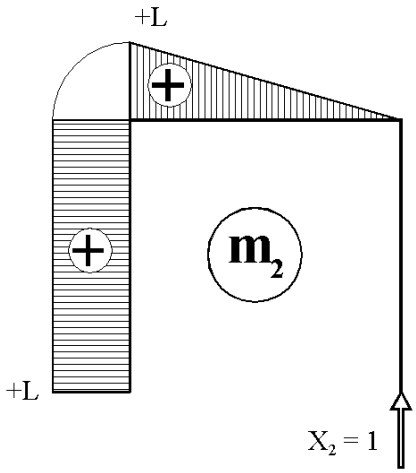
Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.

q = P/L



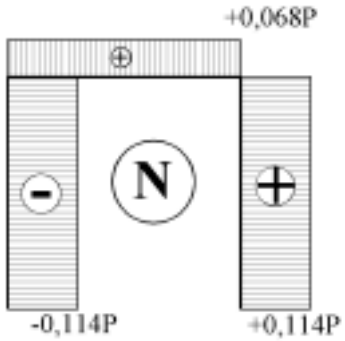


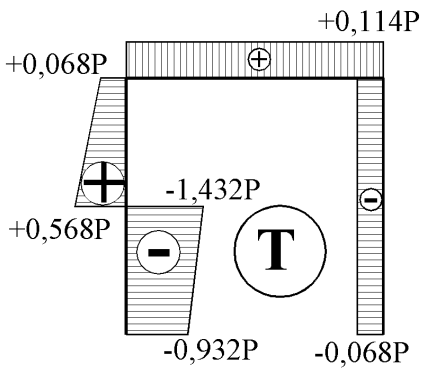


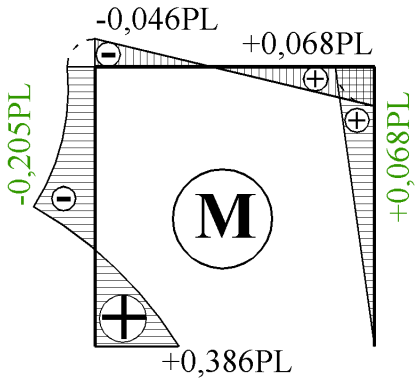


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
0	$\frac{1}{12}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	0,068P	-0,114P	0,386PL	80 mm



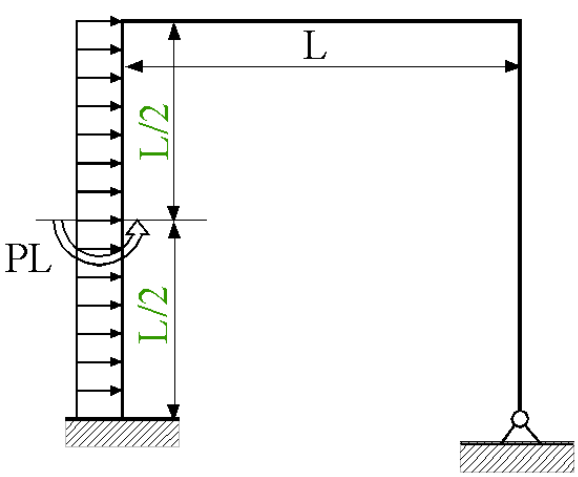


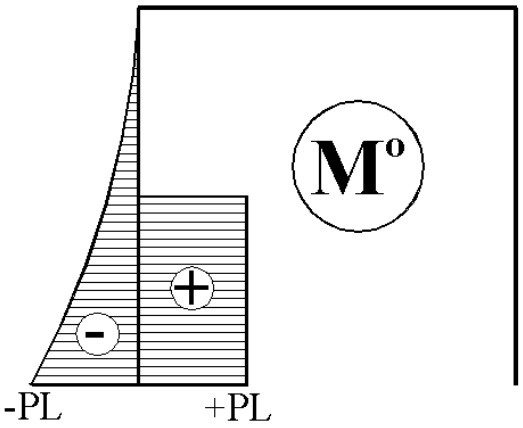


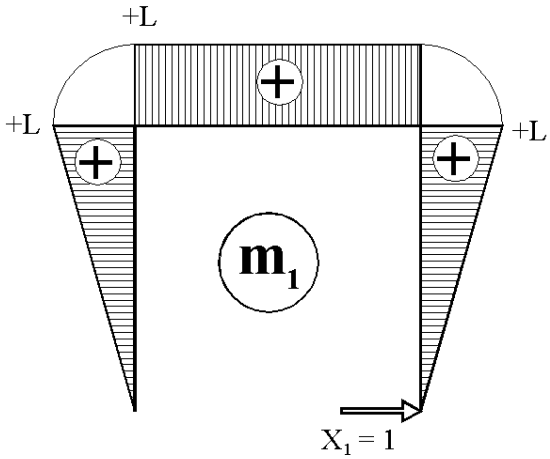
PROBLEMA NR. 3c.6

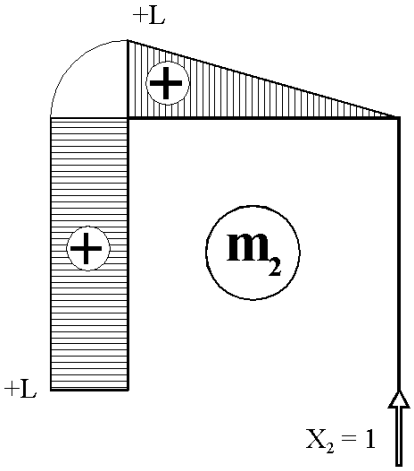
Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.

q = 2P/L



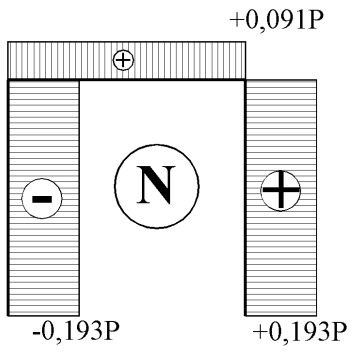


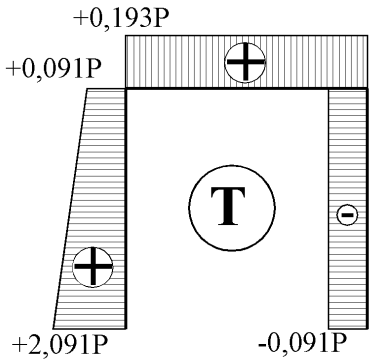


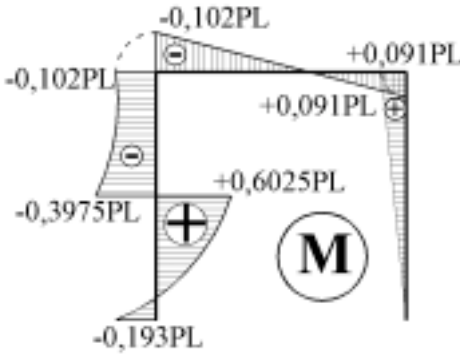


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{1}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	0,091P	-0,193P	0,3975PL	82 mm

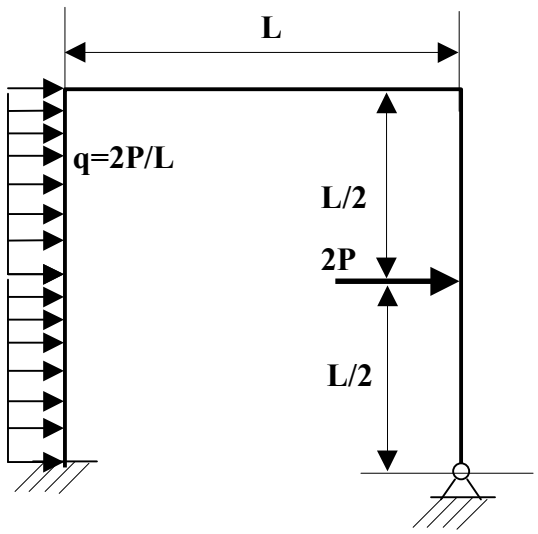


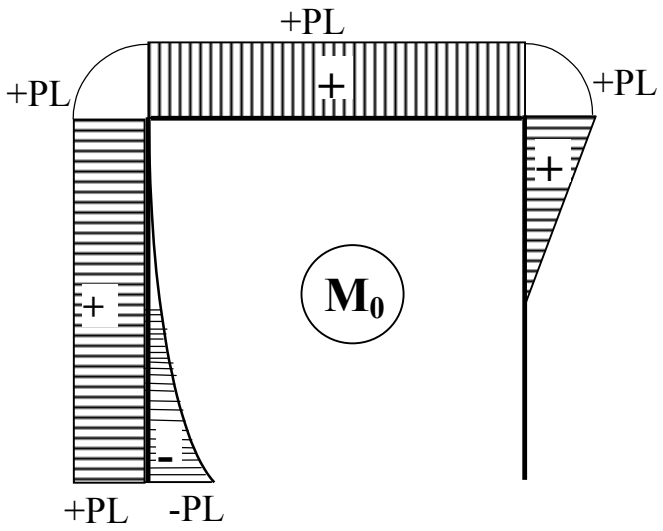


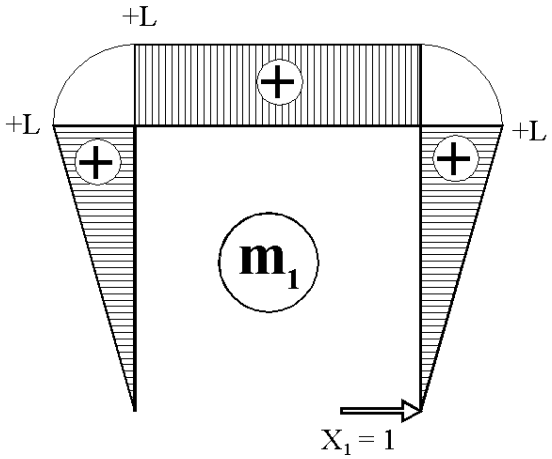


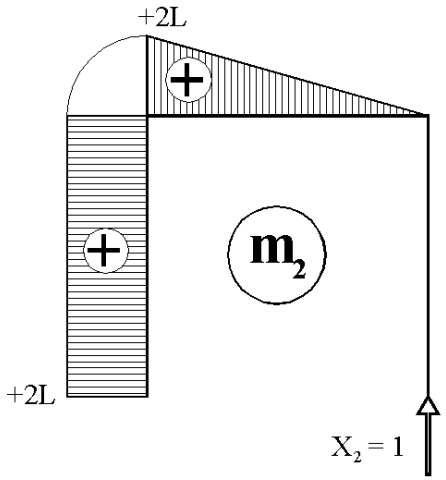
PROBLEMA NR. 3c.7

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



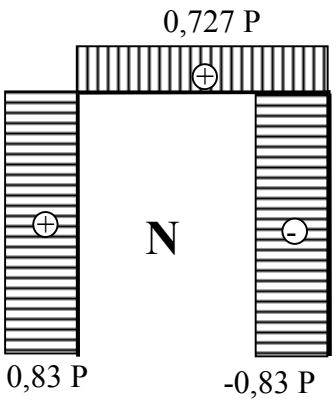


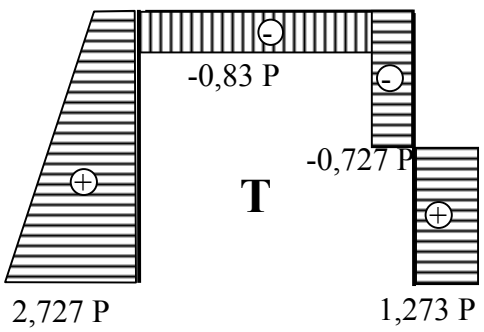


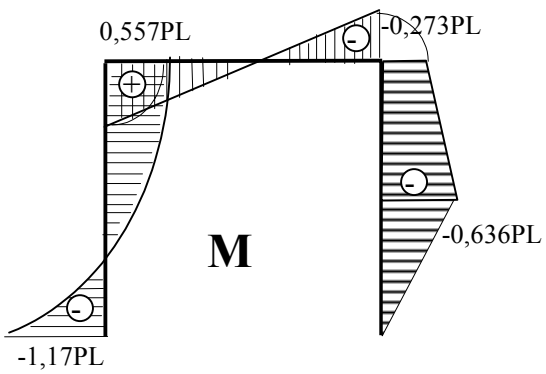


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{31}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-1,273P	0,830P	1,17PL	117 mm

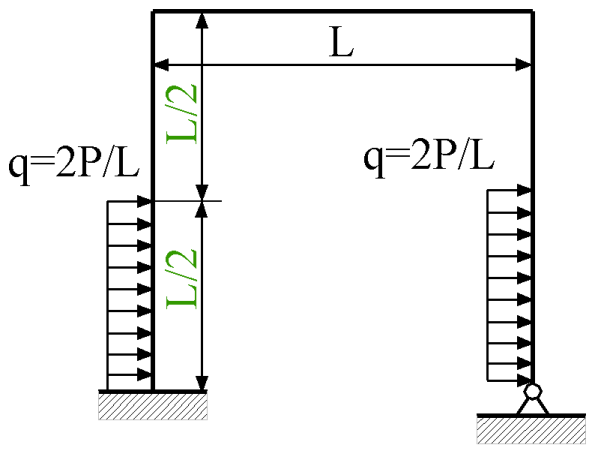


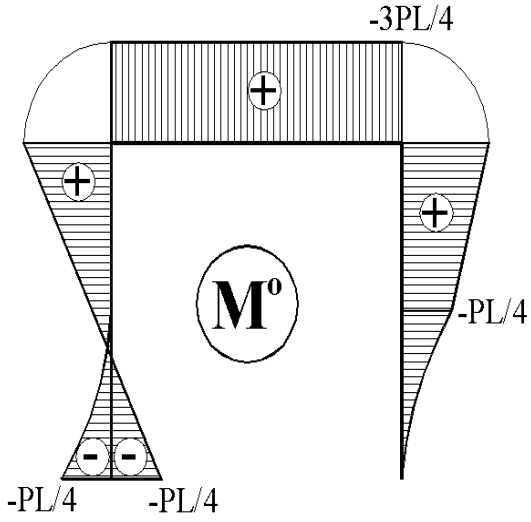


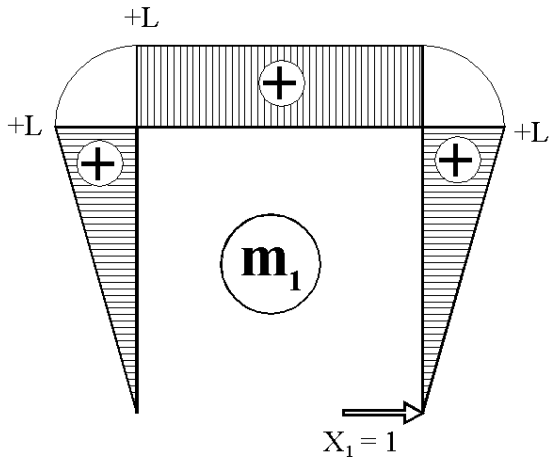


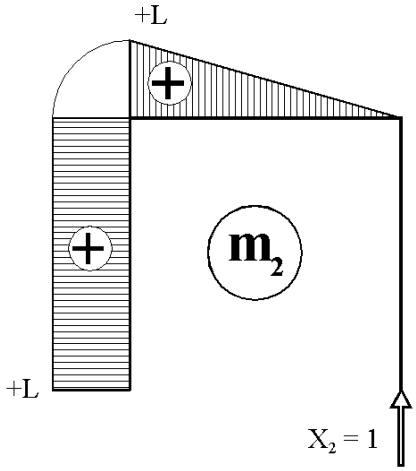
PROBLEMA NR. 3c.8

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



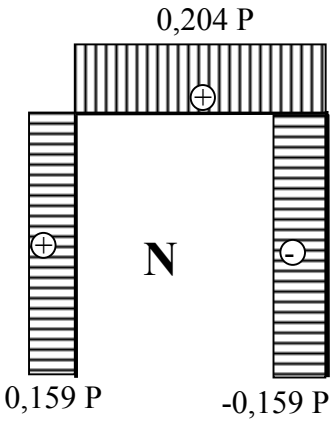


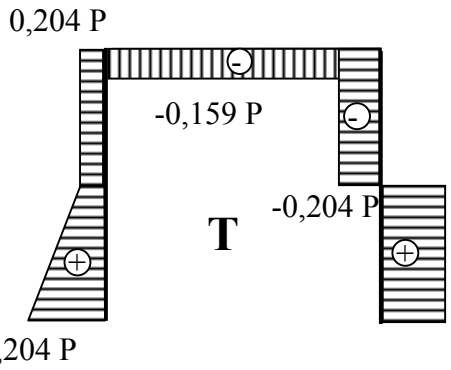


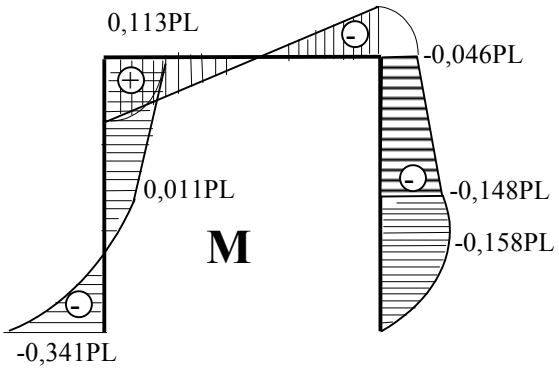


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{7}{6}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{7}{12}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-0,796P	0,159P	0,341PL	77 mm

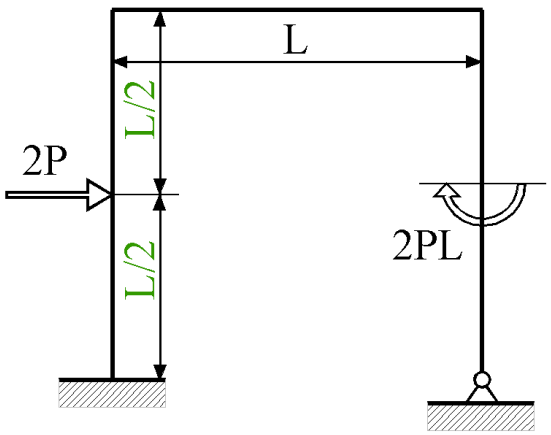


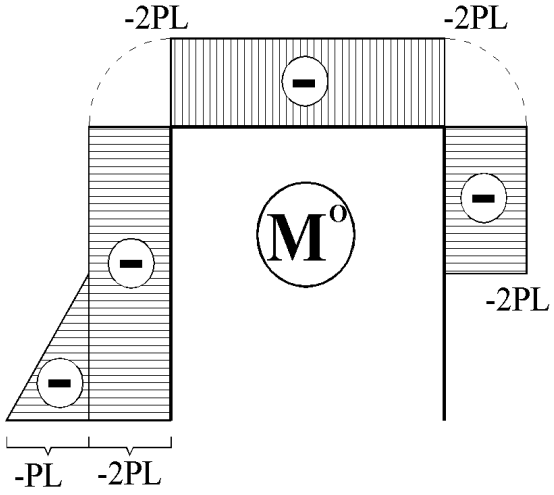


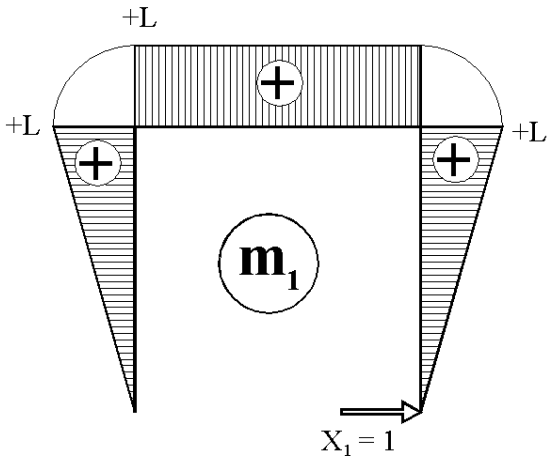


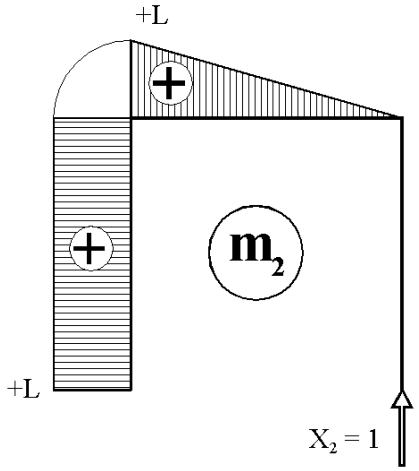
PROBLEMA NR. 3c.9

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



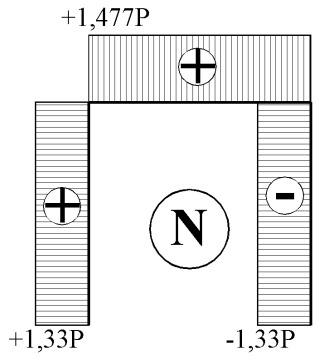


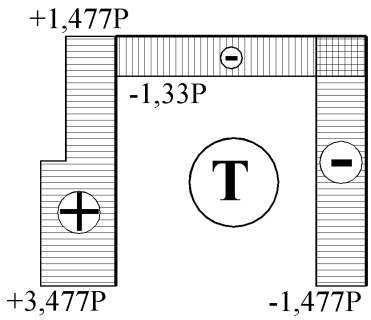


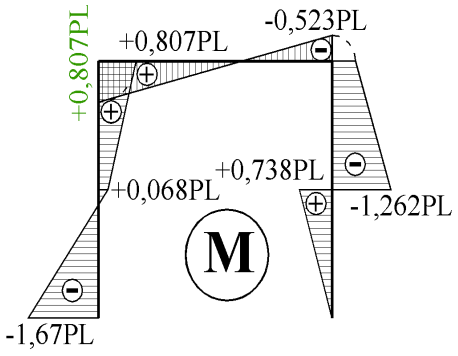


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{91}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{13}{4}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	1,477P	1,330P	1,671PL	132 mm

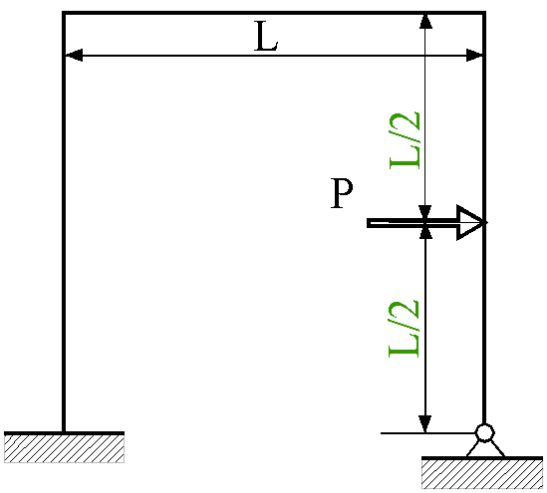


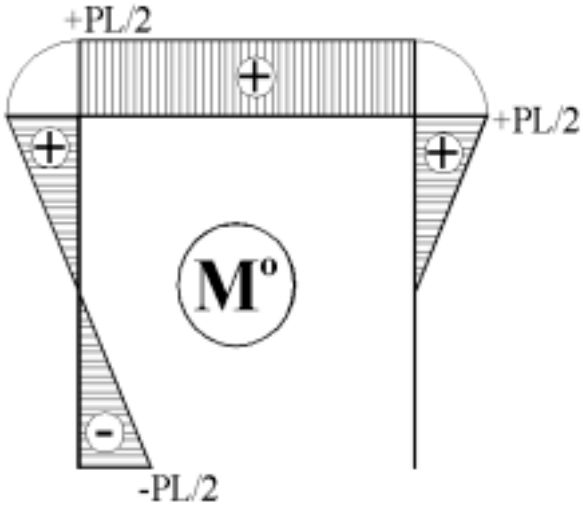


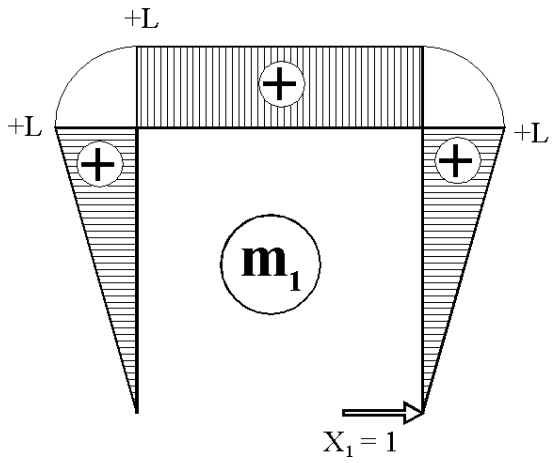


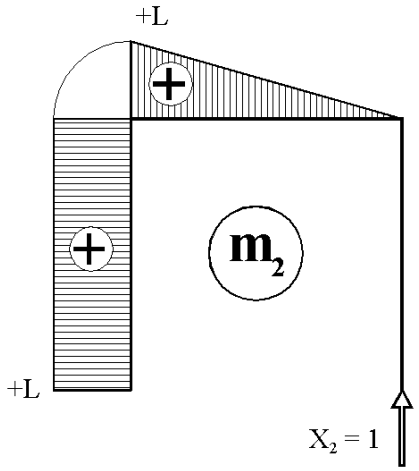
PROBLEMA NR. 3c.10

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



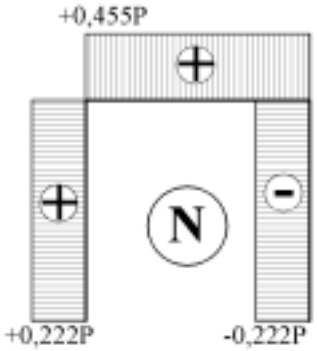


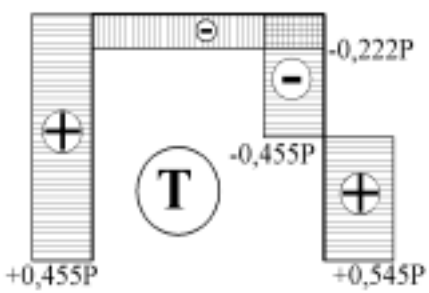


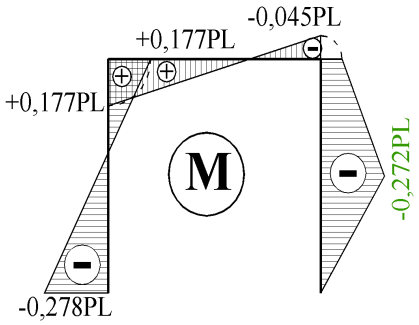


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{33}{48}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-0,545P	0,222P	0,278PL	73 mm

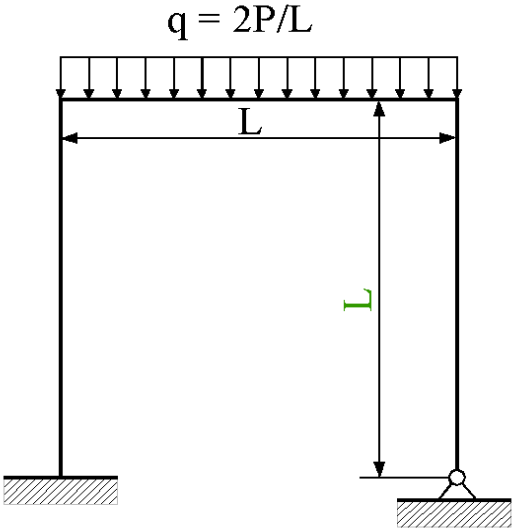


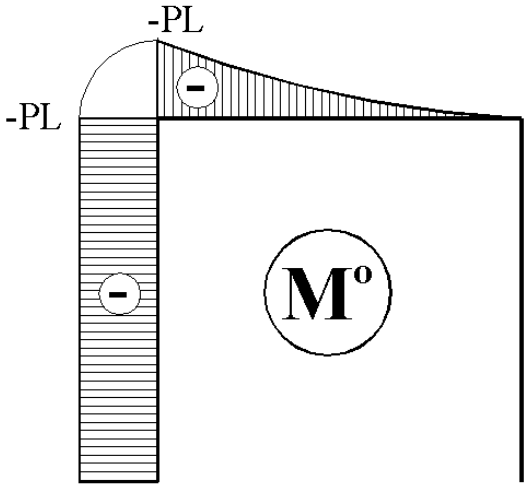


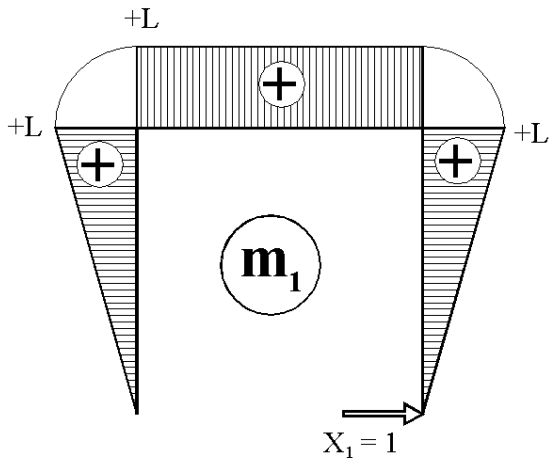


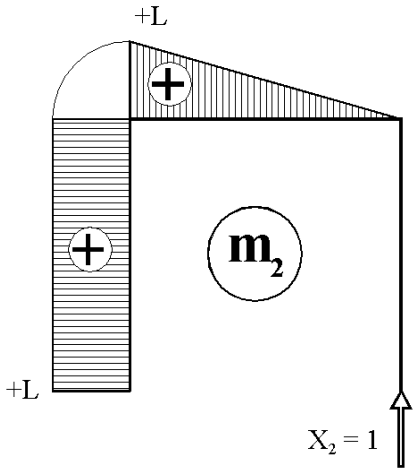
PROBLEMA NR. 3c.11

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



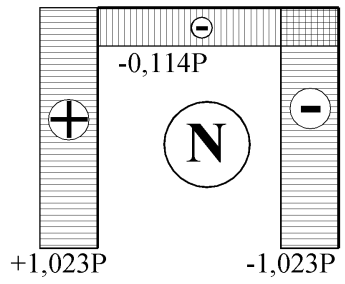


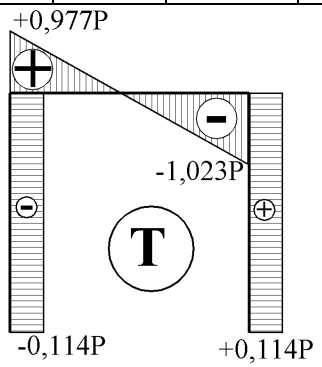


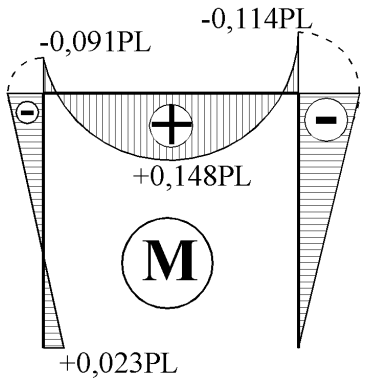


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{5}{6}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{5}{4}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-0,114P	1,023P	0,148PL	59 mm



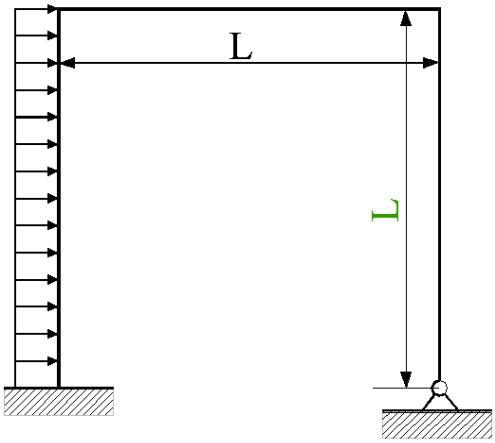


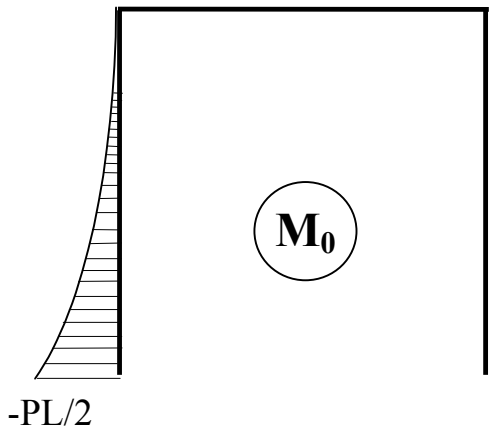


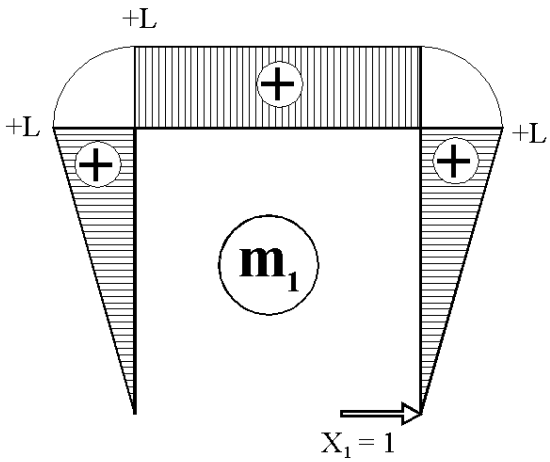
PROBLEMA NR. 3c.12

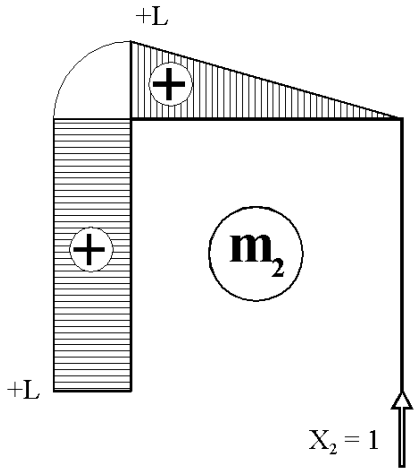
Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.

q = P/L



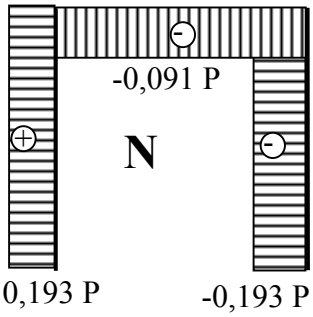


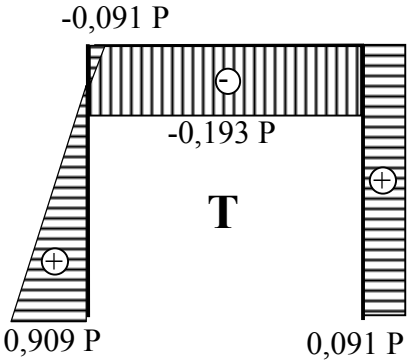


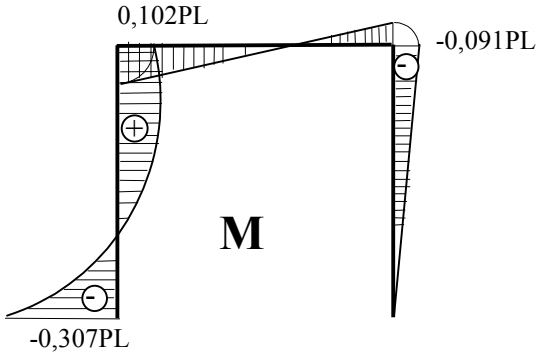


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{1}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{1}{6}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-0,091P	0,193P	0,307PL	75 mm





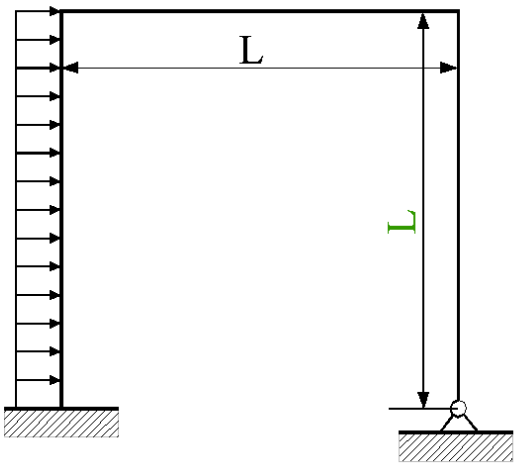


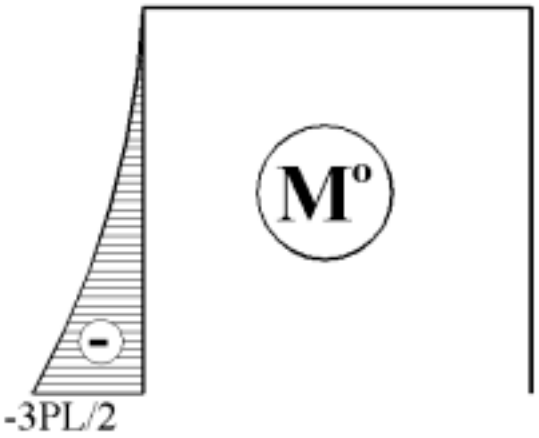
PROBLEMA NR. 3c.13

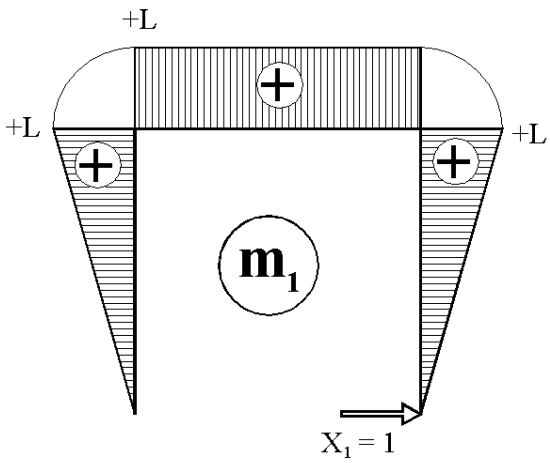
Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)

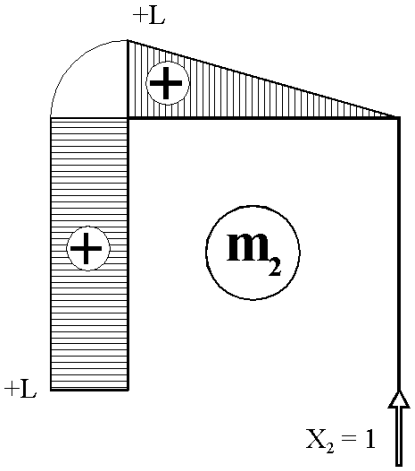
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.

q = 3P/L



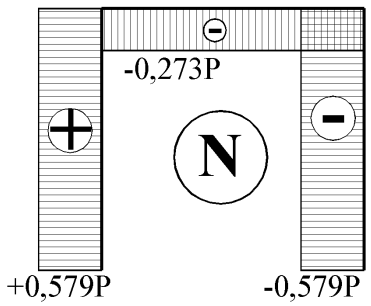


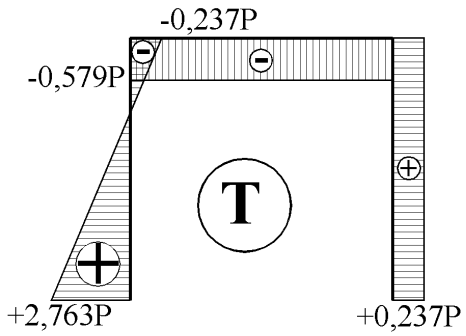


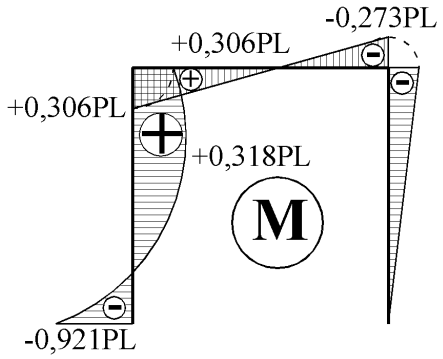


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{1}{8}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-0,273P	0,579P	0,921PL	108 mm

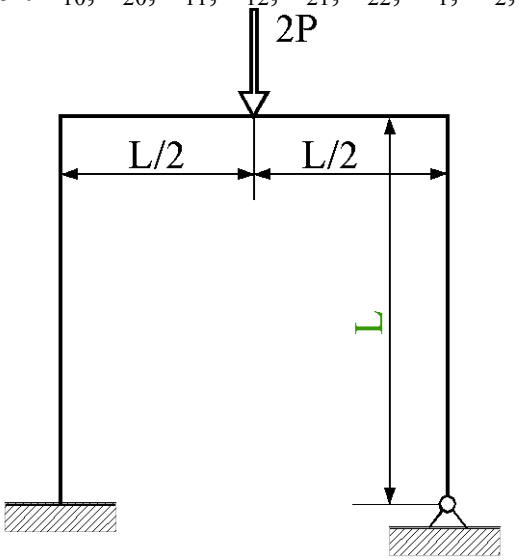


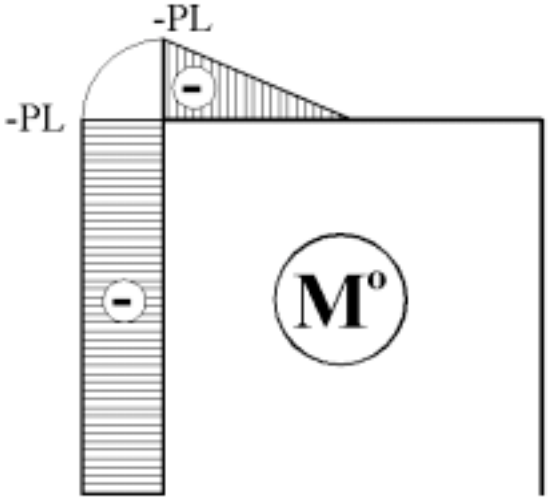


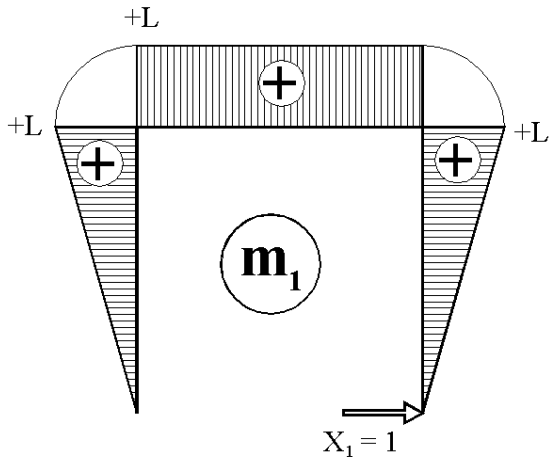


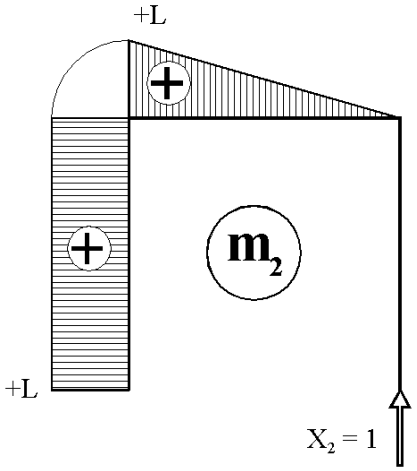
PROBLEMA NR. 3c.14

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



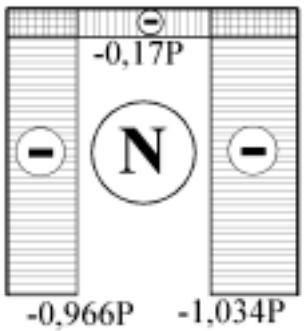


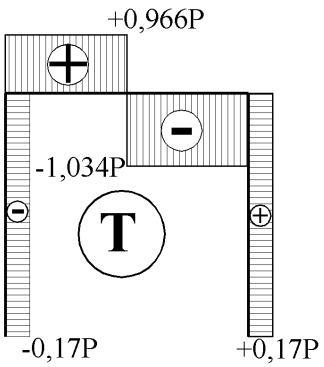


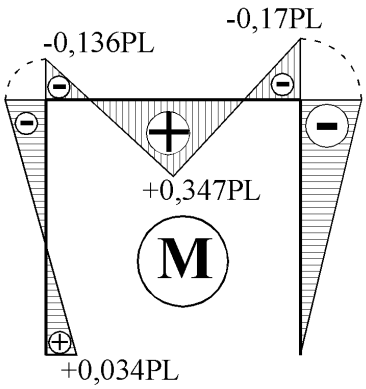


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{3}{4}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{29}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-0,170P	1,034P	0,347PL	80 mm

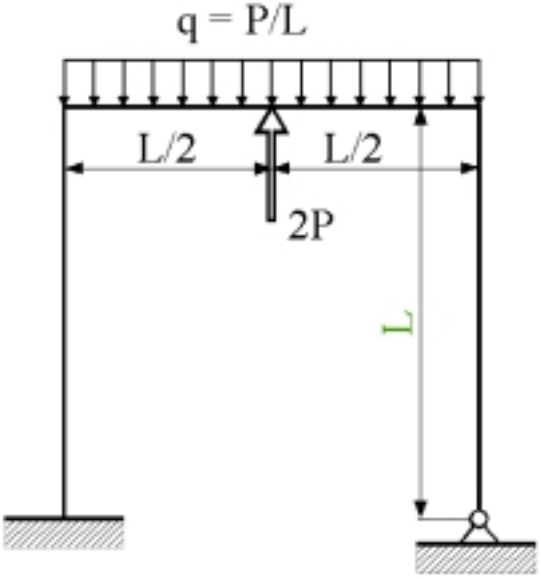


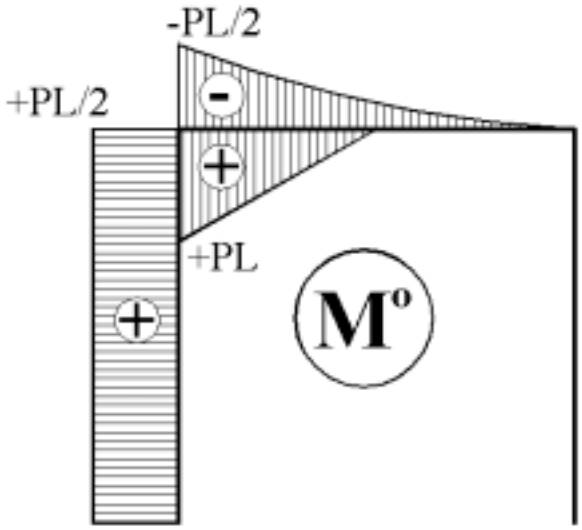


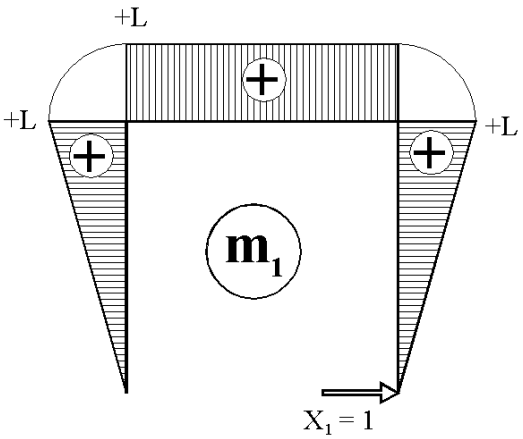


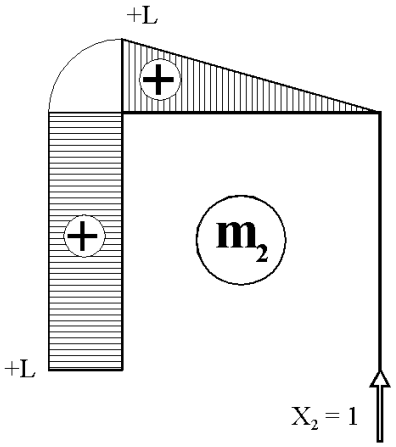
PROBLEMA NR. 3c.15

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



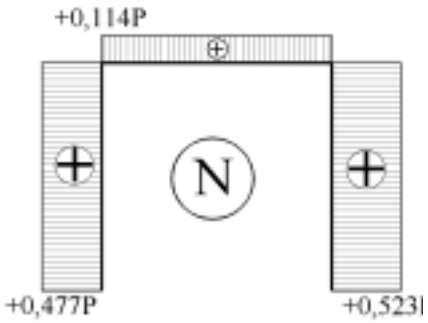


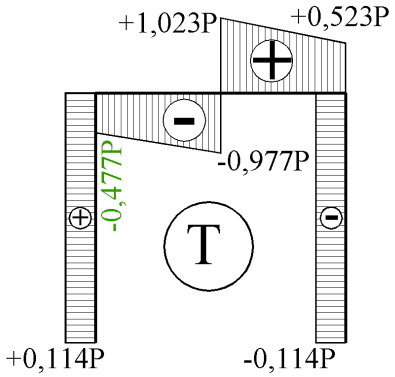


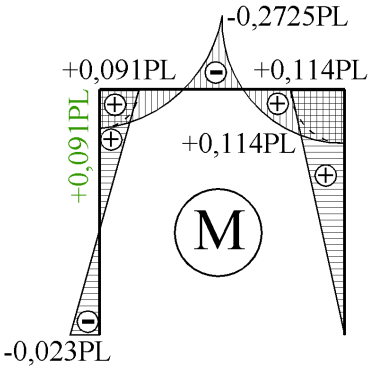


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{1}{3}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{7}{12}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	0,114P	-0,523P	0,2725PL	72 mm

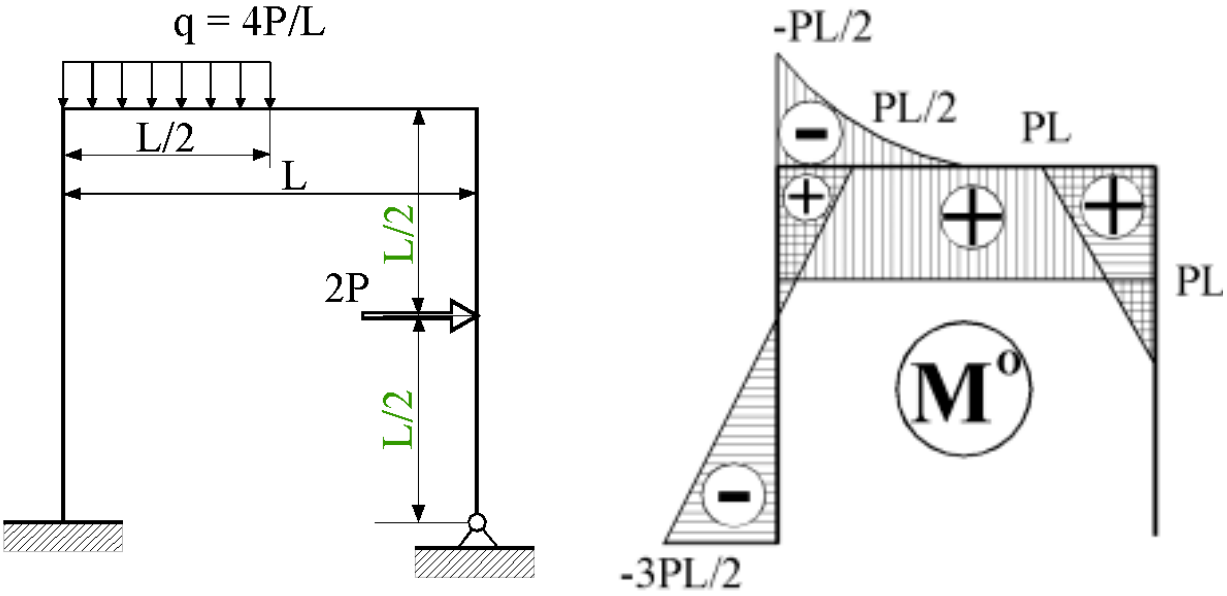


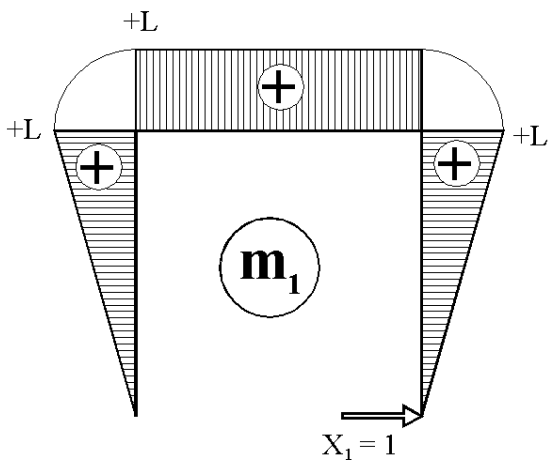


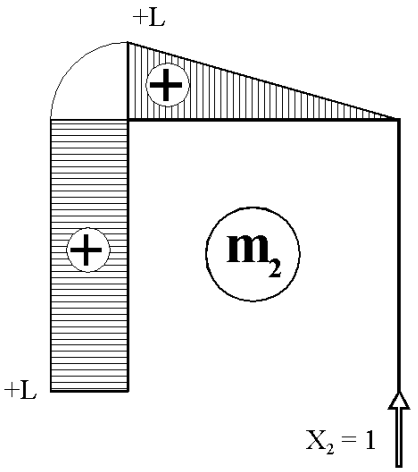


PROBLEMA NR. 3c.16

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.

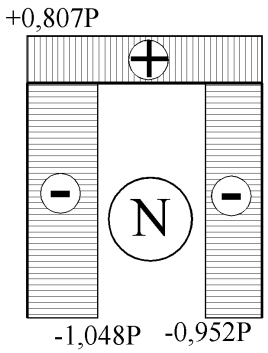


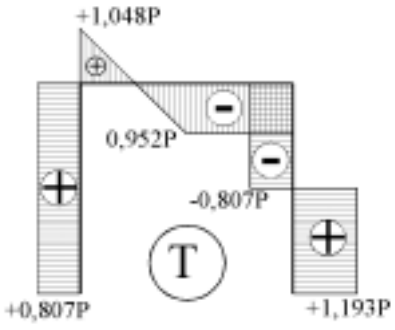


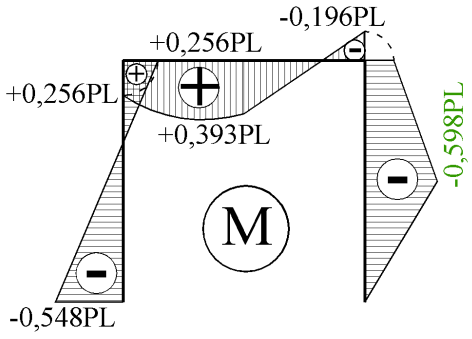


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{25}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{7}{96}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-1,196P	0,952P	0,598PL	94 mm

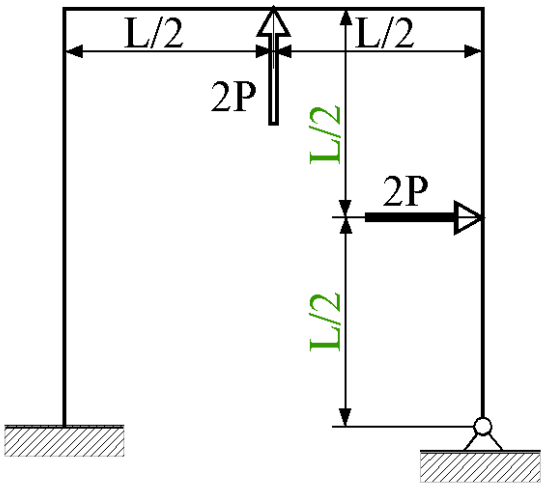


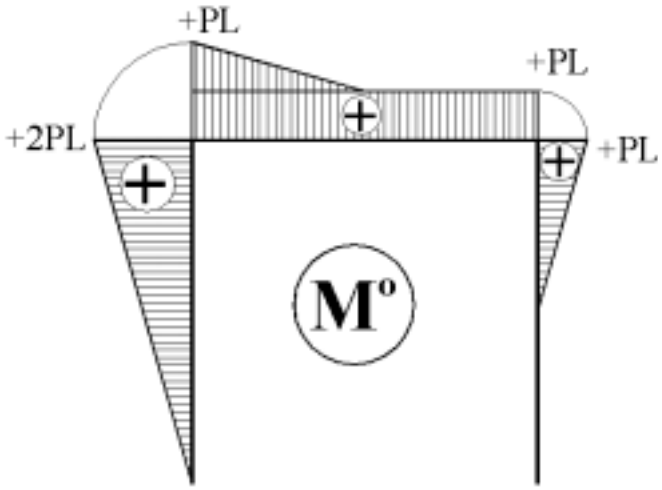


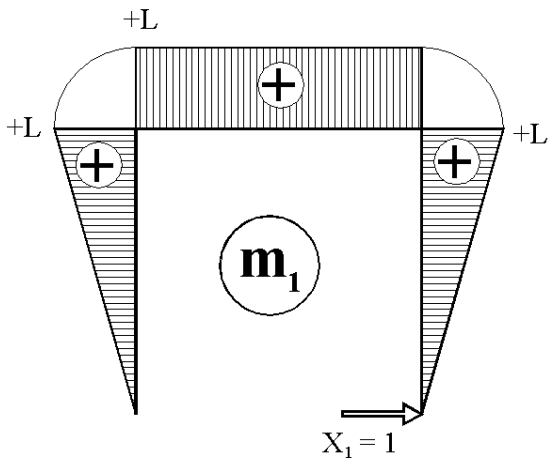


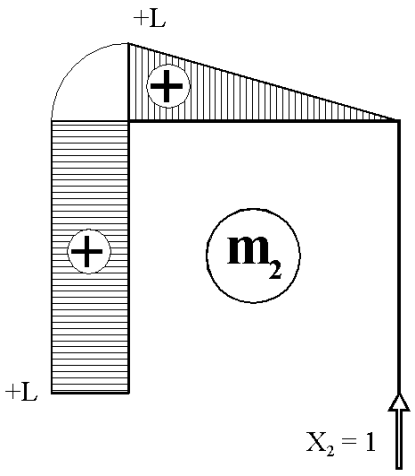
PROBLEMA NR. 3c.17

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



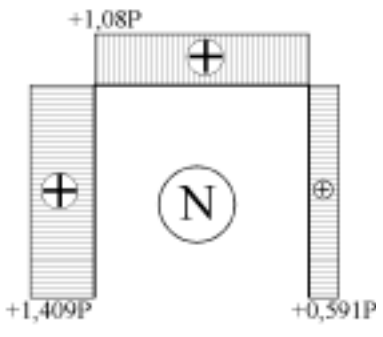


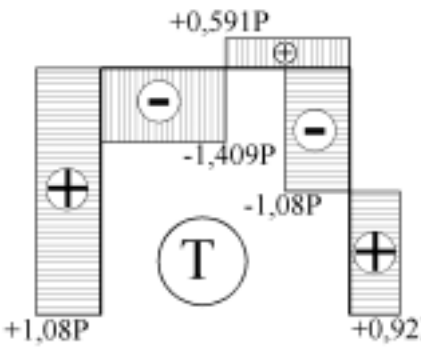


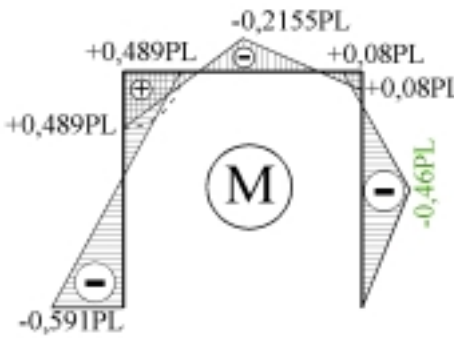


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{17}{8}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{41}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-0,920P	-0,591P	0,591PL	93 mm

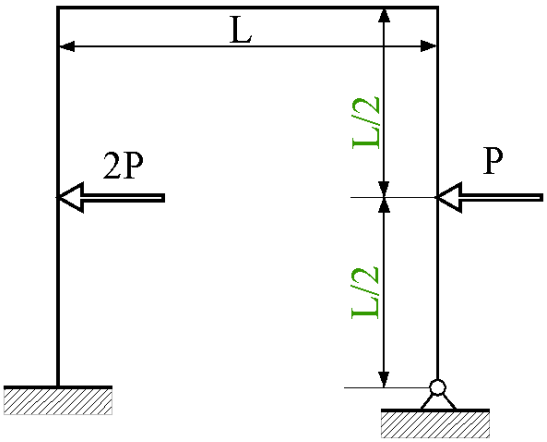


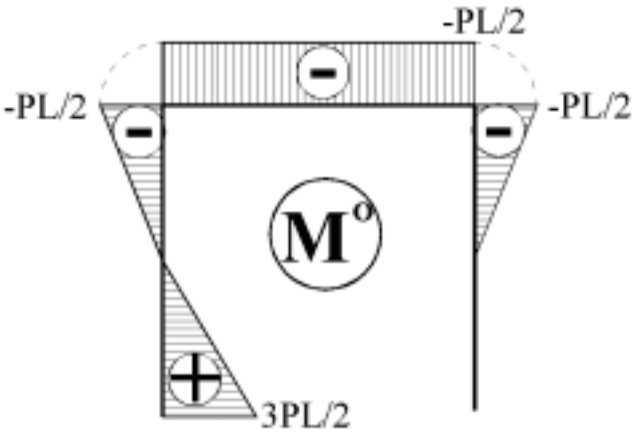


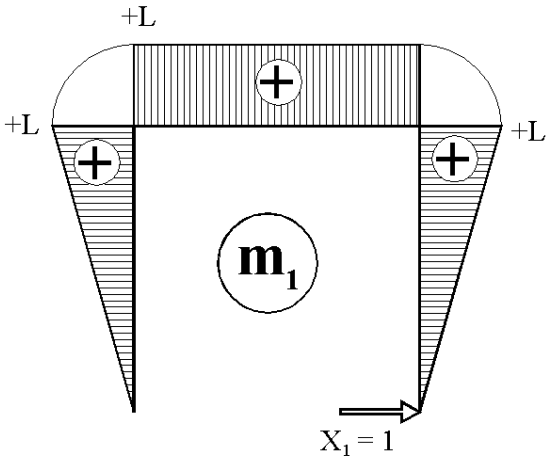


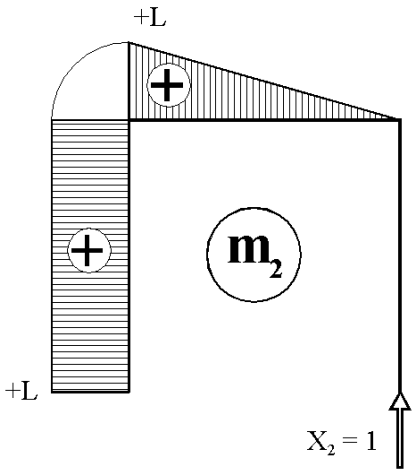
PROBLEMA NR. 3c.18

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



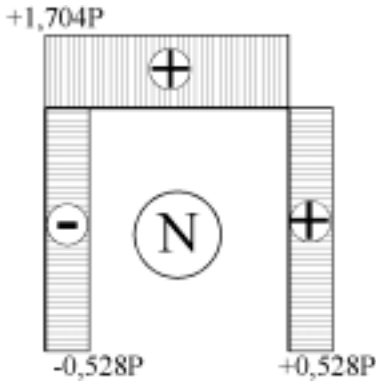


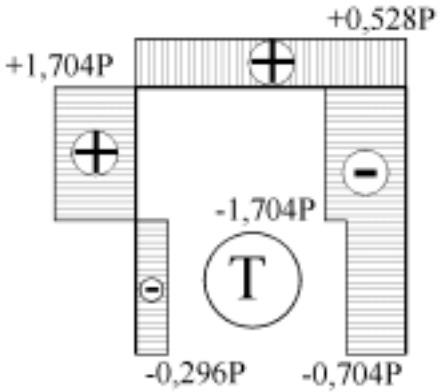


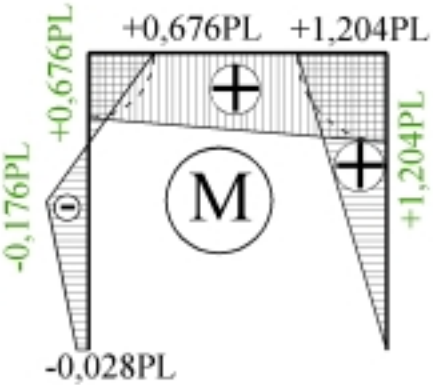


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{31}{48}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	0	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	0,704P	-0,528P	1,204PL	118 mm

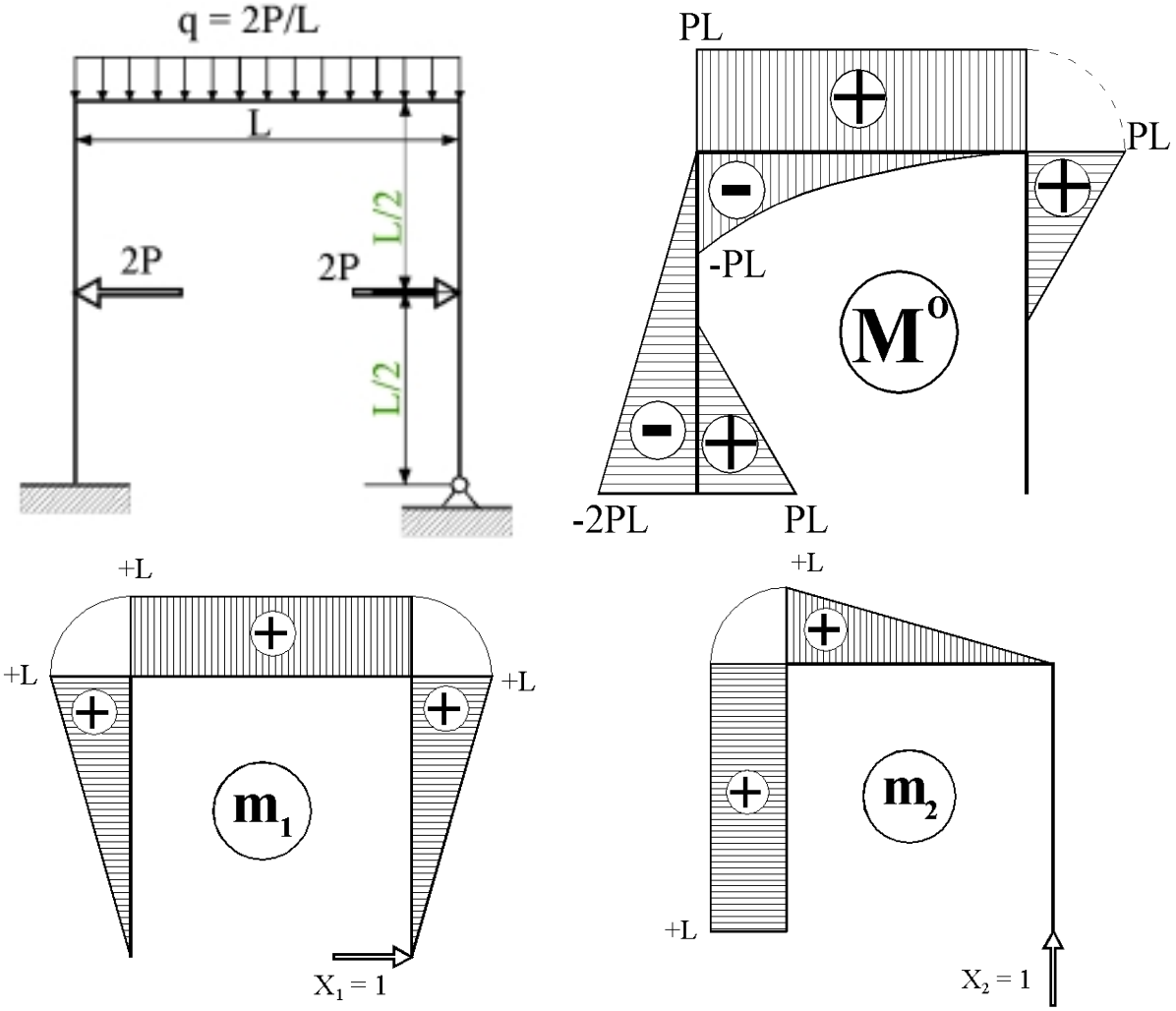






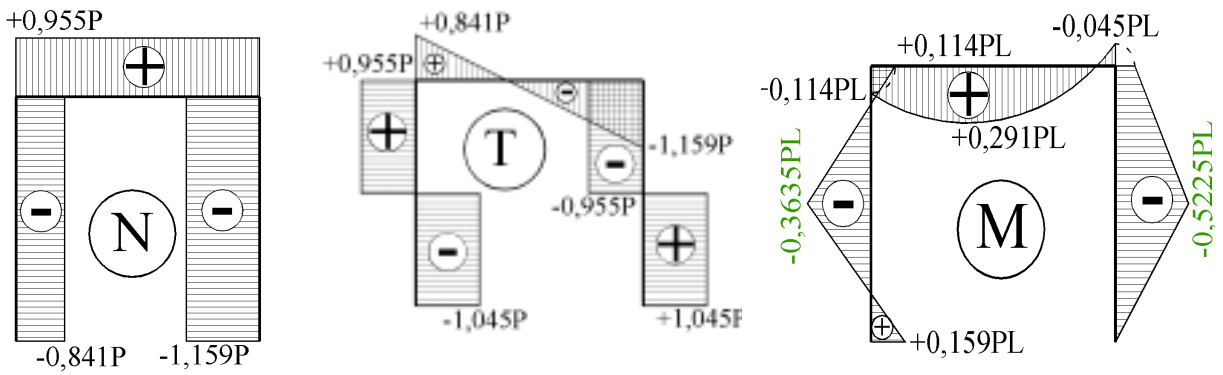
PROBLEMA NR. 3c.19

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



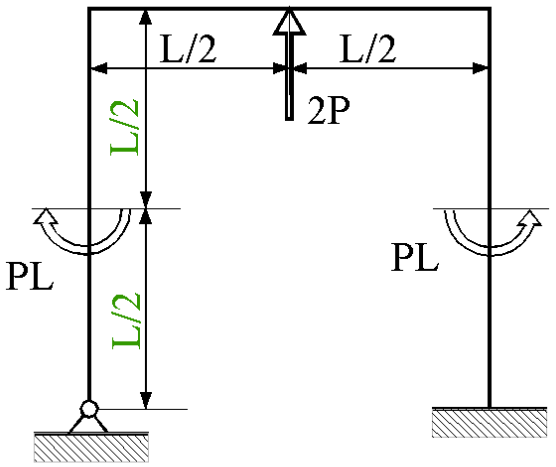
Rezultate:

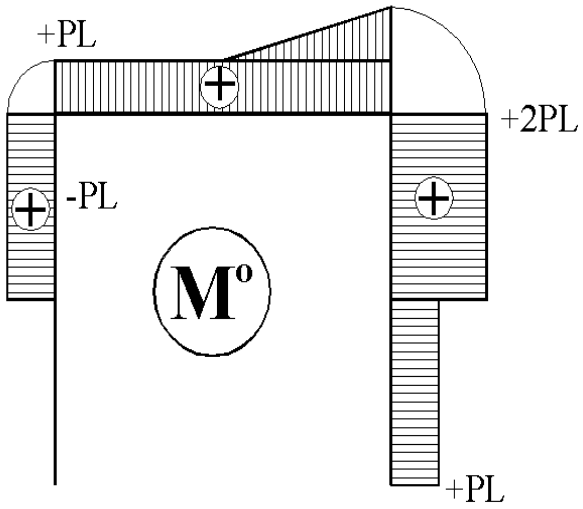
δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{7}{12}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-1,045P	1,159P	0,5225P L	90 mm

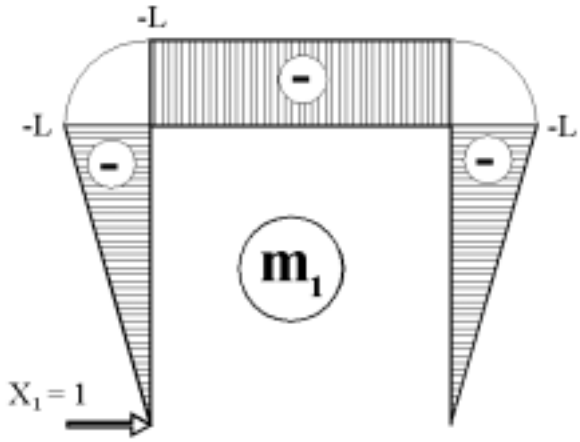


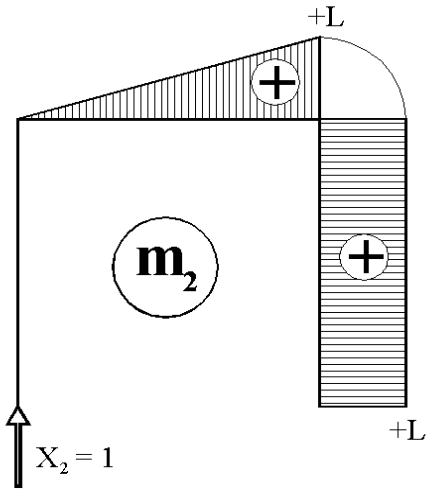
PROBLEMA NR. 3c.20

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



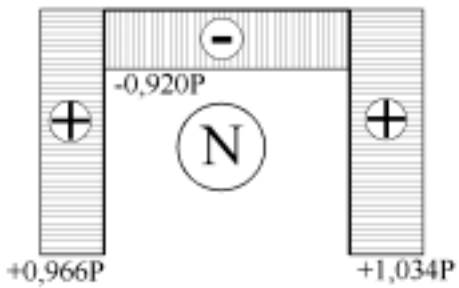


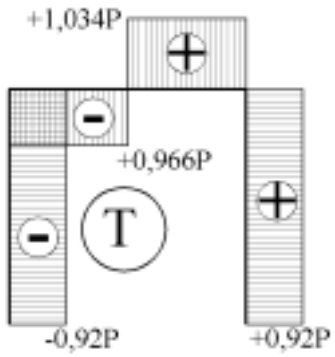


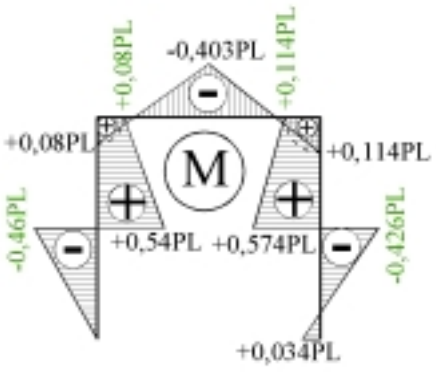


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{5}{2}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{53}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	0,920P	-0,966P	0,574PL	92 mm

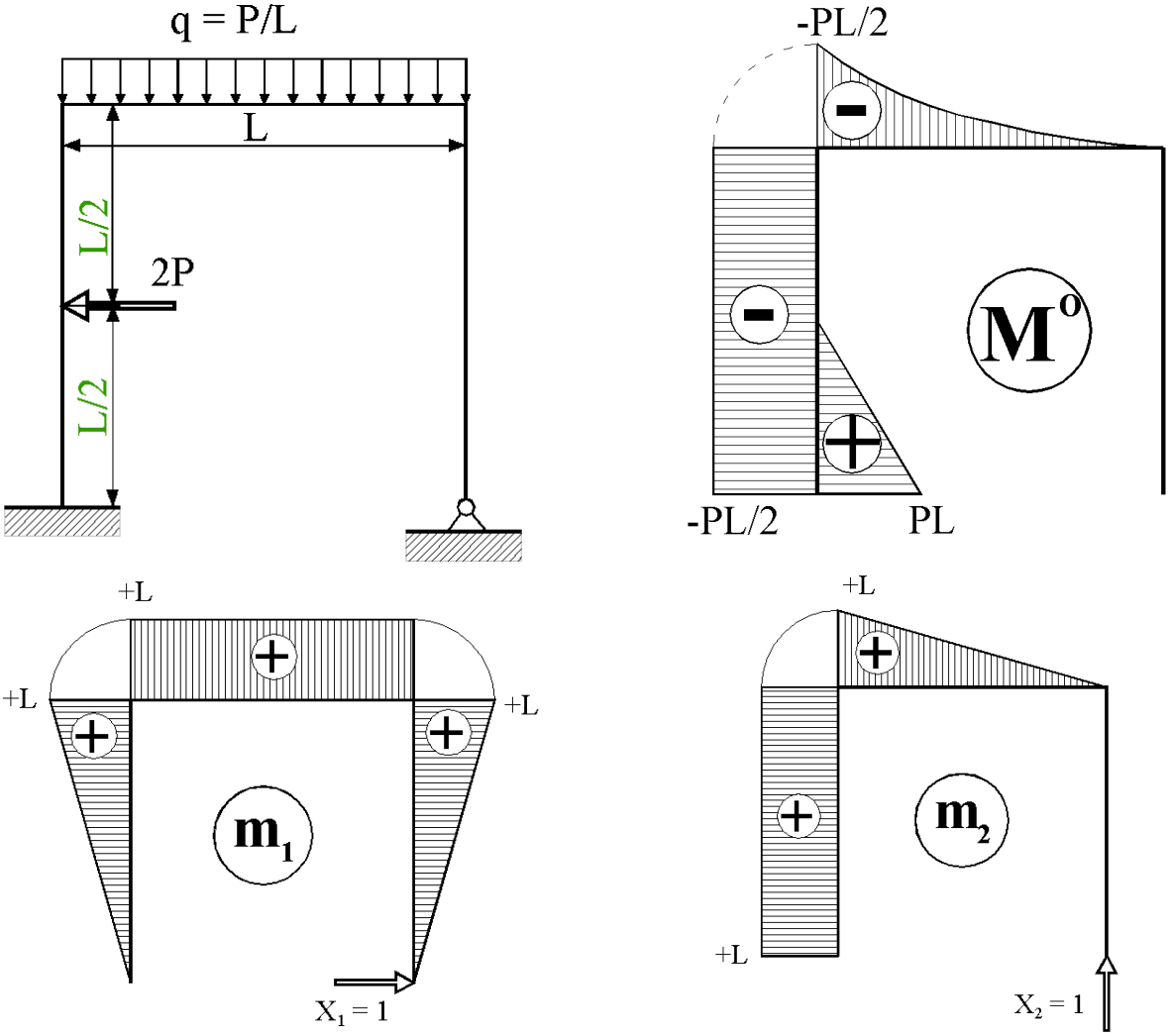






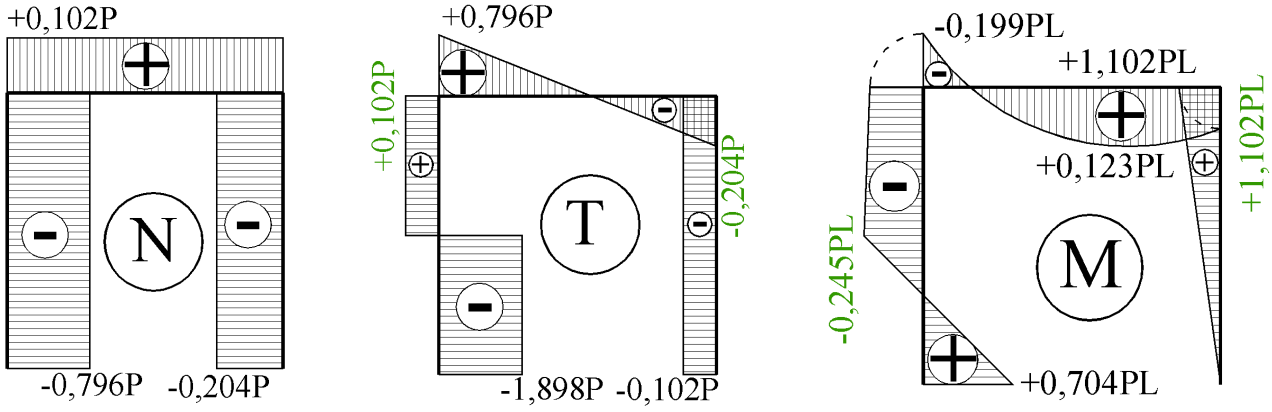
PROBLEMA NR. 3c.21

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



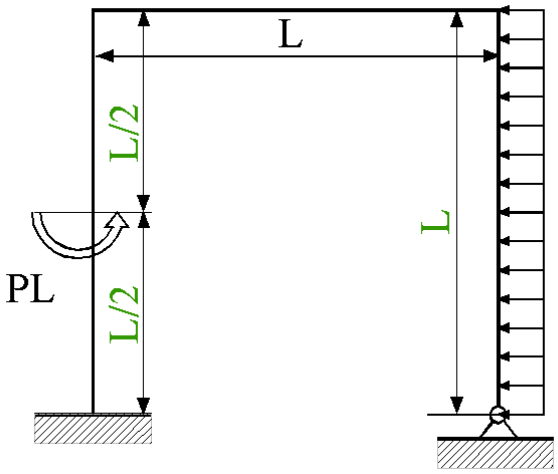
Rezultate:

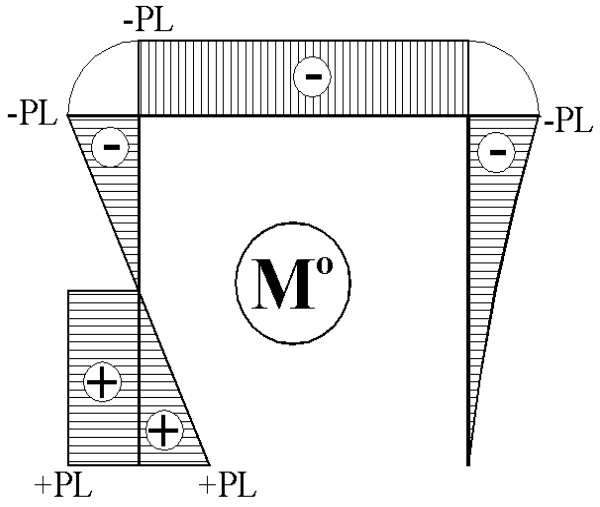
δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{3}{8}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{3}{8}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	0,102P	0,204P	0,704PL	99 mm

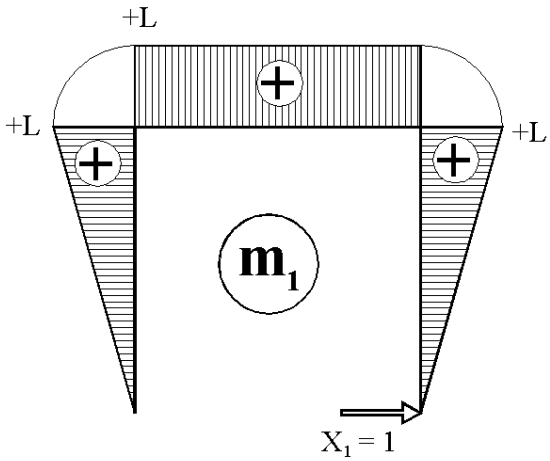


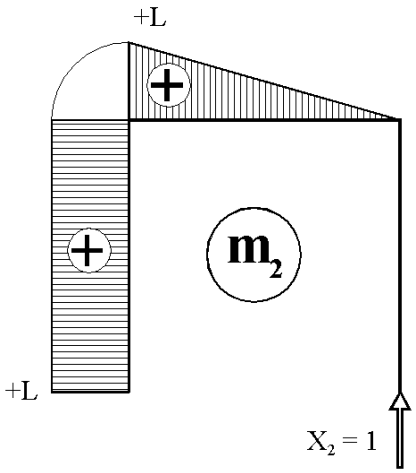
PROBLEMA NR. 3c.22

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



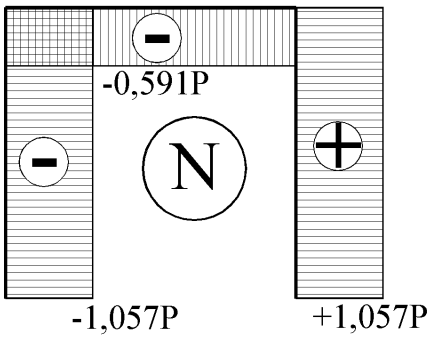


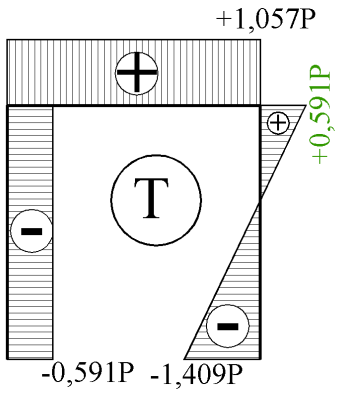


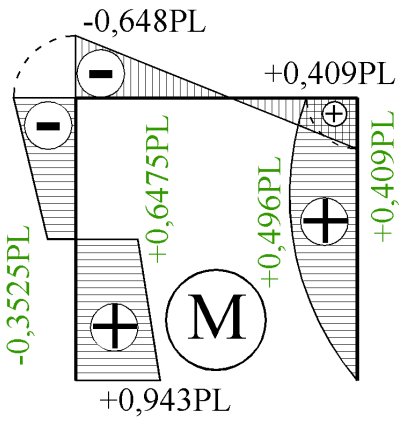


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{31}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	0	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	1,409P	-1,057P	0,943PL	109 mm



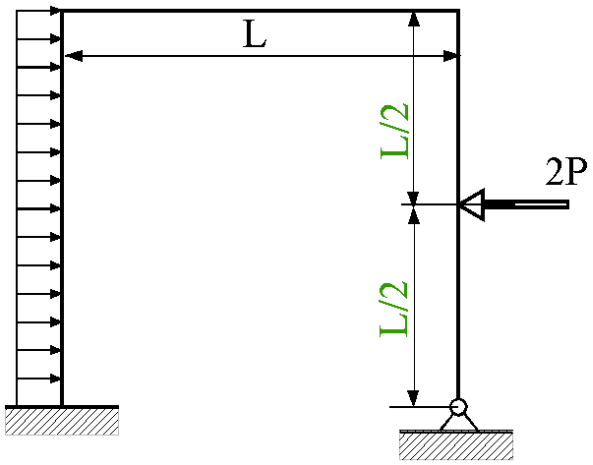


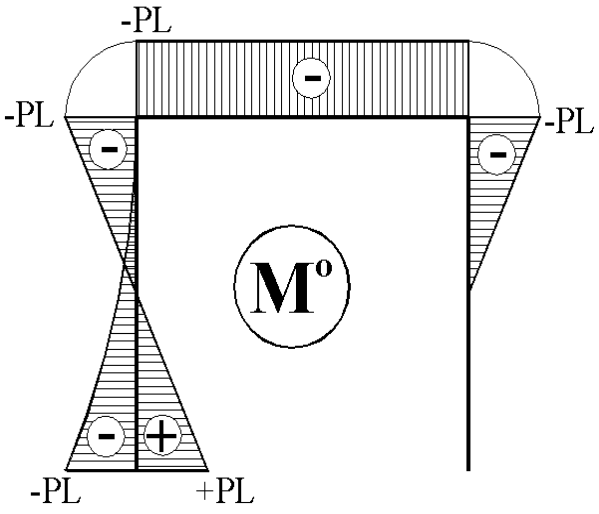


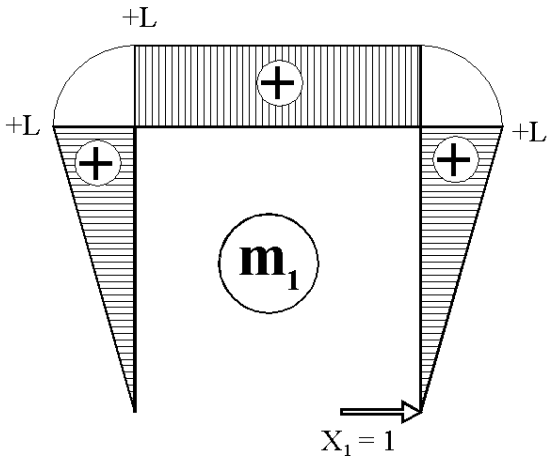
PROBLEMA NR. 3c.23

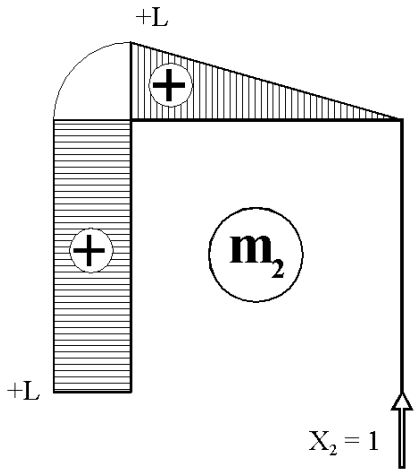
Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.

$q = 2P/L$



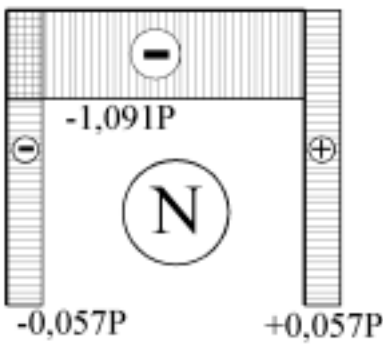


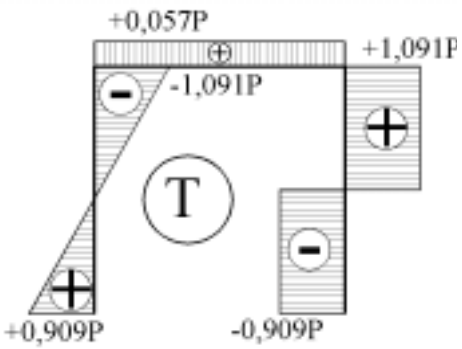


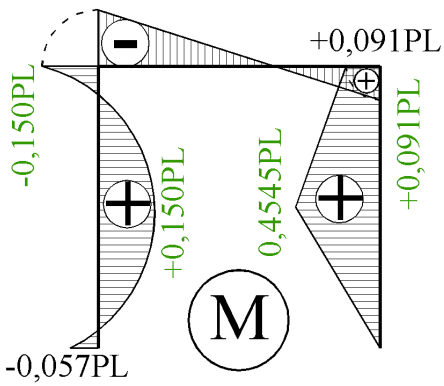


Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$-\frac{35}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{5}{6}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	0,909P	-0,057P	0,4545PL	86 mm

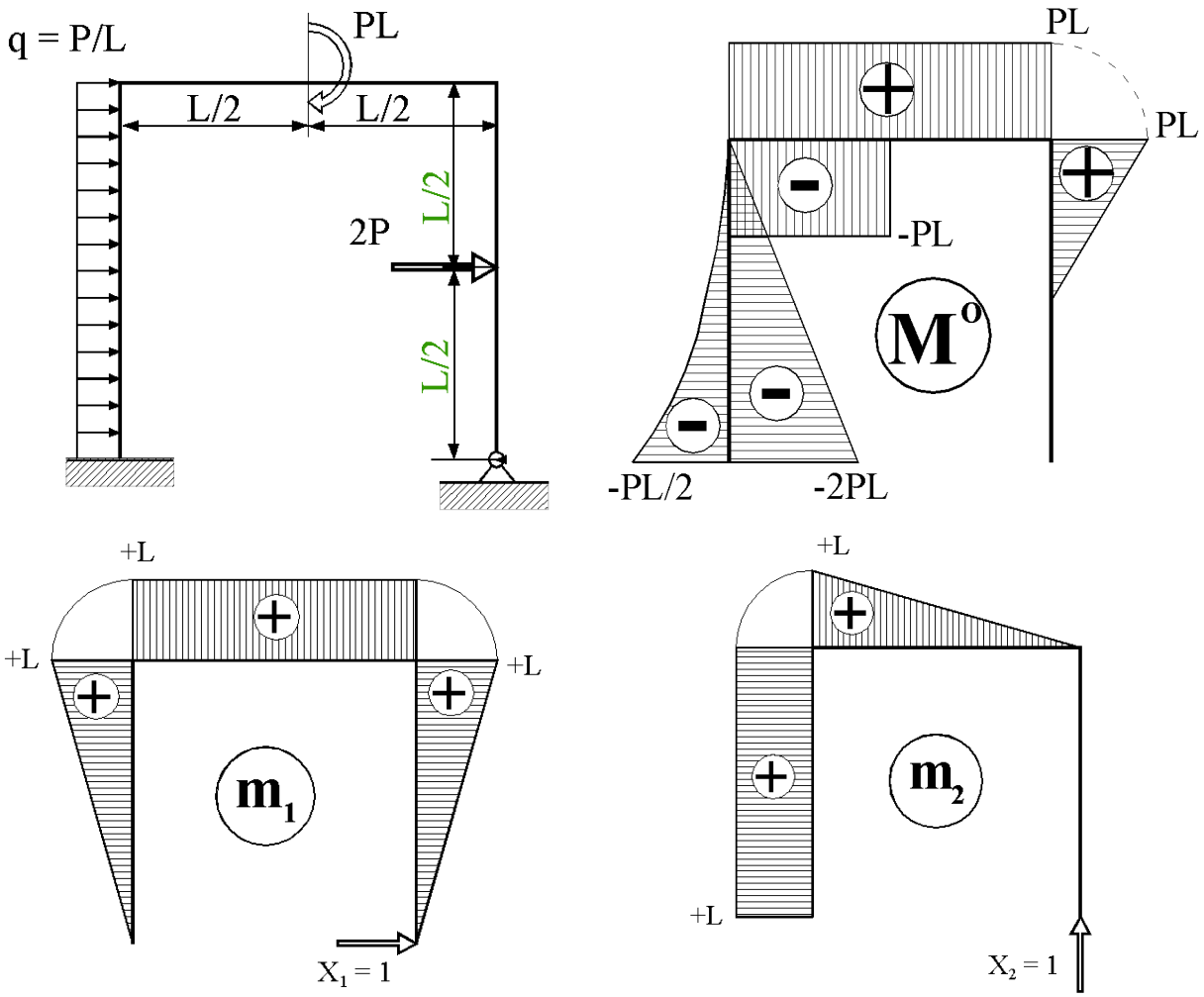






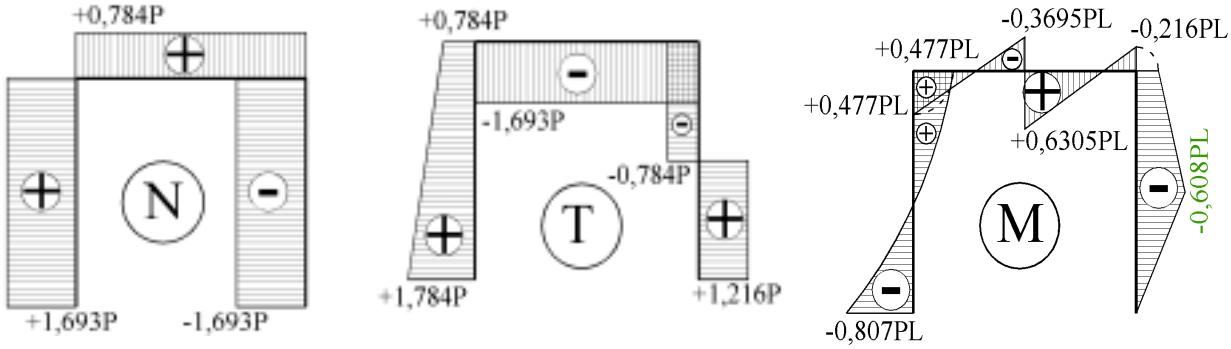
PROBLEMA NR. 3c.24

Se cunosc: P, L, EI, forma secțiunii (circulară, de diametru d)
Se cer: δ_{10}, δ_{20}, δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, X_1, X_2, M_{max}, d.



Rezultate:

δ_{10}	δ_{20}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{22}	X_1	X_2	M_{max}	d
$\frac{1}{3}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$-\frac{25}{24}\cdot\frac{P\cdot L^3}{E\cdot I}$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{L^3}{E\cdot I}$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{L^3}{E\cdot I}$	-1,216P	1,693P	0,807PL	104 mm



MODEL 3d

SISTEM PLAN FORMAT DIN TREI BARE DREPTE SUDATE DE TREI ORI STATIC NEDETERMINAT

Enunț

Se consideră un cadru plan format din trei bare drepte sudate, de aceeaşi lungime şi rigiditate constantă, încastrat la capete, supus la încovoiere, forfecare şi întindere-compresiune, datorită acțiunii următoarelor tipuri *sarcini exterioare:* foțe concentrate, sarcini uniform distribuite şi cupluri de forțe (fig. 3d.1). Se cere să se determine reacțiunile, să se traseze diagramele de eforturi axiale, tăietoare şi încovoietoare, să se dimensioneze şi să se calculeze deplasarea şi rotirea secțiunii aflată la mijlocul barei orizontale.

Metode şi relații pentru rezolvarea problemei

În locul legăturilor suprimate se introduc *forțele şi momentele de legătură* (conform axiomei legăturilor), în total 6 reacțiuni, cunoscute ca poziție şi direcții, dar necunoscute ca modul (fig. 3d.2). Sistemul este *de trei ori static nederminat* deoarece se pot scrie trei ecuații de echilibru (gradul de nedeterminare este egal cu diferența dintre numărul total de necunoscute şi numărul de ecuații de echilibru din Mecanică*: GN=N-E)*.

a. Pentru rezolvarea problemei se foloseşte *metoda eforturilor*:

1. Se alege *sistemul de bază*, adică un *sistem static determinat* care se obține din sistemul real prin suprimarea unui număr de legături exterioare (în cazul de față se suprimă încastrarea care răpeşte corpului trei grade de libertate, şi anume, deplasările după Ox şi Oy, respectiv rotirea după Oz) astfel încât sistemul să devină static determinat înlocuindu-se aceste legături cu *necunoscutele static nedeterminate* X_1 , X_2 *respectiv* X_3 (fig. 3d.3).
2. Se exprimă deplasările din secțiunea unde au fost introduse necunoscutele static nedeterminate X_1 , X_2 şi X_3 , *în sistemul de bază,* aplicând principiul

suprapunerii efectelor pentru cele patru grupe de sarcini (*sarcinile exterioare*, $X_1=1$, $X_2=1$ *şi* respectiv $X_3=1$):

- deplasările δ_{10} , δ_{20} şi δ_{30} corespund *sarcinilor exterioare*, deplasări calculate după cele trei direcții ale necunoscutelor X_1 , X_2 şi X_3;
- deplasările corespunătoare unor sarcini unitare $X_1=1$ (δ_{11}, δ_{21} , δ_{31}) , $X_2=1$ (δ_{12}, δ_{22} , δ_{32}) respectiv $X_3=1$ (δ_{13}, δ_{23} , δ_{33}) determinate după cele trei direcții ale necunoscutelor X_1 , X_2 şi X_3 ;

3. Prin suprapunerea efectelor celor patru grupe de sarcini se obțin deplasările totale *în sistemul de bază,* care trebuie să fie *identice cu cele din sistemul real*:

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0$$

$$\delta_3 = \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$

Deplasările de mai sus se calculează prin metoda Mohr-Maxwell şi aplicând regula lui Vereşceaghin de integrare grafică (sau regula 1/3 a lui Simpson) şi luând în considerare numai solicitarea principală de încovoiere (se neglijează efectul eforturilor de întindere-compresiune şi tăietoare):

$$\delta_{i0} = \sum \int \frac{m_i M^o}{EI} dx \qquad i = 1,2,3; \qquad \delta_{ik} = \sum \int \frac{m_i m_k}{EI} dx \qquad i,k = 1,2,3$$

După determinarea valorilor deplasărilor δ_{i0} , δ_{ik} se rezolvă sistemul format din cele trei ecuații cu trei necunoscute X_1, X_2 şi X_3 .

Soluțiile X_1, X_2 şi X_3 se determină aplicând regula lui Cramer:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-\delta_{10}\delta_{22}\delta_{33} - \delta_{30}\delta_{12}\delta_{23} - \delta_{20}\delta_{13}\delta_{33} + \delta_{30}\delta_{13}\delta_{22} + \delta_{20}\delta_{12}\delta_{33} + \delta_{10}\delta_{33}^2}{\delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} + 2\delta_{12}\delta_{23}\delta_{13} - \delta_{22}\delta_{13}^2 - \delta_{11}\delta_{23}^2 - \delta_{33}\delta_{12}^2};$$

$$X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-\delta_{20}\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{10}\delta_{13}\delta_{23} - \delta_{30}\delta_{12}\delta_{13} + \delta_{20}\delta_{13}^2 + \delta_{30}\delta_{12}\delta_{23} + \delta_{10}\delta_{12}\delta_{33}}{\delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} + 2\delta_{12}\delta_{23}\delta_{13} - \delta_{22}\delta_{13}^2 - \delta_{11}\delta_{23}^2 - \delta_{33}\delta_{12}^2};$$

$$X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-\delta_{30}\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{20}\delta_{12}\delta_{13} - \delta_{10}\delta_{12}\delta_{23} + \delta_{10}\delta_{22}\delta_{13} + \delta_{20}\delta_{11}\delta_{23} + \delta_{30}\delta_{12}^2}{\delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} + 2\delta_{12}\delta_{23}\delta_{13} - \delta_{22}\delta_{13}^2 - \delta_{11}\delta_{23}^2 - \delta_{33}\delta_{12}^2};$$

3. b. Diagramele de eforturi *N, T şi M* se pot trasa fie direct în sistemul real ținând seama că $H_A=X_1$, $V_A=X_2$, şi $M_A=X_3$, fie în sistemul de bază aplicând

principul suprapunerii efectelor celor patru grupe de sarcini (*sarcinile exterioare*, X_1, X_2 şi X_3):

$$N = N^o + n_1 \cdot X_1 + n_2 \cdot X_2 + n_3 \cdot X_3$$

$$T = T^o + t_1 \cdot X_1 + t_2 \cdot X_2 + t_3 \cdot X_3$$

$$M = M^o + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 + m_3 \cdot X_3$$ unde:

-N^o, T^o şi M^o reprezintă diagramele de eforturi axiale, tăietoare şi încovoietoare *din sistemul de bază* sub acțiunea sarcinilor exterioare;

- n_k, t_k şi m_k reprezintă diagramele de eforturi axiale, tăietoare şi încovoietoare *în sistemul de bază* sub acțiunea necunoscutei satatic nedeterminate $X_k=1$.

c. Deplasarea şi rotirea secțiunii C de la mijlocul barei orizontale se pot determina folosind acelaşi principiu al suprapunerii efectelor sarcinilor exterioare date şi a eforturilor static nedeterminate X_1, X_2 şi X_3, cunoscute acum, tot în sistemul de bază, folosind metoda energetică Mohr Maxwell.

$$\delta_C = \delta_{C0} + \delta_{C1} X_1 + \delta_{C2} X_2 + \delta_{C3} X_3$$

$$\varphi_C = \varphi_{C0} + \varphi_{C1} X_1 + \varphi_{C2} X_2 + \varphi_{C3} X_3$$

unde:

- δ_{C0} /φ_{C0}– este deplasarea respectiv rotirea secțiunii *C* pe direcția verticală sub acțiunea forțelor exterioare date în sistemul de bază:

$$\delta_{C0} = \sum \int \frac{m_C M^o}{EI} dx; \qquad \varphi_{C0} = \sum \int \frac{m^*_C M^o}{EI} dx$$

- δ_{C1} /φ_{C1} şi δ_{C2} /φ_{C2} – deplasările respectiv rotirile secțiunii C pe direcția verticală în sistemul de bază, sub acțiunea forțelor unitare $X_1=1$ respectiv $X_2=1$ în sistemul de bază:

$$\delta_{Ck} = \sum \int \frac{m_C m_k}{EI} dx; \quad \varphi_{Ck} = \sum \int \frac{m^*_C m_k}{EI} dx \qquad k = 1,2,3$$

Deplasarea pe direcție verticală / rotirea secțiunii C se determină desi astfel:

$$\delta_C = \frac{1}{EI}\left[\int (M^0 + X_1 m_1 + X_2 m_2 + X_3 m_3) m_C dx\right] = \frac{1}{EI}\int M m_C dx$$

$$\varphi_C = \frac{1}{EI}\left[\int (M^0 + X_1 m^*_1 + X_2 m^*_2 + X_3 m^*_3) m^*_C dx\right] = \frac{1}{EI}\int M m^*_C dx$$

CAZ PARTICULAR

Se consideră cadrul plan format din trei bare sudate încastrat în *A* şi articulat în *B,* încărcat cu un sistem de forțe ca figura 3d.1. **S**e cunosc*: P = 20 kN; L=1m,* secțiunea barei circulară de diametru *d*, tensiunea admisibilă şi modulul de elasticitate al materialului: σ_a*=150 MPa*, *E= 2,1.10*^{6} *MPa.* **Se cere:**

a) să se determine reacțiunile din încastrarea *A* şi *B*: V_A, H_A, M_A, V_B, H_B , M_B.

b) să se traseze diagramele de eforturi pentru cadru: de eforturi axiale (*N*), de eforturi tăietoare *(T*) şi *de* eforturi încovoietoare *(M*);

c) să se dimensioneze bara la solicitarea principală de încovoiere;

d) să se calculeze deplasarea pe verticală şi rotirea secțiunii C

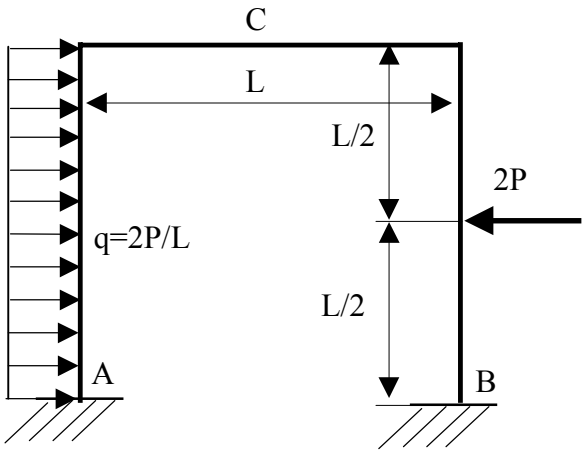


Fig. 3d.1

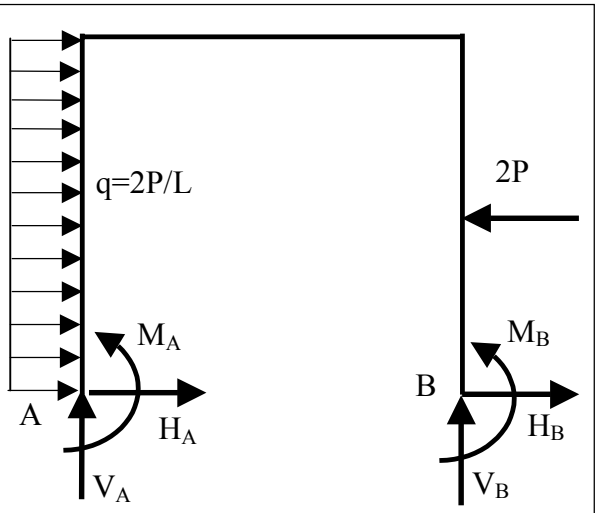


Fig. 3d.2

Rezolvare

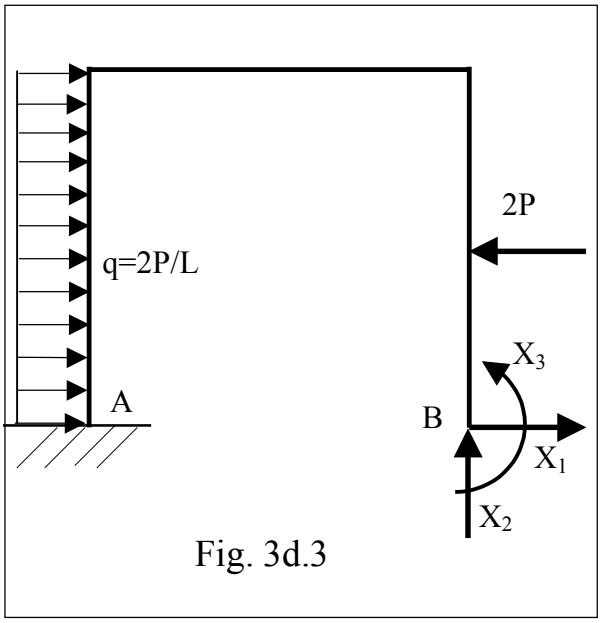


Fig. 3d.3

a. Sistemul fiind de două ori static nedeterminat *se alege sistemul de bază* ca în fig. 3d.3 prin suprimarea încastrării din B şi introducerea necunoscutelor static nedeterminate X_1 X_2 şi X_3. Se obține un sistem static determinat pentru care vom determina deplasările din sistemul de bază sub acțiunea a 4 seturi de sarcini: *(2P, q), (X_1=1), (X_2=1)* şi *(X_3=1)*

Deplasările se calculează prin metoda Mohr-Maxwell conform relațiilor:

$$\delta_{10}=\sum\int\frac{m_1M^o}{EI}dx;\qquad \delta_{20}=\sum\int\frac{m_2M^o}{EI}dx;\qquad \delta_{30}=\sum\int\frac{m_3M^o}{EI}dx;$$

$$\delta_{11}=\sum\int\frac{m_1^2}{EI}dx;\quad \delta_{12}=\delta_{21}=\sum\int\frac{m_1m_2}{EI}dx;\quad \delta_{13}=\delta_{31}=\sum\int\frac{m_1m_3}{EI}dx;$$

$$\delta_{22}=\sum\int\frac{m_2^2}{EI}dx;\quad \delta_{33}=\sum\int\frac{m_3^2}{EI}dx;\qquad \delta_{23}=\delta_{32}=\sum\int\frac{m_2m_3}{EI}dx;$$

Pentru calculul integralelor folosind metoda lui Vereşceaghin se parcurg următorii paşi:

- se construieşte diagrama de momente încovoietoare *(M^o)* pentru sistemul de bază în care acționează numai sarcinile exterioare *2P* şi *q* (fig.3d.4a);
- se construiesc diagramele de momente încovoietoare în sistemul de bază: *(m_1)* când acționează numai sarcina $X_1=1$, *(m_2)* când acționează numai sarcina $X_2=1$ respectiv *(m_3)* când $X_3=1$ (fig.3d.4 : b,c,d) .

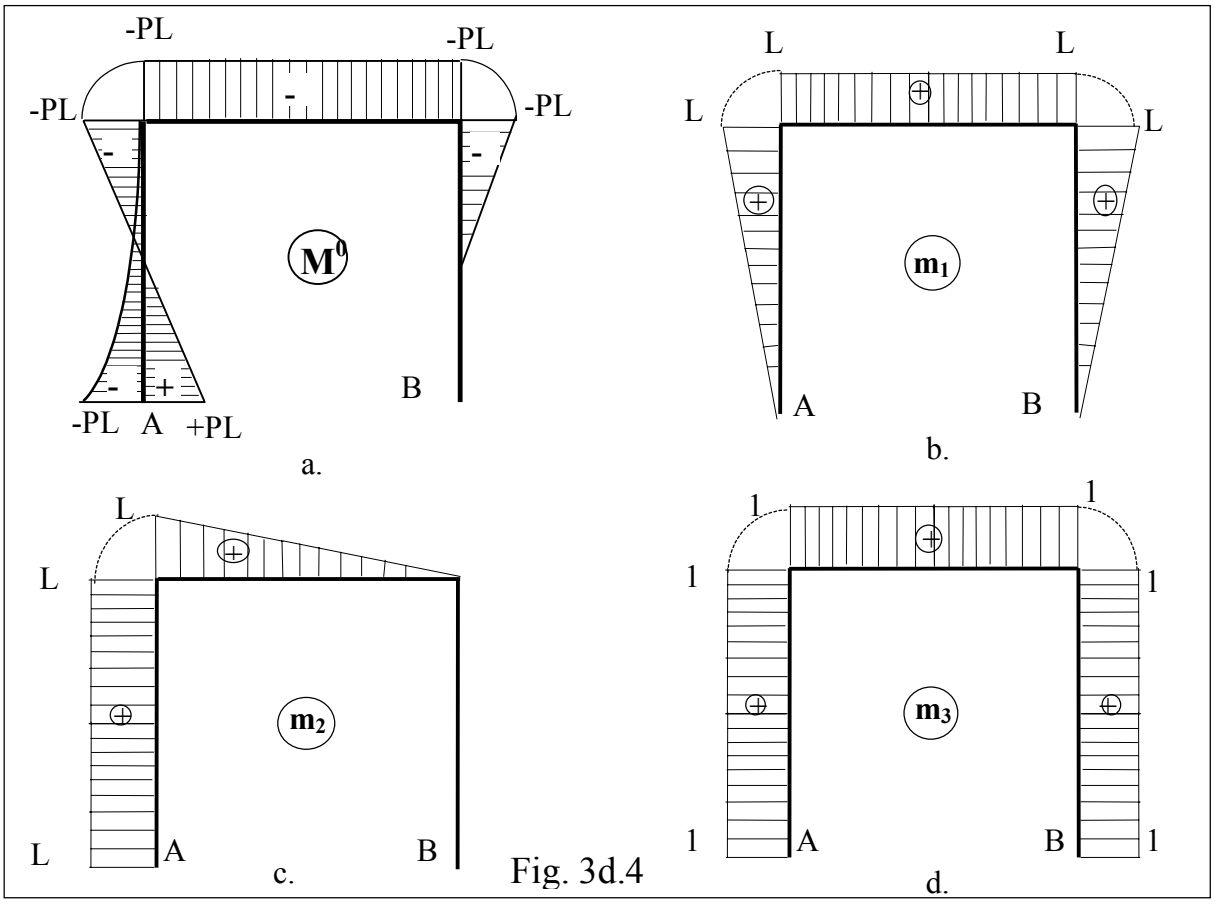


Fig. 3d.4

- se calculează integralele de mai sus aplicând regula lui Vereşceaghin de integrare grafo-analitică, înmulțind ariile corespunyătoare din diagrama M^0 *(m_j)* cu ordonatele corespunzătoare din diagrama m_k:

$$\delta_{k0} = \sum A_i^{(0)} y_{Ci}^{(k)}; \qquad \delta_{jk} = \sum A_j^{(j)} y_{Cj}^{(k)}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\frac{L}{2}(-PL)\frac{5L}{6} + L(-PL)L + \frac{1}{2}\frac{L}{2}(-PL)\frac{5L}{6} + \frac{1}{2}\frac{L}{2}(PL)\frac{L}{6} + \frac{1}{3}\cdot L\cdot(-PL)\cdot\frac{L}{4}\right] = -\frac{35PL^3}{24EI}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\frac{L}{2}(-PL)\cdot 0 + L(-PL)\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\frac{L}{2}(-PL)L + \frac{1}{2}\frac{L}{2}(PL)L + \frac{1}{3}\cdot L\cdot(-PL)\cdot L\right] = -\frac{5PL^3}{6EI}$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\frac{L}{2}(-PL)\cdot 1 + L(-PL)\cdot 1 + \frac{1}{2}\frac{L}{2}(-PL)\cdot 1 + \frac{1}{2}\frac{L}{2}(PL)\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot L\cdot(-PL)\cdot 1\right] = -\frac{19}{12}\frac{PL^2}{EI}$$

$$\delta_{11} = \sum\int\frac{m_1^2}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot L\cdot L\cdot\frac{2L}{3} + L\cdot L\cdot L + \frac{1}{2}\cdot L\cdot L\cdot\frac{2L}{3}\right] = \frac{5L^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum\int\frac{m_1 m_2}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[L\cdot L\cdot\frac{L}{2} + \frac{1}{2}L\cdot L\cdot L\right] = \frac{L^3}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum\int\frac{m_1 m_3}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[2\cdot\frac{1}{2}L\cdot L\cdot 1 + L\cdot L\cdot 1\right] = 2\frac{L^2}{EI}$$

$$\delta_{22} = \sum\int\frac{m_2^2}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot L\cdot L\cdot\frac{2L}{3} + L\cdot L\cdot L\right] = \frac{4L^3}{3EI}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum\int\frac{m_2 m_3}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}L\cdot L\cdot 1 + L\cdot L\cdot 1\right] = \frac{3}{2}\frac{L^2}{EI}$$

$$\delta_{33} = \sum\int\frac{m_3^2}{EI}dx = \frac{1}{EI}[3\cdot L\cdot 1\cdot 1] = 3\frac{L}{EI}$$

Înlocuind valorile obținute în ecuațiile canonice rezultă:

$$\begin{cases} \frac{5L^3}{3EI}X_1 + \frac{L^3}{EI}X_2 + 3\frac{L^2}{EI}X_3 = \frac{35PL^3}{24EI} \\ \frac{L^3}{EI}X_1 + \frac{4L^3}{3EI}X_2 + \frac{3}{2}\frac{L^2}{EI}X_3 = \frac{5PL^3}{6EI} \\ \frac{L^2}{EI}X_1 + \frac{3L^2}{2EI}X_2 + 3\frac{L}{EI}X_3 = \frac{19PL^2}{12EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40X_1 + 24X_2 + 48\frac{X_3}{L} = 35P \\ 6X_1 + 8X_2 + 9\frac{X_3}{L} = 5P \\ 24X_1 + 18X_2 + 36\frac{X_3}{L} = 19P \end{cases}$$

$$\Delta = 1008; \qquad \Delta_1 = 1218P; \qquad \Delta_2 = 72P; \qquad \Delta = -316P;$$

$$\Rightarrow \qquad X_1 = 1{,}209P; \qquad X_2 = 0{,}071P; \qquad \frac{X_3}{L} = -0{,}314P$$

Reacțiunile din încastrările *A* şi *B* sunt:

$H_B = X_1 = 1{,}209\ P; \qquad V_B = X_2 = 0{,}071\ P;$

$M_B = X_3 = -0{,}314\ PL;$

$H_A = -X_1 + q\cdot 2L - 2P = -1{,}209\ P;$

$V_A = -V_B = -0{,}071\ P\ ;$

$M_A = -M_B - V_B L = 0{,}243\ PL.$

4. Diagramele de eforturi N, T şi M

Aceste diagrame se trasează direct şi sunt prezentate în fig. 3d.5, 3d.6 şi 3d.7:

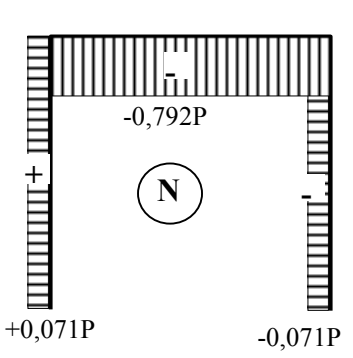


Fig. 3d.5

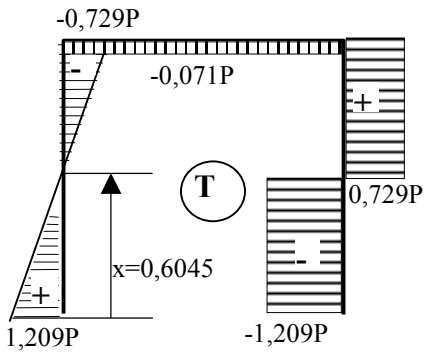


Fig. 3d.6

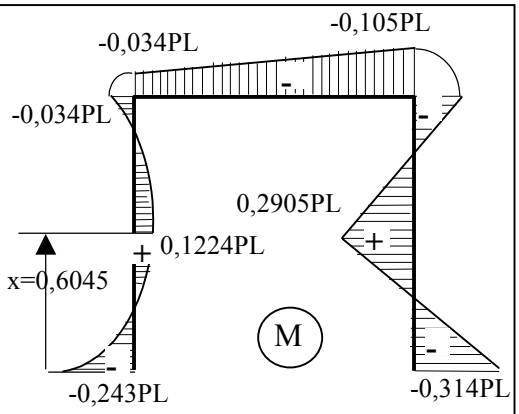


Fig. 3d.7

5. Dimensionarea barei la încovoiere

Din diagrama M (fig.3.5) se determină momentul maxim $|M_{max}| = 0,314PL$

Relația de dimensionare la solicitarea de încovoiere este:

$$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{M_{iy\,max}}{\sigma_a} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32M_{iy\,max}}{\pi\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 6280000}{\pi \cdot 150}} = 75,27mm$$

6. Calculul deplasării şi rotirii secțiunii de la mijlocul barei orizontale

Pentru calculul deplasării şi rotirii secțiunii C de la mijlocul barei orizontale se foloseşte metoda Mohr Maxwell : $\delta_C = \int \frac{Mm_C}{EI} dx; \quad \varphi_C = \int \frac{Mm_C^*}{EI} dx$

unde M este diagrama de eforturi încovoietoare din sistemul real (din sistemul de bază atât pentru forțele date cât şi pentru necunoscutele static nedeterminate X_1 şi X_2 calculate fig. 3d.8) iar m_C şi m^*_C reprezintă diagrama de eforturi încovoietoare din sistemul de bază când în secțiunea C acționează o forță unitară verticală $P = 1$ respectiv când în secțiunea C acționează un cuplu unitar $N = 1$ (fig. 3d.9, 3d.10). Aplicând regula lui Simpson rezultă:

$$\delta_C = \int \frac{m_C M}{EI} dx = \frac{1}{6EI} \cdot \frac{L}{2}[(-0,0695PL) \cdot (0) + 4 \cdot (-0,05175PL) \cdot (-0,25L) + (-0,034PL) \cdot (-0,5L)] +$$

$$+ \frac{1}{6EI} \cdot L[(-0,034PL) \cdot (-0,5L) + 4 \cdot (0,1115PL) \cdot (-0,5L) + (-0,243PL) \cdot (-0,5L)] = -11,17 \cdot 10^{-3} \frac{PL^3}{EI}$$

$$\varphi_C = \int \frac{m^*_C M}{EI} dx = \frac{1}{6EI} \cdot \frac{L}{2}[(-0,0695PL) \cdot (1) + 4 \cdot (-0,05175PL) \cdot (1) + (-0,034PL) \cdot (1)] +$$

$$+ \frac{1}{6EI} \cdot L[(-0,034PL) \cdot (1) + 4 \cdot (0,1115PL) \cdot (1) + (-0,243PL) \cdot (1)] = 2,29 \cdot 10^{-3} \frac{PL^3}{EI}$$

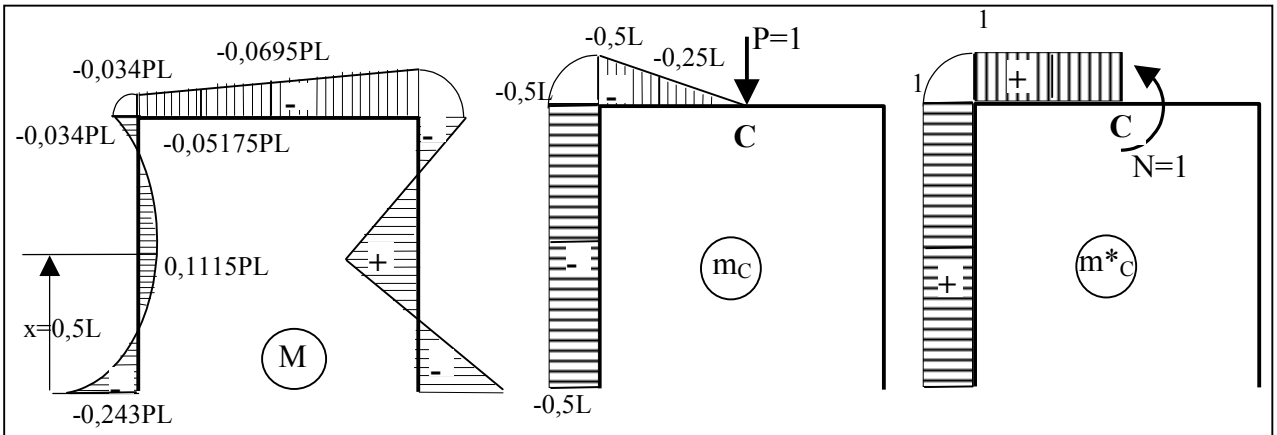


Fig. 3d.8 **Fig. 3d.9** **Fig. 3d.10**

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 3d UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Pentru rezolvarea Modelului 3d se calculează separat coeficienții deplasărilor α şi β din formulele: $\delta_{i0} = \alpha \frac{PL^3}{EI}$; $\delta_{ij} = \beta \frac{PL^3}{EI}$ *i, j=1,2,3* pentru un număr de cazuri simple prezentate în continuare, apoi se foloseşte principiul suprapunerii efectelor pentru rezolvarea problemei dorite. Pentru calculul deplasărilor şi necunoscutelor X_1, X_2 şi X_3 s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Nr.	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**q1**	**q2**	**q3**	**q4**	**q5**	**q6**
Crt	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0

Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	
q7	**q8**	**q9**	**N1**	**N2**	**N3**	**N4**	**N5**	**N6**	**N7**	**N8**	**N9**	**N10**	**N11**	**N12**	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

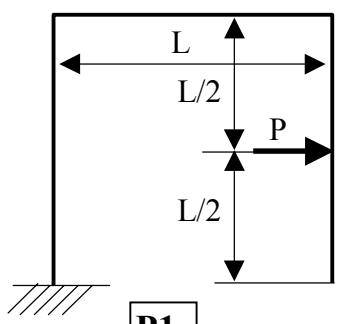
DATE DE IEŞIRE

AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL	AM	AN	AO	AP	AQ
α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	β_3	β_3	β_3	X_1/P	X_2/P	X_3/PL
δ_{10}	δ_{20}	δ_{30}	δ_{11}	$\delta_{12}=\delta_{12}$	δ_{13}	δ_{22}	$\delta_{23}=\delta_{32}$	δ_{33}			
-35/24	-5/6	-11/12	5/3	1	2	4/3	3/2	3	1,208	0,071	-0,314

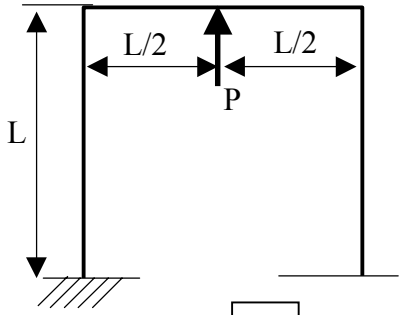
CALCULUL COEFICIENȚILOR PENTRU CAZURI SIMPLE DE ÎNCĂRCARE A CADRULUI PLAN FORMAT DIN TREI BARE

a. Valorile coeficienților pentru 9 cazuri de forțe concentrate

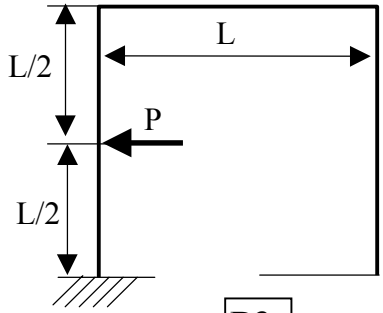
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
$\delta_{10}*EI/PL^3$	$\frac{33}{48}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{163}{162}$	$\frac{31}{81}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{162}$
$\delta_{20}*EI/PL^3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{29}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{68}{81}$	$\frac{31}{81}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$
$\delta_{30}*EI/PL^2$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$



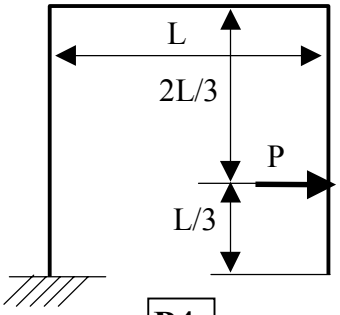
P1



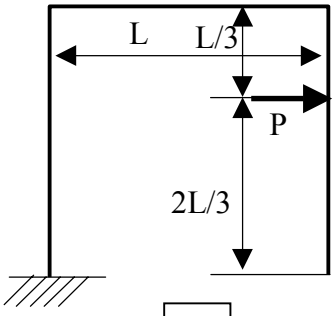
P2



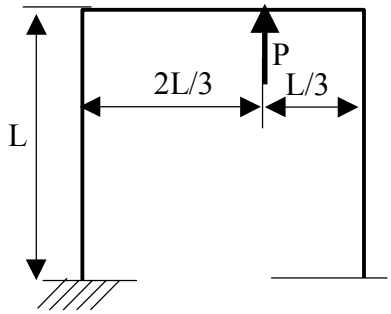
P3



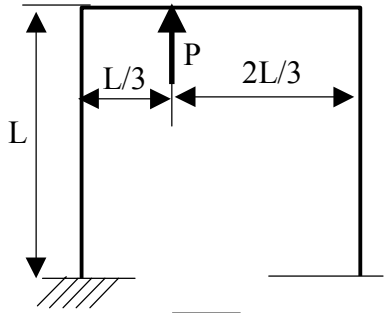
P4



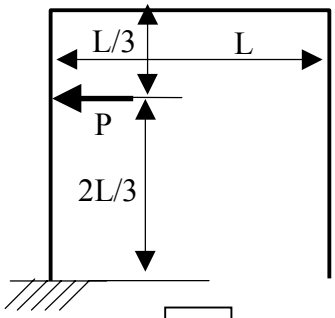
P5



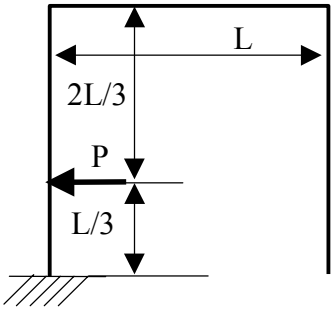
P6



P7



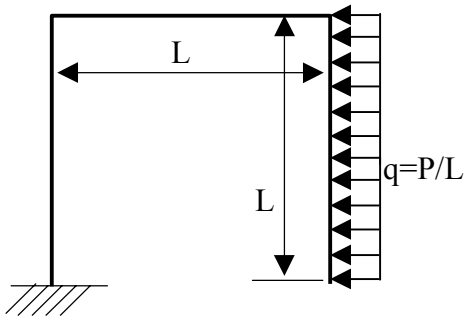
P8



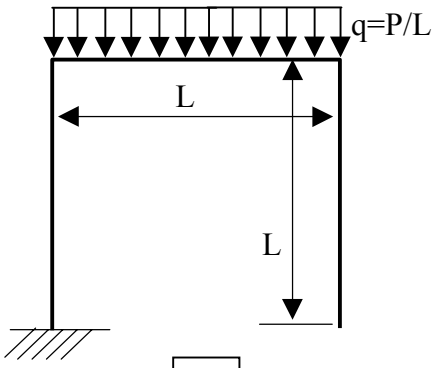
P9

b. Valorile coeficienților pentru 9 cazuri de forțe distribuite

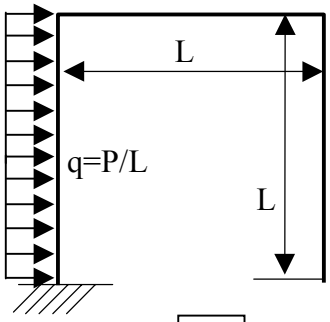
	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9
$\delta_{10}*EI/PL^3$	$-\frac{17}{24}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{75}{128}$	$-\frac{47}{384}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{5}{128}$	$-\frac{1}{384}$
$\delta_{20}*EI/PL^3$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{185}{384}$	$-\frac{55}{384}$		
$\delta_{30}*EI/PL^2$									



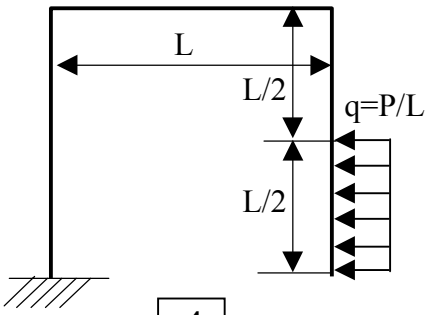
q1



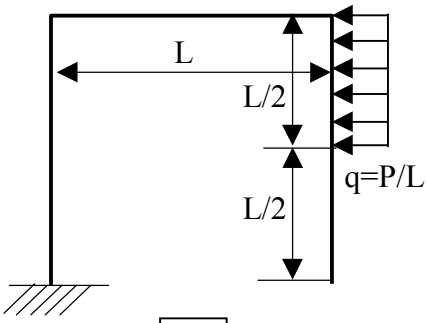
q2



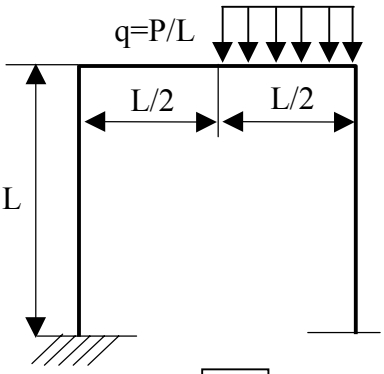
q3



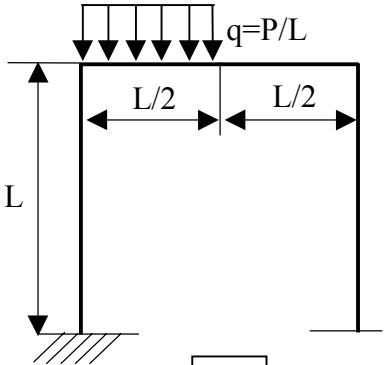
q4



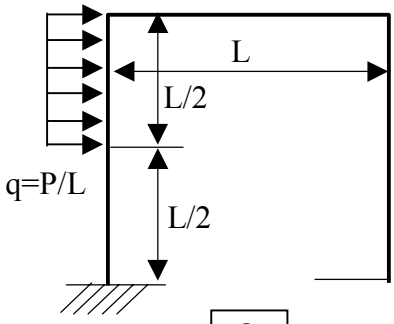
q5



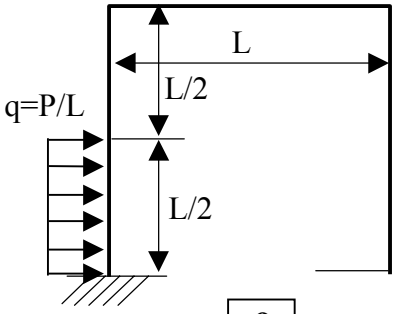
q6



q7



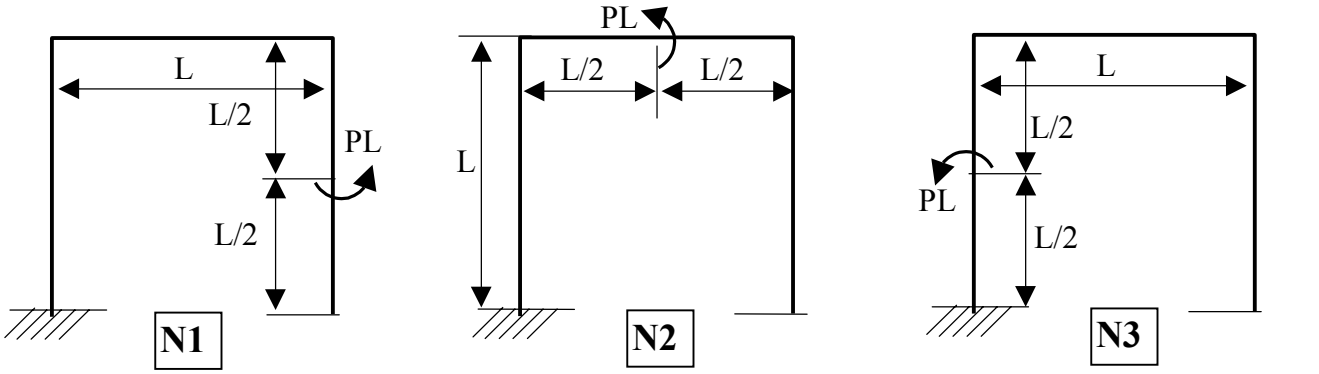
q8

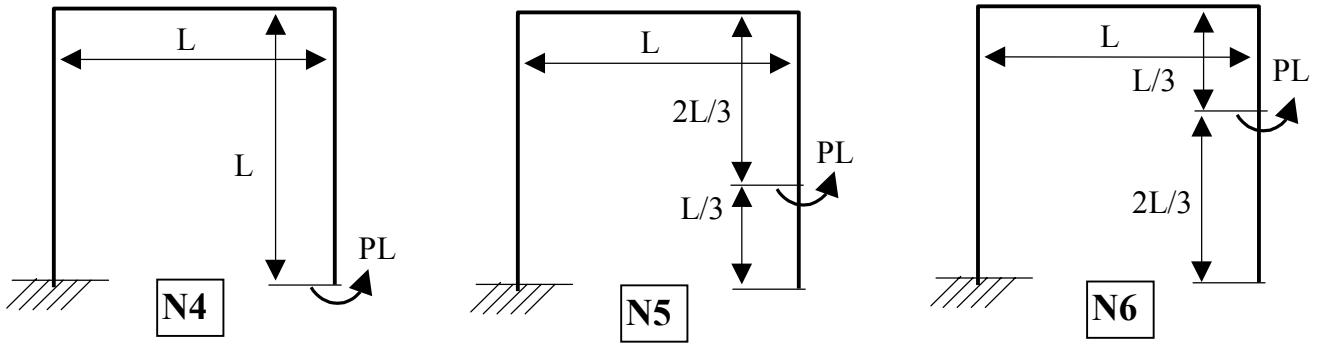


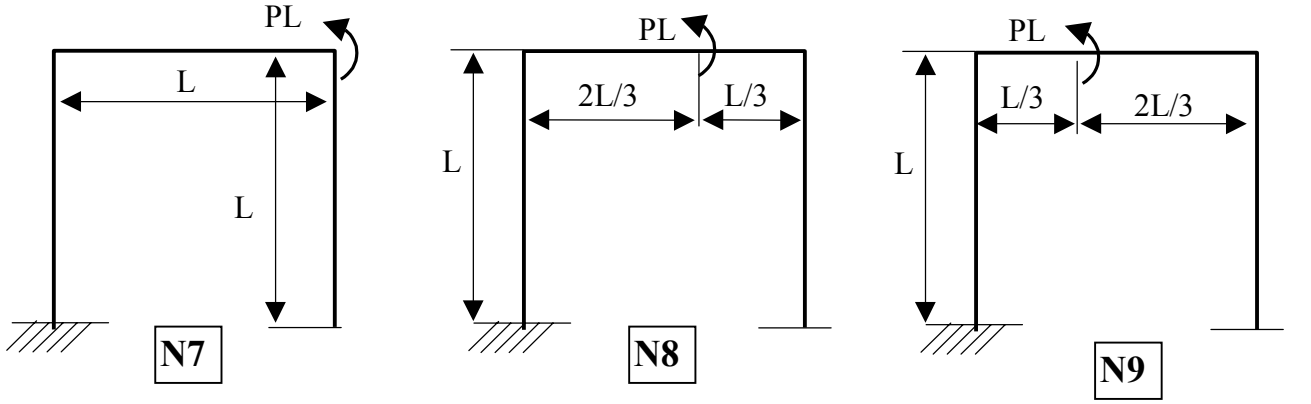
q9

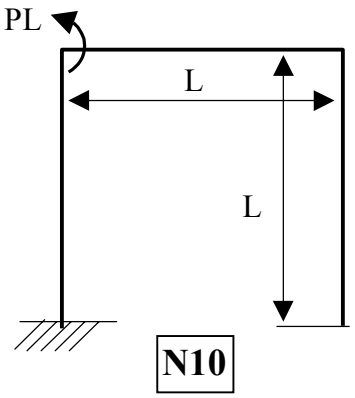
c. Valorile coeficienților pentru 12 cazuri de cupluri de forțe

	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	N11	N12
$\delta_{10}*EI/PL^3$		1		2								
$\delta_{20}*EI/PL^3$										1		
$\delta_{30}*EI/PL^2$				3			2			1		

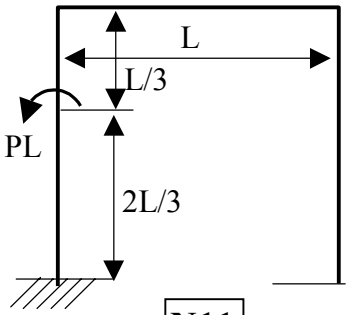




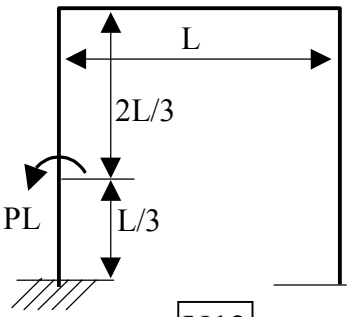




N10



N11



N12

MODELUL 4

FLAMBAJUL DE COMPRESIUNE AXIALĂ A BARELOR DREPTE

1. Calculul sarcinii maxime de flambaj

1.1. Enunțul problemei

Să se determine sarcina maximă pe care o poate suporta o bară de oțel (având σ_r=480 N/mm^2) din fig. 1.2, considerând 4 moduri de rezamare. Secțiunea transversală a barei este dată în fig. 1.1. Se dă c = 5, a_1 = 40 mm, a_2 = 60 mm, l = 800 mm

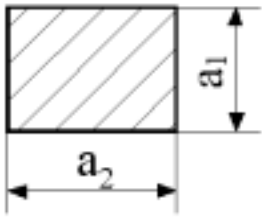
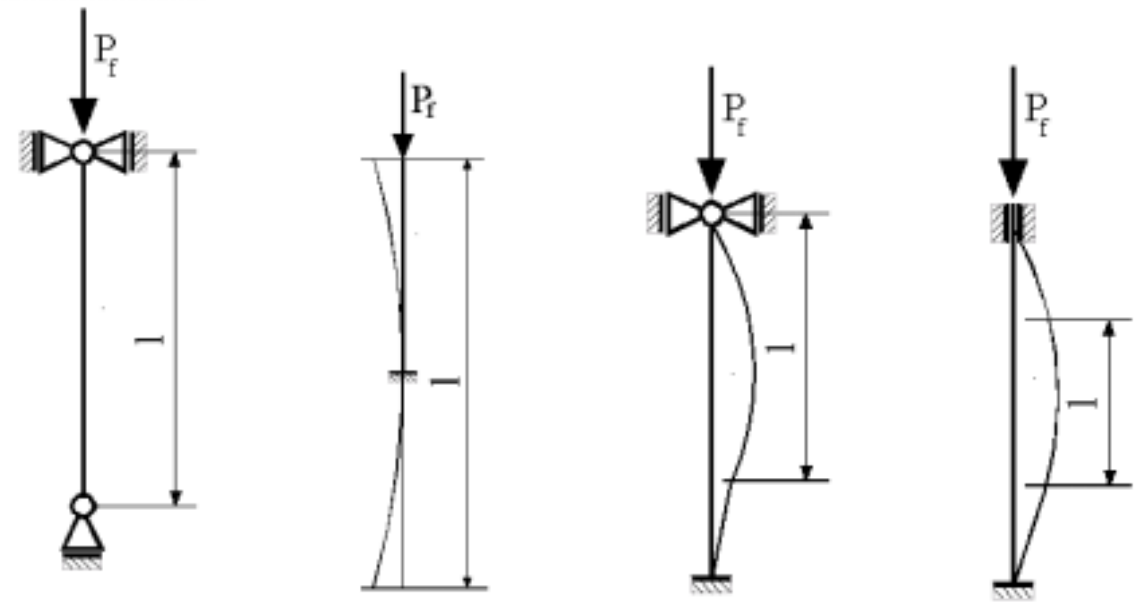


fig. 1.1



a. b. c. d.

Fig. 1.2

1.2. Relații de calcul

Lungimea de flambaj (l_f) pentru fiecare mod de rezemare dat în fig. 1 este:

a. $l_f = l$ - pentru bara articulată la ambele capete;

b. $l_f = 2l$ - pentru bara încastrată la un capăt şi liberă la celălalt;

c. $l_f = 0{,}7l$ - pentru bara articulată la un capăt şi încastrată la celălalt;

d. $l_f = 0{,}5l$ - pentru bara încastrată la ambele capete.

Coeficientul de zvelteță se calculează cu relația:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}}$$

unde:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$

S-a notat:

i_{min} - raza de inerție minimă;

I_{min} - momentul de inerție minim;

A - aria secțiunii transversale.

Tensiunea critică de flambaj se determină, în funcție de λ, cu relațiile:

$\sigma_f = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$ - pentru $\lambda > \lambda_o$; (cazul I)

$\sigma_f = a - b \cdot \lambda$ sau $\sigma_f = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$ - pentru $\lambda_1 < \lambda < \lambda_o$; (cazul II)

$\sigma_f = \sigma_c$ - pentru $\lambda < \lambda_1$. (cazul III)

S-a notat:

E - modulul de elasticitate longitudinal;

σ_c - limita de curgere;

λ_1, λ_o, a, b, c - constante de material

Valorile constantelor E, σ_c, λ_1, λ_o, a, b şi c sunt date în tabelul de mai jos.

Materialul	σ_c [N/mm^2]	**E** [N/mm^2]	λ_1	λ_0	**a**	**b**	**c**
OL 37 (σ_r = 360 N/mm^2)	240	$21\cdot10^4$	60	105	304	1,12	-
Oțel (σ_r = 480 N/mm^2)	310	$21\cdot10^4$	60	100	460	2,57	-
Oțel cu σ_r = 520 N/mm^2	360	$21\cdot10^4$	60	100	577	3,74	-
Oțel crom-molibden	-	$21\cdot10^4$	-	55	980	5,3	-
Oțel cu 5% nichel	-	$21\cdot10^4$	-	86	461	2,25	-
Duraluminiu	-	$7\cdot10^4$	-	30	372	2,14	-
Lemn	-	10^4	-	100	28,7	0,19	-
Fontă	-	$14\cdot10^4$	-	80	763	11,8	0,052

Sarcina critică de flambaj este dată de formula: $P_f = A \cdot \sigma_f$

Sarcina capabilă se calculează cu relația: $P_{cap} = \frac{P_f}{c}$

c fiind coeficientul de siguranță la flambaj.

1.3. Rezolvare

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{320000}{2400}} = 11{,}547 \text{ mm}$$

a. $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{800}{11{,}547} = 69{,}282 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_o$ (cazul II)

b. $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{1600}{11{,}547} = 138{,}564 \quad \rightarrow \quad \lambda > \lambda_o$ (cazul I)

c. $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{560}{11{,}547} = 48{,}497 \quad \rightarrow \quad \lambda < \lambda_1$ (cazul III)

d. $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{400}{11{,}547} = 34{,}641 \quad \rightarrow \quad \lambda < \lambda_1$ (cazul III)

a. $\sigma_f = a - b \cdot \lambda = 460 - 2{,}57 \cdot 69{,}282 = 281{,}945 \text{ N/mm}^2$

$$P_{cap} = \frac{A \cdot \sigma_f}{c} = \frac{2400 \cdot 281{,}945}{5} = 135334 \text{ N}$$

b. $$\sigma_f = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{3{,}142^2 \cdot 210000}{138{,}564^2} = 107{,}977 \text{ N/mm}^2$$

$$P_{cap} = \frac{A \cdot \sigma_f}{c} = \frac{2400 \cdot 107{,}977}{5} = 51829 \text{ N}$$

c. $$\sigma_f = \sigma_c = 310 \text{ N/mm}^2$$

$$P_{cap} = \frac{A \cdot \sigma_f}{c} = \frac{2400 \cdot 310}{5} = 148800 \text{ N}$$

d. $$\sigma_f = \sigma_c = 310 \text{ N/mm}^2$$

$$P_{cap} = \frac{A \cdot \sigma_f}{c} = \frac{2400 \cdot 310}{5} = 148800 \text{ N}$$

2. Dimensionarea barelor drepte supuse la flambaj

2.1. Enunțul problemei

Să se dimensioneze bara de oțel (σ_r=520 N/mm^2) supusă la flambaj pentru cele 4 variante de rezemare prezentate în fig. 2.2. Se dă c = 4, l = 500 mm, P = 20000 N. Secțiunea transversală a barei este dată în fig. 2.1

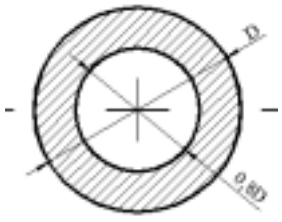
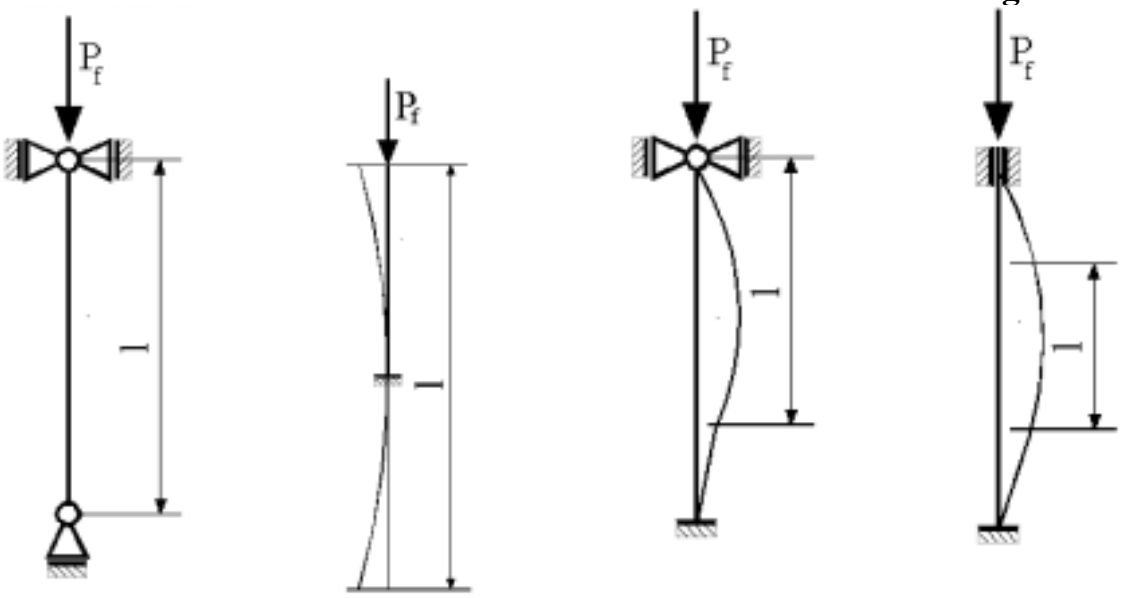


fig. 2.1



a. b. c. d.

Fig. 2.2

2.2. Relații de calcul

Pentru verificare se calculează coeficientul de siguranță efectiv: $c_{ef} = \frac{P_f}{P}$,

care, în cazul unei dimensionări raționale, trebuie să fie: $c_{ef} = c_a \cdot (1 \pm 0{,}1)$,

c_a fiind coeficientul de siguranță admis la flambaj.

Dimensionarea se face pornind de la relația: $I_{min} = \frac{c \cdot P \cdot l_f^2}{\pi^2 \cdot E}$,

pe baza căreia se stabilesc dimensiunile secțiunii transversale, urmând a se verifica valoarea coeficientului de siguranță. Dacă nu este îndeplinită condiția de verificare, se modifică dimensiunile secțiunii.

2.3. Rezolvare

$$I_{min} = \frac{\pi \cdot [D^4 - (0{,}8 \cdot D)^4]}{64} = \frac{c \cdot P \cdot l_f^2}{\pi^2 \cdot E}, \qquad D = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot c \cdot P \cdot l_f^2}{0{,}5904 \cdot \pi^3 \cdot E}}$$

a.	$D = 27$ mm $\quad i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 8{,}644$ mm $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = 57{,}842 \rightarrow \quad \lambda < \lambda_1$ $\sigma_f = \sigma_c = 360$ N/mm^2 $\quad P_f = A \cdot \sigma_f = 74213$ N $\quad c_{ef} = \frac{P_f}{P} = 3{,}711$
b.	$D = 34$ mm $\quad i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 10{,}885$ mm $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = 91{,}867 \rightarrow \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_o$ $\sigma_f = a - b \cdot \lambda = 233$ N/mm^2 $\quad P_f = A \cdot \sigma_f = 76303$ N $\quad c_{ef} = \frac{P_f}{P} = 3{,}815$
c.	$D = 27$ mm $\quad i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 8{,}644$ mm $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = 40{,}489 \rightarrow \quad \lambda < \lambda_1$ $\sigma_f = \sigma_c = 360$ N/mm^2 $\quad P_f = A \cdot \sigma_f = 74213$ N $\quad c_{ef} = \frac{P_f}{P} = 3{,}711$

d.	$D = 27$ mm $\qquad i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 8{,}644$ mm $\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = 28{,}921 \rightarrow \quad \lambda < \lambda_1$ $\sigma_f = \sigma_c = 360$ N/mm^2 $\qquad P_f = A \cdot \sigma_f = 74213$ N $\qquad c_{ef} = \frac{P_f}{P} = 3{,}711$

3. Calculul sarcinii maxime pentru barele drepte supuse la flambaj

Problema nr. 3.1. Bară articulată la ambele capete

Să se determine sarcina maximă pe care o poate suporta bara din fig. 3.2, cu secțiunea dreptunghiulară (fig. 3.1), pentru variantele dimensionale şi de material din tabelul de mai jos

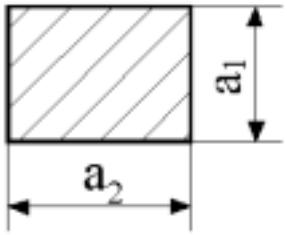


fig. 3.1

Date de intrare

Nr. crt.	**Material**	**Parametrii geometrici**			**c**
		a_1	**a_2**	**l**	
1.	Oțel σ_r=520N/mm^2	30	50	750	5
2.	Lemn	150	200	1500	7
3.	Duraluminiu	70	90	1500	5
4.	Oțel σ_r=480N/mm^2	50	70	800	5
5.	OL37	60	80	900	6
6.	Oțel crom-molibden	40	60	1500	4
7.	OL37	40	90	2000	5
8.	Oțel σ_r=480N/mm^2	60	70	950	5
9.	Oțel σ_r=520N/mm^2	80	100	1000	5
10.	OL37	70	110	1100	6



fig. 3.2

Rezultate

Nr. crt	I_{min}	i_{min}	λ	σ_f	P_{cap}
1.	112500	8,660	86,603	253,106	75932
2.	56250000	43,301	34,641	22,118	94792
3.	2572500	20,207	74,231	125,413	158020
4.	729167	14,434	55,426	310	217000
5.	1440000	17,321	51,962	240	192000
6.	320000	11,547	129,904	122,854	73712
7.	480000	11,547	173,205	69,105	49756
8.	1260000	17,321	54,848	310	260400
9.	4266667	23,094	43,301	360	576000
10.	3144167	20,207	54,436	240	308000

Problema nr. 3.2. Bară încastrată la ambele capete

Să se determine sarcina maximă pe care o poate suporta bara din fig. 3.4, cu secțiunea dreptunghiulară (fig. 3.3), pentru variantele dimensionale şi de material din tabelul de mai jos

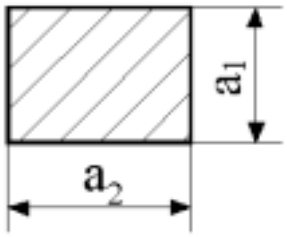


fig. 3.3

Date de intrare

Nr. crt.	Material	Parametrii geometrici			c
		a_1	a_2	l	
1.	Oțel σ_r=520N/mm^2	30	50	750	5
2.	Oțel σ_r=480N/mm^2	50	70	1800	6
3.	Oțel σ_r=520N/mm^2	80	100	1900	5
4.	OL37	40	60	2000	5
5.	Oțel σ_r=480N/mm^2	75	95	2200	5
6.	Oțel σ_r=520N/mm^2	45	65	2100	5

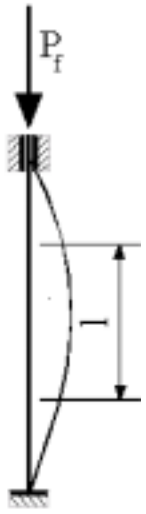


fig. 3.4

7.	OL37	90	110	1800	5
8.	Oțel σ_r=480N/mm^2	30	50	1600	7
9.	Oțel σ_r=520N/mm^2	75	95	1680	5
10.	OL37	65	85	1800	5

Rezultate

Nr. crt	I_{min}	i_{min}	λ	σ_f	P_{cap}
1.	112500	8,660	43,301	360	108000
2.	729167	14,434	62,354	299.751	174855
3.	4266667	23,094	41,136	360	576000
4.	320000	11,547	86,603	207,005	99363
5.	3339844	21,651	50,807	310	441750
6.	493594	12,990	80,829	274,699	160699
7.	6682500	25,981	34,641	240	475200
8.	112500	8,660	92,376	222,594	47699
9.	3339844	21,651	38,798	360	513000
10.	1945260	18,764	47,964	240	265200

Problema nr. 3.3. Bară încastrată la un capăt şi liberă la celălalt

Să se determine sarcina maximă pe care o poate suporta bara din fig. 3.6, cu secțiunea dreptunghiulară (fig.3.5), pentru variantele dimensionale şi de material din tabelul de mai jos

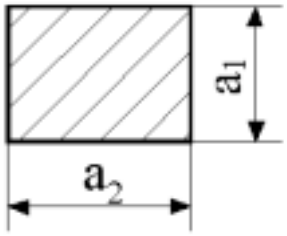


fig. 3.5

Date de intrare

Nr.crt.	**Material**	**Parametrii geometrici**			**c**
		a_1	**a_2**	**l**	
1.	Oțel σ_r=520N/mm^2	30	50	750	5
2.	OL37	50	70	750	5

3.	Oțel σ_r=480N/mm^2	30	40	300	5
4.	Oțel σ_r=520N/mm^2	40	40	500	5
5.	OL37	60	70	1000	5
6.	Oțel σ_r=480N/mm^2	30	50	600	5
7.	Oțel σ_r=520N/mm^2	70	75	550	5
8.	OL37	65	75	1500	5
9.	Oțel σ_r=480N/mm^2	70	70	1200	5
10.	Oțel σ_r=520N/mm^2	60	60	400	5



fig. 3.6

Rezultate

Nr. crt	I_{min}	i_{min}	λ	σ_f	P_{cap}
1.	112500	8,660	173,205	69,105	20732
2.	729167	14,434	103,923	187,606	131324
3.	90000	8,660	69,282	281,945	67667
4.	213333	11,547	86,603	253,107	80994
5.	1260000	17,321	115,470	155,487	130609
6.	112500	8,660	138,564	107,977	32393
7.	2143750	20,207	54,436	360	378000
8.	1716406	18,764	159,882	81,103	79075
9.	2000833	20,207	118,769	146,968	144029
10.	1080000	17,321	46,188	360	259200

Problema nr. 3.4. Bară articulată la un capăt şi încastrată la celălalt

Să se determine sarcina maximă pe care o poate suporta bara din fig. 3.8, cu secțiunea dreptunghiulară (fig.3.7), pentru variantele dimensionale şi de material din tabelul de mai jos

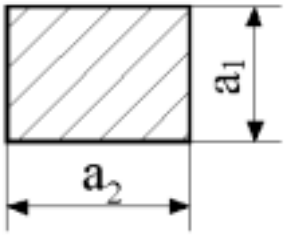


fig. 3.7

Date de intrare

Nr.crt.	Material	Parametrii geometrici			c
		a_1	a_2	l	
1.	Oțel σ_r=520N/mm^2	30	50	750	5
2.	OL37	45	55	700	5
3.	Oțel σ_r=520N/mm^2	55	65	800	5
4.	Oțel σ_r=480N/mm^2	65	75	1200	5
5.	OL37	85	100	1800	5
6.	Oțel σ_r=520N/mm^2	65	85	2000	5
7.	Oțel σ_r=480N/mm^2	60	80	1600	5
8.	OL37	70	90	900	5
9.	Oțel σ_r=520N/mm^2	30	50	2200	5
10.	Oțel σ_r=480N/mm^2	50	70	1000	5



fig. 3.8

Rezultate

Nr. crt	I_{min}	i_{min}	λ	σ_f	P_{cap}
1.	112500	8,660	60,622	350,275	105082
2.	417656	12,990	37,720	240	118800
3.	901198	15,877	35,271	360	257400
4.	1716406	18,764	44,767	310	302250
5.	5117708	24,537	51,350	240	408000
6.	1945260	18,764	74,611	297,953	329238
7.	1440000	17,321	64,663	293,815	282063
8.	2572500	20,207	31,177	240	302400
9.	112500	8,660	177,824	65,562	19669
10.	729167	14,434	48,497	310	217000

Problema nr. 3.5. Bară articulată la ambele capete

Să se dimensioneze bara din fig. 3.10 ştiind ca secțiunea este inelară (fig.3.9) pentru diferite materiale, solicitări şi lungimi ce sunt date în tabelul de mai jos.

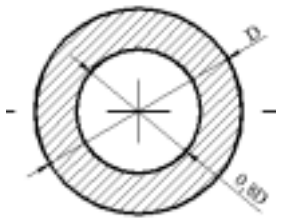


fig. 3.9

Date de intrare

Nr.crt.	**Material**	**P**	**l**	**c**
1.	OL37	22000	1600	4
2.	Oțel σ_r=480N/mm^2	26000	1200	5
3.	Oțel σ_r=520N/mm^2	20000	1900	3
4.	Oțel crom-molibden	18000	1800	3
5.	Oțel 5% Nichel	38000	1600	3
6.	Duraluminiu	18000	2000	5
7.	Fontă	12000	1000	0,052
8.	OL37	15000	1000	5
9.	Oțel σ_r=480N/mm^2	16000	800	4
10.	Oțel σ_r=520N/mm^2	18000	1200	4



fig. 3.10

Rezultate

Nr. crt	i_{min}	λ	σ_f	P_f	c_{ef}	D
1.	14.407	111.057	168.089	96253	4.375	45
2.	13.767	87.167	236	123385	4.746	43
3.	14.087	134.877	113.960	62389	3.119	44
4.	13.447	133.863	115.694	57711	3.206	42
5.	15.047	106.331	183.363	114540	3.014	47
6.	21.130	94.651	77.137	95016	5.279	66
7.	3.842	260.290	20.400	831	0.069	12
8.	11.205	89.242	204	70684	4.712	35
9.	9.605	83.293	246	62592	3.912	30
10.	11.846	101.302	202.021	78208	4.345	37

Problema nr. 3.6. Bară încastrată la ambele capete

Să se dimensioneze bara din fig. 3.12 ştiind ca secțiunea este inelară (fig. 3.11), pentru diferite materiale, solicitări şi lungimi ce sunt date în tabelul de mai jos.

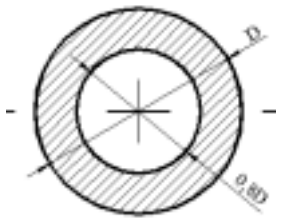


fig. 3.11

Date de intrare

Nr. crt.	**Material**	**P**	**l**	**c**
1.	OL37	25000	1900	3
2.	Oțel σ_r=480N/mm^2	30000	1600	3
3.	Oțel σ_r=520N/mm^2	28000	3600	3
4.	Oțel crom-molibden	20000	2200	3
5.	Oțel 5% Nichel	40000	2000	3
6.	Duraluminiu	20000	2200	3
7.	Fontă	10000	1000	0.052
8.	OL37	16000	1600	3
9.	Oțel σ_r=480N/mm^2	18000	2000	4
10.	Oțel σ_r=520N/mm^2	20000	2200	3

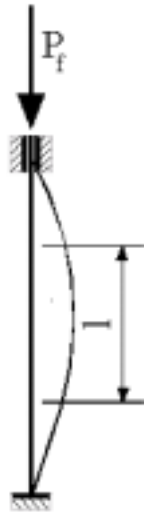


fig. 3.12

Rezultate

Nr. crt	i_{min}	λ	σ_f	P_f	c_{ef}	**D**
1.	11.205	84.780	209	72415	2.897	35
2.	10.565	75.721	265	81729	2.724	33
3.	15.047	119.622	144.879	90500	3.232	47
4.	10.885	101.054	203.015	66364	3.318	34
5.	12.166	82.197	276	112724	2.818	38
6.	14.087	78.087	113.332	62045	3.102	44
7.	2.561	195.217	36.266	656	0.066	8
8.	8.964	89.242	204	45238	2.827	28
9.	10.885	91.867	224	73192	4.066	34
10.	10.885	101.054	203.015	66364	3.318	34

Problema nr. 3.7. Bară încastrată la un capăt şi liberă la celălalt

Să se dimensioneze bara din fig. 3.14 ştiind ca secțiunea este inelară (fig. 3.13), pentru diferite materiale, solicitări şi lungimi ce sunt date în tabelul de mai jos.

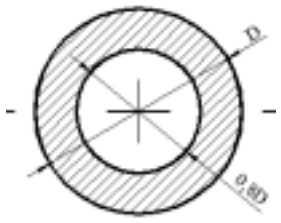


fig. 3.13

Date de intrare

Nr.crt.	**Material**	**P**	**l**	**c**
1.	OL37	22000	600	4
2.	Oțel σ_r=480N/mm^2	26000	700	5
3.	Oțel σ_r=520N/mm^2	20000	1900	4
4.	Oțel crom-molibden	18000	1800	4
5.	Oțel 5% Nichel	38000	1600	4
6.	Duraluminiu	18000	2000	5
7.	Fontă	12000	1000	0.052
8.	OL37	15000	650	5
9.	Oțel σ_r=480N/mm^2	22000	900	4
10.	Oțel σ_r=520N/mm^2	25000	800	4



fig. 3.14

Rezultate

Nr. crt	i_{min}	λ	σ_f	P_f	c_{ef}	**D**
1.	12.486	96.107	196	84456	3.839	39
2.	14.727	95.062	216	129061	4.964	46
3.	21.450	177.152	66.060	83856	4.193	67
4.	20.170	178.484	65.078	73040	4.058	63
5.	23.051	138.821	107.577	157701	4.150	72
6.	29.775	134.343	38.290	93647	5.203	93
7.	5.122	390.434	9.067	656	0.055	16
8.	12.486	104.116	187	80598	5.373	39
9.	15.047	119.622	144.879	90500	4.114	47
10.	14.727	108.643	175.643	105098	4.204	46

Problema nr. 3.8. Bară articulată la un capăt şi încastrată la celălalt

Să se dimensioneze bara din fig. 3.16 ştiind ca secțiunea este inelară (fig. 3.15), pentru diferite materiale, solicitări şi lungimi ce sunt date în tabelul de mai jos.

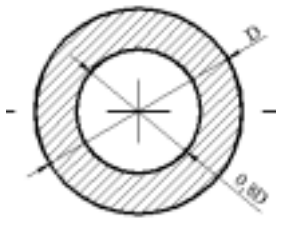


fig. 3.15

Date de intrare

Nr.crt.	**Material**	**P**	**l**	**c**
1.	OL37	25000	1800	4
2.	Oțel σ_r=480N/mm^2	30000	2000	4
3.	Oțel σ_r=520N/mm^2	28000	2100	3
4.	Oțel crom-molibden	20000	2000	3
5.	Oțel 5% Nichel	40000	2600	3
6.	Duraluminiu	20000	2200	5
7.	Fontă	10000	1000	0.052
8.	OL37	16000	1600	4
9.	Oțel σ_r=480N/mm^2	18000	2000	4
10.	Oțel σ_r=520N/mm^2	20000	2200	4



fig. 3.16

Rezultate

Nr. crt	i_{min}	λ	σ_f	P_f	c_{ef}	**D**
1.	13.126	95.990	196	93403	3.736	41
2.	14.407	97.175	210	120402	4.013	45
3.	13.447	109.322	173.468	86530	3.090	42
4.	12.166	115.075	156.555	63927	3.196	38
5.	16.328	111.465	166.860	122728	3.068	51
6.	18.889	81.528	103.967	102341	5.117	59
7.	2.881	242.937	23.418	536	0.054	9
8.	10.885	102.891	189	61705	3.857	34
9.	12.806	109.322	173.468	78485	4.360	40
10.	13.767	111.864	165.673	86624	4.331	43

MODELUL 5

BARA CURBĂ PLANĂ CU AXA GEOMETRICĂ UN ARC DE CERC

Enunț

Se consideră bara curbă având axa geometrică sub forma unui semicerc ca în fig.5.1 asupra capătului căreia acționează sub unghiul α o forță concentrată $\sqrt{2}\,P$ şi un cuplu $M=2PR$ ca în fig. 5.1 . Se cunosc: $P=10\ kN$; $R=1\ m$; $E=2{,}1\cdot10^{6}\ MPa$; $\sigma_a=150MPa$; $\alpha=45^0$.

Relația pentru poziția axei neutre este: $r=\dfrac{d^2}{4(2R-\sqrt{4R^2-d^2})}$. Se cere:

a. să se determine reacțiunile din încastrare (H_B, V_B, M_B)
b. să se traseze diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M şi să se determine valorile lor maxime;
c. să se verifice dacă tensiunea maximă σ (la încovoiere şi întindere-compresiune) este mai mică decât σ_a dacă secțiunea barei este circulară de diametru $d=150\ mm$;
d. să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a capătului liber al barei.

Rezolvare

Pentru a determina reacțiunile din încastrare se scriu ecuațiile de echilibru din Mecanică pentru forțele şi cuplurile ce acționează pe bara curbă (fig.5.2):

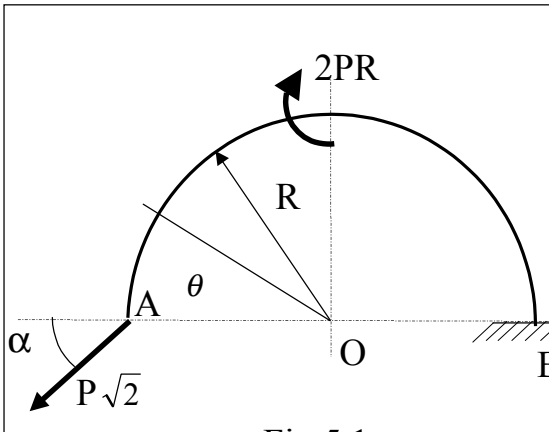


Fig.5.1

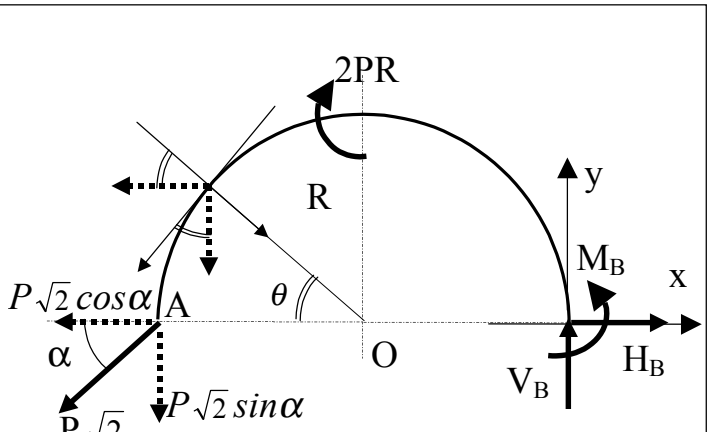


Fig. 5.2

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow -P\sqrt{2}\cos\alpha + H_B = 0; \qquad H_B = P$$
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow -P\sqrt{2}\sin\alpha + V_B = 0; \qquad V_B = P \qquad \text{(a)}$$
$$\sum M_{Bz} = 0 \quad \Rightarrow P\sqrt{2}\sin\alpha \cdot 2R - 2PR + M_B = 0 \qquad M_B = 0$$

2. ***Diagramele de eforturi*** : mai întâi se exprimă eforturile *N, T şi M* în funcție de forțele aplicate şi unghiul θ (ca parametru) şi se trasează prin patru puncte, respectiv ($\theta = 0,\ \pi/4,\ \pi/2,\ 3\pi/4,\ \pi$) :

- Efortul N într-o secțiune curentă situată față de A la unghiul θ, se determină ca suma proiecțiilor tuturor forțelor situate la stânga secțiunii curente după direcția tangentei la cerc (fig.5.2) :

$$N(\theta) = P\sqrt{2}\cos\alpha \cdot \sin\theta + P\sqrt{2}\sin\alpha \cdot \cos\theta = P(\sin\theta + \cos\theta) \qquad \text{(b)}$$

- Efortul T într-o secțiune curentă situată la unghiul θ față de A se determină ca suma proiecțiilor tuturor forțelor situate la stânga secțiunii curente pe direcția normalei la cerc (sau a razei, fig. 5.2) :

$$T(\theta) = P\sqrt{2}\cos\alpha \cdot \cos\theta - P\sqrt{2}\sin\alpha \cdot \sin\theta = P(\cos\theta - \sin\theta) \qquad \text{(c)}$$

- Efortul M într-o secțiune oarecare situată la unghiul θ față de A se determină ca suma momentelor tuturor forțelor față de A şi a cuplurilor situate la stânga secțiunii pentru cele două intervale de variație (fig.5.2):

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$$
$$M(\theta) = P\sqrt{2}\cos\alpha \cdot R\sin\theta - P\sqrt{2}\sin\alpha \cdot R(1-\cos\theta) = PR(\cos\theta + \sin\theta - 1) \qquad \text{(d)}$$
$$\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$$
$$M(\theta) = P\sqrt{2}\cos\alpha \cdot R\sin\theta - P\sqrt{2}\sin\alpha \cdot R(1-\cos\theta) + 2PR = PR(\cos\theta + \sin\theta + 1)$$

Valorile numerice pentru aceste eforturi sunt date în tabelul următor:

Efortul	$\theta=0$	$\theta=\pi/4$	$\theta=\pi/2$		$\theta=3\pi/4$	$\theta=\pi$
N	P	$P\sqrt{2}$	P		0	$-P$
T	P	0	$-P$		$-P\sqrt{2}$	$-P$
M	0	$PR(\sqrt{2}-1)$	$M_{st}=0;$	$M_{dr}=2PR$	PR	0

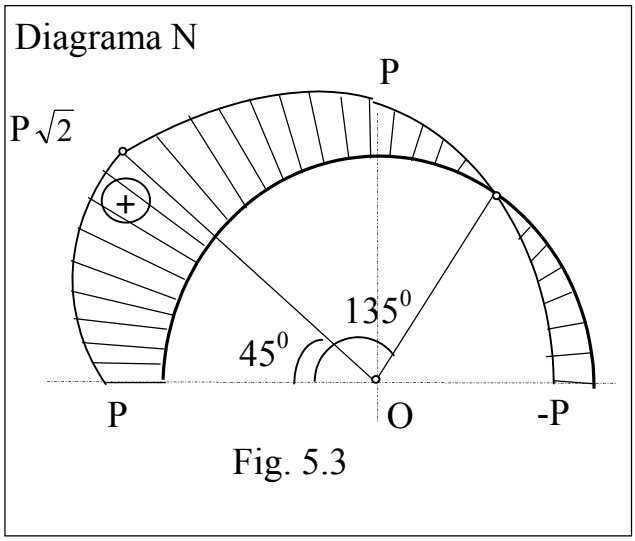


Fig. 5.3

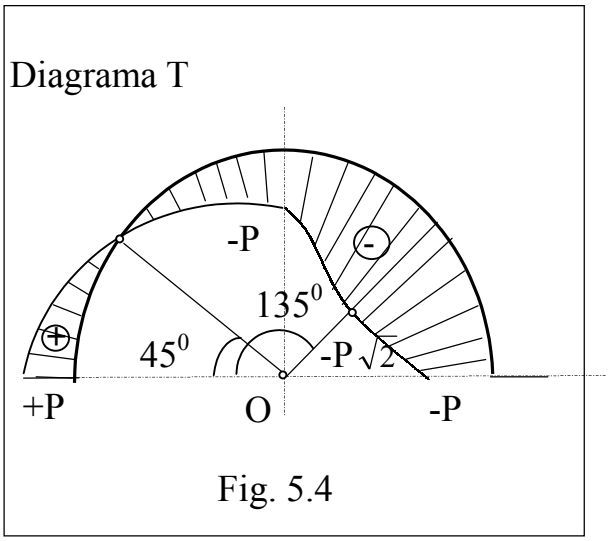


Fig. 5.4

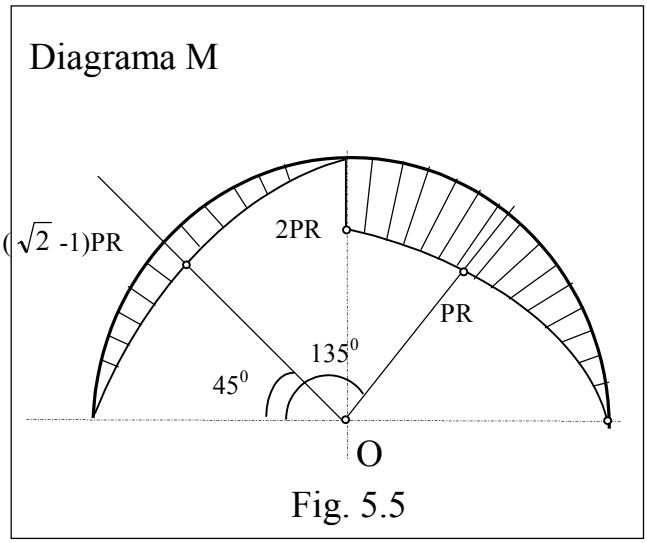


Fig. 5.5

Diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M sunt reprezentate în fig.5. 3,4,5.

OBSERVAȚII:

Din analiza acestor diagrame rezultă următoarele:

- diagrama N admite un maxim pentru $\theta = 45^0$, ce corespunde punctului în care se anulează efortul tăietor T, conform relației difrențiale între cele două eforturi: $\frac{dN}{d\theta} = T$ (fig.5.3). Valoarea maximă a efortului axial este $N=P\sqrt{2}$;
- diagrama T admite un maxim pentru $\theta = 135^0$, ce corespunde punctului în care se anulează efortul axial N conform relației difrențiale între cele două eforturi: $\frac{dT}{d\theta} = -N - qr$ ($q=0$, fig.5.4). Efortul tăietor maxim: $T=P\sqrt{2}$;
- diagrama M admite un maxim pentru $\theta = 45^0$, ce corespunde punctului în care se anulează efortul tăietor T (conform relației difrențiale între cele două eforturi: $\frac{dM}{d\theta} = T \cdot r$ (fig.5.5). Efortul tăietor încovoietor maxim este :

$M = PR(\sqrt{2}-1)$ Valoarea maximă a momentului este pentru $\theta = 90^0$ (secțiunea din dreapta) $M_{max}=2PR$, valoare ce intră în calculul de verificare.

3. Verificarea tensiunii maxime:

Relația de verificare la solicitarea compusă de încovoiere şi întindere conform fig.5.6 se face în două ipoteze:

- dacă ambele eforturi maxime sunt pozitive (sau negative):

$N_{\max} > |N_{\min}|$, $M_{\max} > |M_{\min}|$, atunci conform fig.5.6b:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} + \frac{M_{i\,max}}{A \cdot e}\frac{d/2 - e}{R_1} \le \sigma_a \qquad (e)$$

- dacă efortul maxim M_i este negativ iar efortul maxim N este pozitiv (sau invers):

$N_{\max} > |N_{\min}|$, $M_{\max} < |M_{\min}|$, atunci conform fig.5.6c:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} + \frac{|M_{i\,min}|}{A \cdot e}\frac{d/2 + e}{R_2} \le \sigma_a, \qquad (f)$$

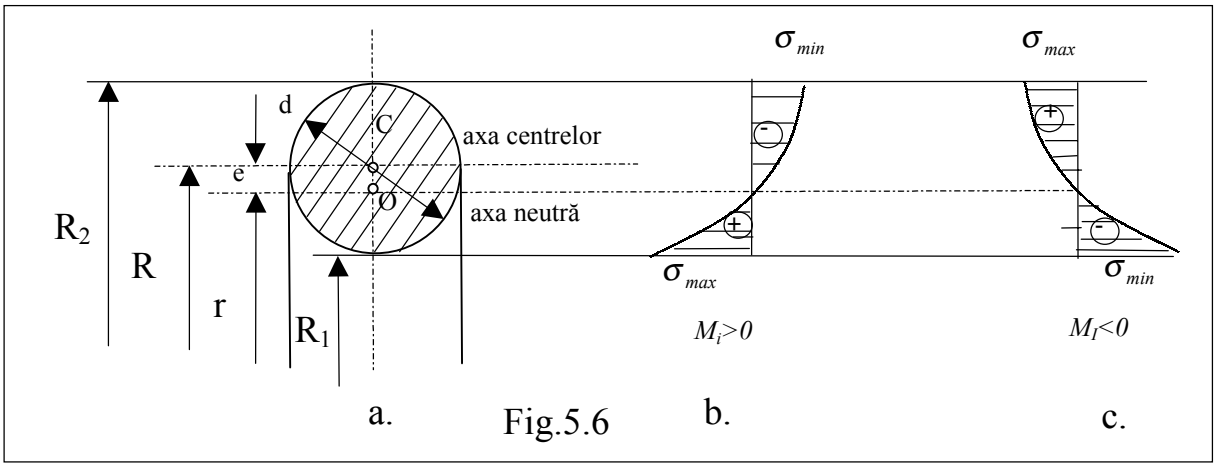


Fig.5.6

În cazul problemei de față, ambele eforturi maxime sunt pozitive, deci se foloseşte pentru verificare reația (e) obținându-se:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} + \frac{M_{i\,max}}{A \cdot e}\frac{d/2 - e}{R_1} = \frac{P}{\pi d^2} + \frac{2PR}{\pi d^2 (R - r)} \cdot \frac{d - 2e}{2R - d} \qquad (g)$$

unde r este distanța pană la axa neutră dată de relația:

$$r = \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})} = \frac{150^2}{4(2 \cdot 1000 - \sqrt{4 \cdot 10^6 - 150^2}} = 998{,}6\ mm;$$

iar e distanța dintre cele două axe: $e = R - r = 1{,}4\ mm$

Înlocuid valorile parametrilor (în *N, mm, MPa*) rezultă:

$$\sigma_{max} = \frac{10^4}{\pi \cdot 150^2} + \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{\pi \cdot 150^2 \cdot 1{,}4} \cdot \frac{150 - 2{,}8}{2000 - 150} = 16{,}222\ MPa \qquad \text{(h)}$$

Deci se verifică $\sigma_{max} < \sigma_a = 150\ MPa$ (i)

Observație:

Din relația (h) rezultă o ponderea foarte scăzută a tensiunii corespunzătoare efortului de întindere (0,87%) față de cel de încovoiere (98,13%).

4. Calculul deplasărilor şi rotirii secțiunii A

Deplasările şi rotirea secțiunii A : δ_V, δ_H , φ_A se calculează prin metoda Mohr-Maxwell şi integrarea analitică directă a funcțiilor obținute:

$$\delta_V = \int \frac{m_V M^o}{EI} ds; \qquad \delta_H = \int \frac{m_H M^o}{EI} ds; \quad \varphi_A = \int \frac{m_A M^o}{EI} ds \qquad \text{(j)}$$

unde m_V m_H şi m_A sunt momentele produse în bara curbă sub acțiunea unor forțe unitare aplicate în A pe verticală, pe orizontală respectiv un moment unitar ca în fig.5.7,8,9.

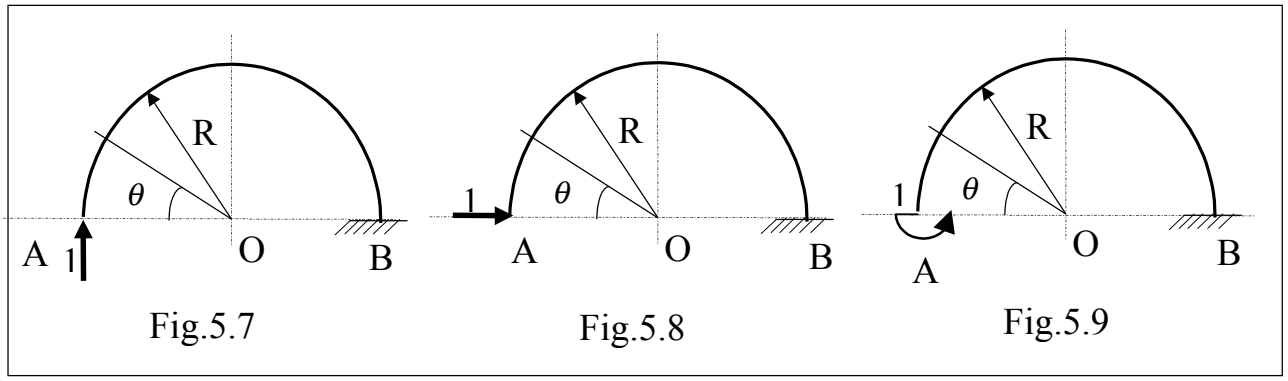


Fig.5.7 Fig.5.8 Fig.5.9

Din fig. 5.7, 8, 9 rezultă cele trei funcții m_V m_H şi m_A:

$$m_V(\theta) = R\,(1 - \cos\theta); \qquad m_H(\theta) = -R\,\sin\theta; \qquad m_A(\theta) = -1 \qquad \text{(k)}$$

Înlocuim în relațiile (j) expresiile (k) pentru m_V, m_H şi m_A şi expresia (d) pentru momentul încovoietor *M* şi rezultă succesiv:

$$\delta_H = \frac{1}{EI}\int M(\theta) \cdot m_H(\theta)\, ds = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} PR(\sin\theta + \cos\theta - 1)(-R\sin\theta)\, Rd\theta + \\ + \frac{1}{EI}\int_{\pi/2}^{\pi} PR(\sin\theta + \cos\theta + 1)(-R\sin\theta)\, Rd\theta = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{PR^3}{EI} = -1{,}5708\frac{PR^3}{EI} \qquad \text{(l)}$$

respectiv:

$$\delta_V = \frac{1}{EI}\int M(\theta)\cdot m_V(\theta)\,ds = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} PR(sin\theta + cos\theta - 1)R(1-cos\theta)\,Rd\theta + \\ + \frac{1}{EI}\int_{\pi/2}^{\pi} PR(sin\theta + cos\theta + 1)R(1-cos\theta)\,Rd\theta = \left(4-\frac{\pi}{2}\right)\frac{PR^3}{EI} = 2{,}4292\frac{PR^3}{EI} \quad \text{(m)}$$

Deplasarea totală a punctului A este:

$$\delta = \sqrt{\delta_H^2 + \delta_V^2} = 2{,}8928\frac{PR^3}{EI} \quad \text{(n)}$$

Rotirea secțiunii A se calculează astfel:

$$\varphi_A = \frac{1}{EI}\int M(\theta)\cdot m_A(\theta)\,ds = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} PR(sin\theta + cos\theta - 1)(-1)\,Rd\theta + \\ + \frac{1}{EI}\int_{\pi/2}^{\pi} PR(sin\theta + cos\theta + 1)(-1)\,Rd\theta = -2\frac{PR^2}{EI} \quad \text{(o)}$$

Înlocuind valorile numerice obținem:

$$\delta_H = -1{,}5708\frac{PR^3}{EI} = -1{,}5708\cdot\frac{10^4\cdot 10^9\cdot 64}{2{,}1\cdot 10^6\cdot\pi\cdot 150^4} = -0{,}301\ mm \quad \text{(p)}$$

$$\delta_V = 2{,}4292\frac{PR^3}{EI} = 2{,}4292\frac{10^4\cdot 10^9\cdot 64}{2{,}1\cdot 10^6\cdot\pi\cdot 150^4} = 0{,}465\ mm \quad \text{(q)}$$

$$\varphi_A = -2\frac{PR^2}{EI} = -2\frac{10^4\cdot 10^6\cdot 64}{2{,}1\cdot 10^6\cdot\pi\cdot 150^4} = 0{,}00038\,rad = 0{,}022^0 \quad \text{(r)}$$

ALGORITM DE CALCUL PENTRU REZOLVAREA MODELULUI 5 UTILIZÂND PROGRAMUL EXCEL

Se consideră cazul general al barei curbe asupra căreia acționează forțele P_1, P_2, P_3, P_4 şi momentele M_1 , M_2 ca în figura 5.a.10. Se cunosc valorile parametrilor din tabel şi valorile numerice: *P =10 kN; R = 1 m; E = 2,1 ·10 ^{6} MPa;* σ_a*=150MPa*

Varianta	**P_1/P**	**P_2/P**	**P_3/P**	**P_4/P**	**M_1/PR**	**M_2/PR**
Nr.	-1	-1	0	0	0	-2

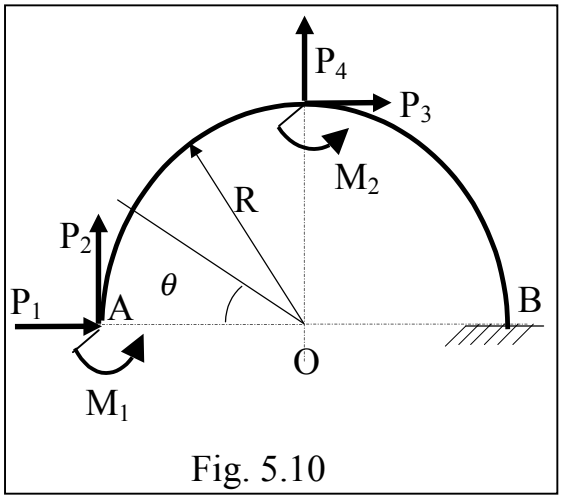


Fig. 5.10

Se cere:

a. să se calculeze reacțiunile din încastrare

b. să se traseze diagramele N, T şi M şi să se determine momentul maxim

c. Să se verifice tensiunea σ_{max} dacă secțiunea barei este circulară cu diametrul *d=150 mm*

e. deplasarea pe orizontală şi verticală şi rotirea capătului liber al barei curbe

Rezolvare

Pentru rezolvarea Modelului 5 se scriu expresiile analitice generale ale eforturilor N T şi M pentru cele două tronsoane de bară:

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$$

$$N(\theta) = -P_1 sin\theta - P_2 cos\theta$$

$$T(\theta) = -P_1 cos\theta + P_2 sin\theta$$

$$M(\theta) = -M_1 - P_1 R sin\theta + P_2 R(1 - cos\theta)$$

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$N(\theta) = -(P_1 + P_3) sin\theta - (P_2 + P_4) cos\theta$$

$$T(\theta) = -(P_1 + P_3) cos\theta + (P_2 + P_4) sin\theta$$

$$M(\theta) = -M_1 - M_2 - (P_1 + P_3) R sin\theta + (P_2 + P_3) R - (P_2 + P_4) R cos\theta$$

Deplasările δ_V, δ_H, φ_A se calculează prin metoda Mohr-Maxwell :

$$\delta_V = \int \frac{m_V M^o}{EI} ds; \qquad \delta_H = \int \frac{m_H M^o}{EI} ds; \quad \varphi_A = \int \frac{m_A M^o}{EI} ds$$

unde m_V, m_H şi m_A sunt momentele produse în bara curbă sub acțiunea unor forțe unitare aplicate în A pe verticală, pe orizontală respectiv un moment unitar ca în fig.5.7,8,9:

$m_V(\theta) = R\,(1-\cos\theta);$

$m_H(\theta) = -R\,\sin\theta;$

$m_A(\theta) = -1$

Efectuând integralele pe cele două porțiuni se obțin rezultatele parametrice:

$$\frac{EI}{R^2}\delta_V = -\pi\cdot\frac{M_1}{R} - \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{M_2}{R} - 2\cdot P_1 + \frac{3\pi}{2}\cdot P_2 + \frac{\pi-1}{2}\cdot P_3 + \left(1+\frac{\pi}{4}\right)\cdot P_4$$

$$\frac{EI}{R^2}\delta_V = 2\cdot\frac{M_1}{R} + 1\cdot\frac{M_2}{R} + \frac{\pi}{2}\cdot P_1 - 2P_2 + \frac{\pi-4}{4}\cdot P_3 - \frac{1}{2}\cdot P_4$$

$$\frac{EI}{R}\varphi_A = \pi\cdot\frac{M_1}{R} + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{M_2}{R} + 2\cdot P_1 - \pi\cdot P_2 + \frac{2-\pi}{2}P_3 - 1\cdot P_4$$

Pentru trasarea diagramelor prin puncte şi calculul deplasărilor şi rortirii capătului liber al barei s-au utilizat formulele de calcul prezentate mai sus şi următorul algoritm de calcul pentru programul Excel:

DATE DE INTRARE

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
Nr.	**P1/P**	**P2/P**	**P3/P**	**P4/P**	**M1/ PR**	**M2/ PR**	**N (0)**	**N (45)**	**N (45)**	**N stg (90)**	**Ndr (90)**	**N (135)**	**N (180)**	**T (0)**	**T (45)**	**T (45)**
Crt	-1	-1	0	0	0	-2	1	1.414	1	1	1	1	-1	1	0	-1

DATE DE IEŞIRE

R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
T stg (90)	**Tdr (90)**	**T (135)**	**T (180)**	**M (0)**	**M (45)**	**M stg (90)**	**Mdr (90)**	**M (135)**	**M (180)**	**Mmax**	**Nmax**	**sigma**
-1	-1	-1,414	-1	0	0,414	0	2	1	0	2	1	64,889

AE	AF	AG	AH	AI	AJ	
delta hA	**delta vA**	**delta fiA**	**Delta h**	**hA**	**vA**	**fiA**
-1,5708	2,4292	-2	2,8928	-0,301	0,465	-0,022

PROBLEME REZOLVATE

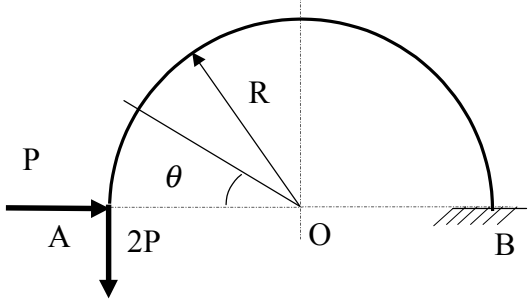


Fig.5.11.a

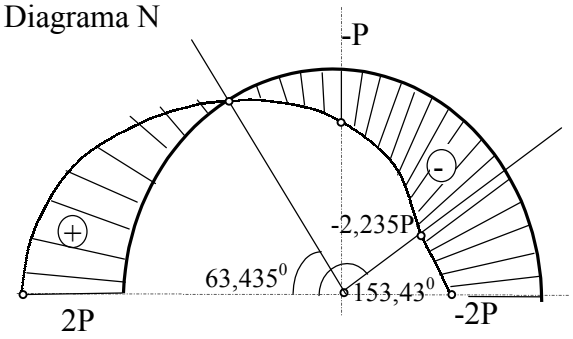


Fig.5.11.b

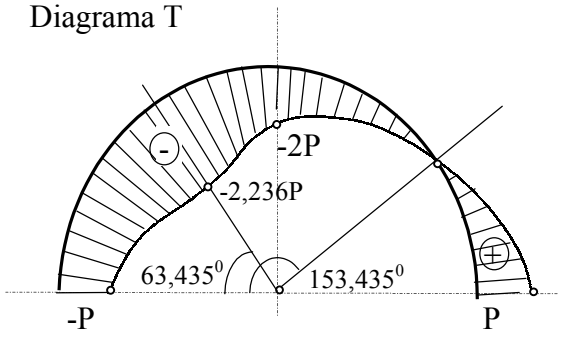


Fig.5.11.c

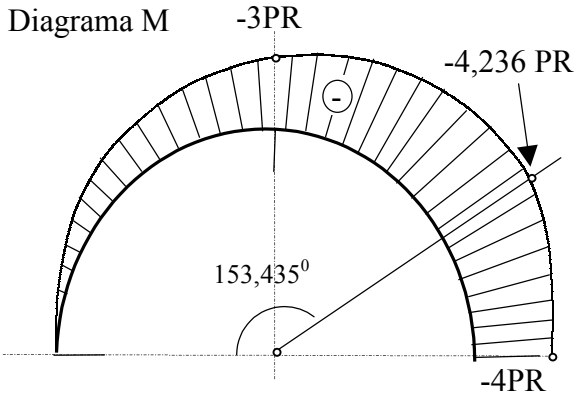


Fig.5.11.c

Problema 5.11

Se consideră bara curbă încărată ca în figură . Se cunosc: P =10 kN; R = 1 m; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; σ_a=150MPa; poziția axei neutre $r=\dfrac{d^2}{4(2R-\sqrt{4R^2-d^2})}$ Se cere:

1. Să se traseze diagramele N, T şi M şi să se determine momentul maxim
2. Să se verifice tensiunea σ_{max} dacă secțiunea barei este circulară cu d=150 mm
3. Să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a capătului liber al barei

REZULTATE

1. Diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M au forma din fig.5.11. b,c,d

$$N = P(-\sin\theta + 2\cos\theta);$$

$$T = -P(\cos\theta + 2\sin\theta);$$

$$M(\theta) = -PR\ (2 + \sin\theta - 2\cos\theta).$$

Din aceste diagrame rezultă următoarele:

Diagramele *N* şi *M* admit câte un maxim pentru $\theta = 153{,}43^0$ Valoarea maximă a efortului axial: $N_{max}=2{,}235P$ şi valoarea maximă a momentului încovoietor este $M_{max}= 4{,}236\ PR.$

2. Deoarece N_{max} şi M_{max} au acelaşi semn relația de verificare a tensiuni maxime este:

$$\sigma_{max} = \frac{2{,}236P}{\pi d^2} + \frac{4{,}236PR}{\pi d^2(R-r)} \cdot \frac{d-2e}{2R-d}$$

Deplasările δ_V , δ_H (forțele unitare au sensul axelor Ox şi Oy):

$$m_V(\theta) = R\ (1-\cos\theta);$$

$$m_H(\theta) = -R\ \sin\theta$$

$$\delta_V = \int \frac{m_V M^o}{EI} ds = -(3\pi + 2)\frac{PR^3}{EI}$$

$$\delta_H = \int \frac{m_H M^o}{EI} ds = \frac{8+\pi}{2}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\varphi_A = \int \frac{m_A M^o}{EI} ds = (2 + 2\pi)\frac{PR^2}{EI}$$

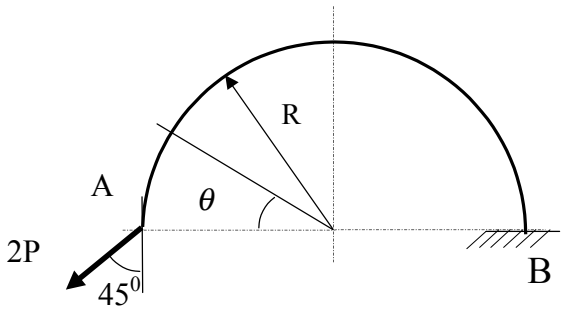


Fig.5.12.a

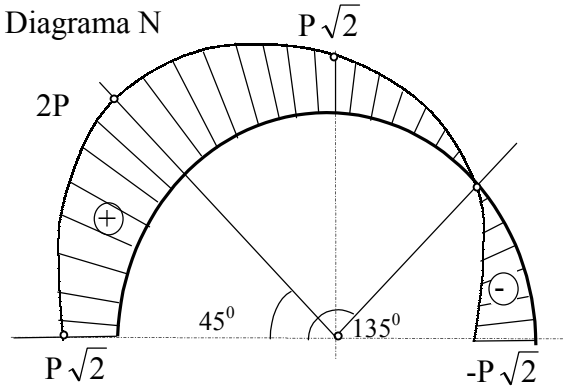


Fig.5.12.b

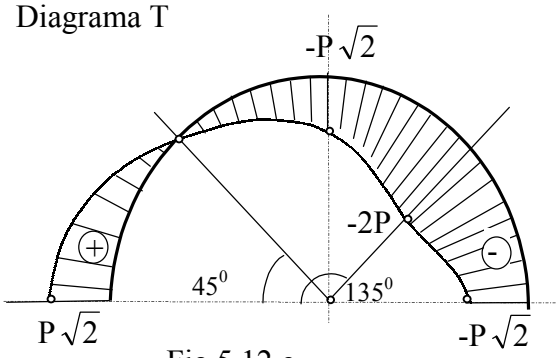


Fig.5.12.c

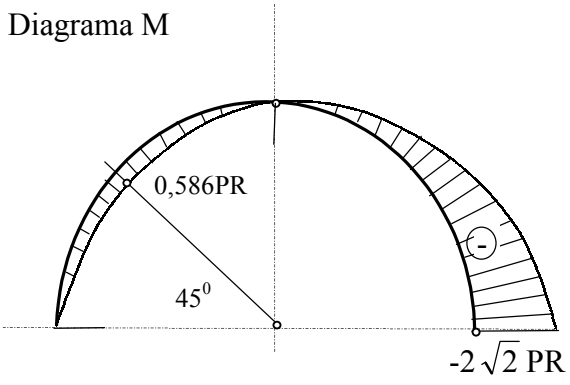


Fig.5.12.d

Problema 5.12

Se consideră bara curbă încărată ca în figură . Se cunosc: P =10 kN; R = 1 m; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; σ_a=150MPa; poziția axei neutre $r=\dfrac{d^2}{4(2R-\sqrt{4R^2-d^2})}$ Se cere:

1. Să se traseze diagramele N, T şi M şi să se determine momentul maxim
2. Să se verifice tensiunea σ_{max} dacă secțiunea barei este circulară cu d=150 mm
3. Să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a capătului liber al barei

REZULTATE

1. Diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M au forma din fig.5.12. b,c,d

$$N = P\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta);$$

$$T = P\sqrt{2}(\cos\theta-\sin\theta);$$

$$M(\theta) = PR\sqrt{2}\ (\sin\theta+\cos\theta-1).$$

Din aceste diagrame rezultă următoarele:

Diagrama N admite un maxim pentru $\theta=45^0$ Valoarea maximă a efortului axial: $N_{max}=2P$ şi diagrama M admite un maxim pentru $\theta=180^0$:

$$M_{max}= 2\sqrt{2}\ PR.$$

2. Deoarece M_{max} şi N_{max} au acelaşi semn pentru $\theta=180^0$ relația de verificare a tensiunii maxime este:

$$\sigma_{max}=\frac{P\sqrt{2}}{\pi d^2}+\frac{2\sqrt{2}PR}{\pi d^2(R-r)}\cdot\frac{d-2e}{2R-d}$$

Deplasările δ_V, δ_H (forțele unitare au sensul axelor Ox şi Oy):

$$m_V(\theta) = R\ (1-\cos\theta);$$

$$m_H(\theta) = -R\ \sin\theta$$

$$\delta_V = \int\frac{m_V M^o}{EI}ds = \frac{4-3\pi}{2}\frac{\sqrt{2}PR^3}{EI}$$

$$\delta_H = \int\frac{m_H M^o}{EI}ds = \frac{4-\pi}{2}\frac{\sqrt{2}PR^3}{EI}$$

$$\varphi_A = \int\frac{m_A M^o}{EI}ds = (\pi-2)\frac{\sqrt{2}PR^2}{EI}$$

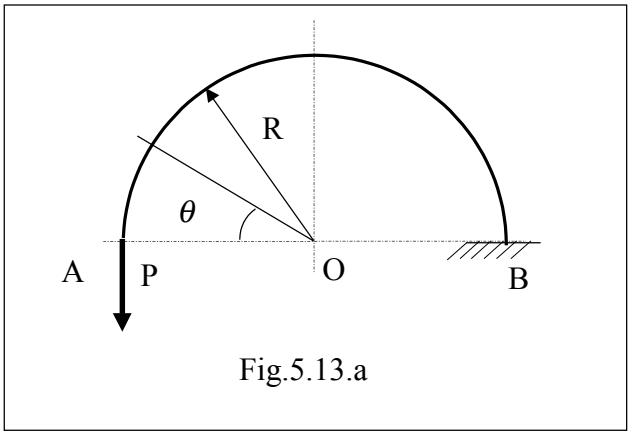


Fig.5.13.a

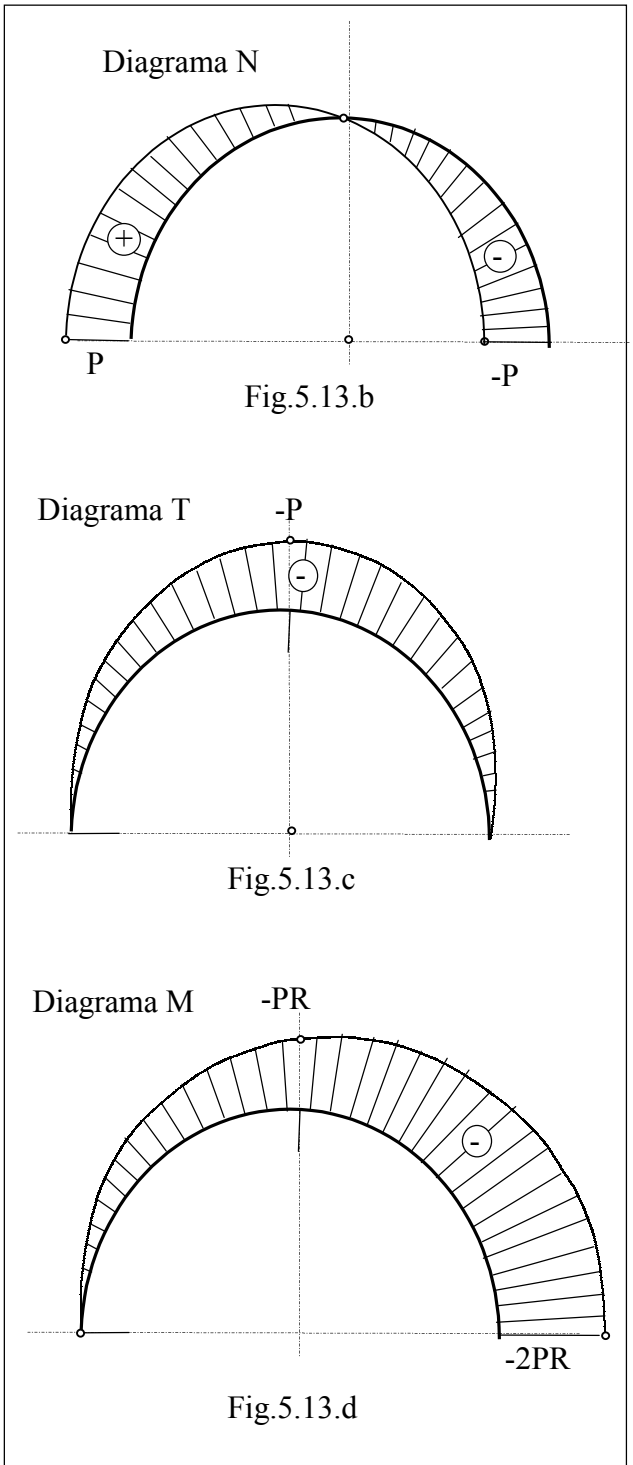


Fig.5.13.b

Fig.5.13.c

Fig.5.13.d

Problema 5.13

Se consideră bara curbă încărată ca în figură . Se cunosc: P =10 kN; R = 1 m; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; σ_a=150MPa; poziția axei neutre $r=\dfrac{d^2}{4(2R-\sqrt{4R^2-d^2})}$ Se cere:

1. Să se traseze diagramele N, T şi M şi să se determine momentul maxim
2. Să se verifice tensiunea σ_{max} dacă secțiunea barei este circulară cu d=150 mm
3. Să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a capătului liber al barei

REZULTATE

1. Diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M au forma din fig.5.13. b,c,d

$$N = P\cos\theta;$$

$$T = -P\sin\theta;$$

$$M(\theta) = -PR\,(1-\cos\theta).$$

Din aceste diagrame rezultă următoarele:

Diagramele *N* şi *M* admit câte un maxim pentru $\theta = 180^0$. Valoarea maximă a efortului axial: $N_{max}=P$ şi valoarea maximă a momentului încovoietor este $M_{max}= 2\,PR$.

2. Deoarece N_{max} şi M_{max} au acelaşi semn relația de verificare a tensiuni maxime este:

$$\sigma_{max}=\frac{P}{\pi d^2}+\frac{2PR}{\pi d^2(R-r)}\cdot\frac{d-2e}{2R-d}$$

Deplasările δ_V , δ_H (forțele unitare au sensul axelor Ox şi Oy):

$$m_V(\theta) = R\,(1-\cos\theta);$$

$$m_H(\theta) = -R\,\sin\theta$$

$$\delta_V = \int\frac{m_V M^o}{EI}ds = -\frac{3\pi}{2}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\delta_H = \int\frac{m_H M^o}{EI}ds = 2\frac{PR^3}{EI}$$

$$\varphi_A = \int\frac{m_A M^o}{EI}ds = \pi\frac{PR^2}{EI}$$

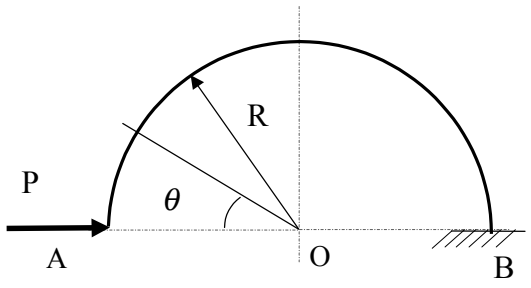


Fig.5.14.a

Diagrama N

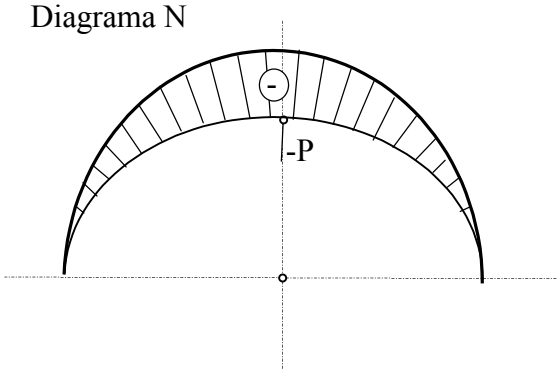


Fig.5.14.b

Diagrama T

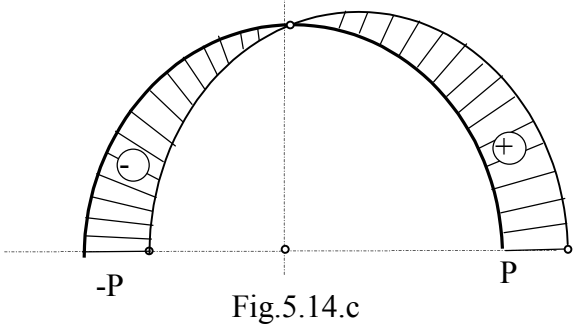


Fig.5.14.c

Diagrama M -PR

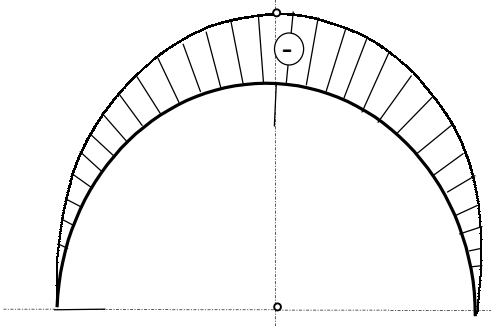


Fig.5.14.d

Problema 5.14

Se consideră bara curbă încărată ca în figură . Se cunosc: P =10 kN; R = 1 m; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; σ_a=150MPa; poziția axei neutre $r=\dfrac{d^2}{4(2R-\sqrt{4R^2-d^2})}$ Se cere:

1. Să se traseze diagramele N, T şi M şi să se determine momentul maxim
2. Să se verifice tensiunea σ_{max} dacă secțiunea barei este circulară cu d=150 mm
3. Să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a capătului liber al barei

REZULTATE

1. Diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M au forma din fig.5.14. b,c,d

$$N=-P\sin\theta;$$

$$T=-P\cos\theta;$$

$$M(\theta)=-PR\sin\theta$$

Din aceste diagrame rezultă următoarele:

Diagramele N şi M admit câte un maxim pentru $\theta=90^0$ Valoarea maximă a efortului axial: $N_{max}=P$ şi $M_{max}=PR$.

2. Deoarece M_{max} şi N_{max} au acelaşi semn pentru $\theta=90^0$ relația de verificare a tensiunii maxime este:

$$\sigma_{max}=\frac{P}{\pi d^2}+\frac{PR}{\pi d^2(R-r)}\cdot\frac{d-2e}{2R-d}$$

Deplasările δ_V , δ_H (forțele unitare au sensul axelor Ox şi Oy):

$$m_V(\theta)=R\,(1-\cos\theta);$$

$$m_H(\theta)=-R\,\sin\theta$$

$$\delta_V=\int\frac{m_V M^o}{EI}ds=-2\frac{PR^3}{EI}$$

$$\delta_H=\int\frac{m_H M^o}{EI}ds=\frac{\pi}{2}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\varphi_A=\int\frac{m_A M^o}{EI}ds=2\frac{PR^2}{EI}$$

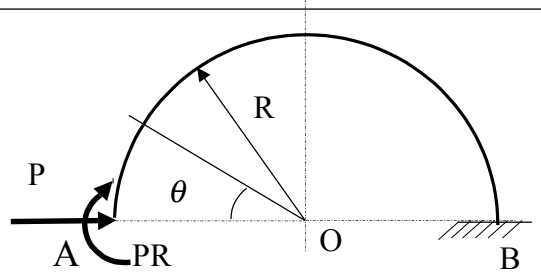


Fig.5.15.a

Diagrama N

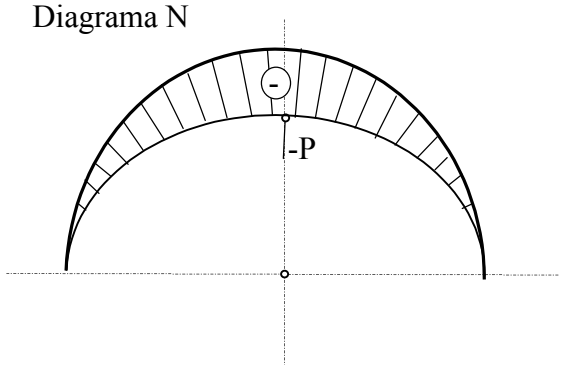


Fig.5.15.b

Diagrama T

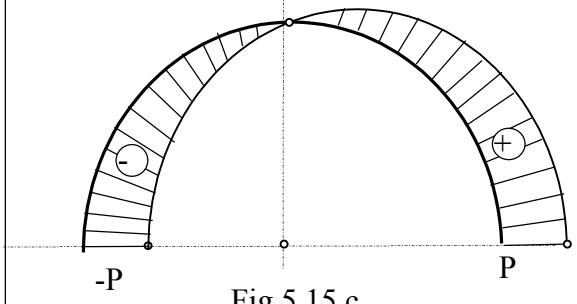


Fig.5.15.c

Diagrama M

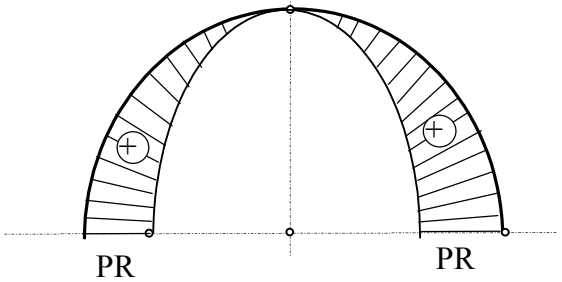


Fig.5.15.d

Problema 5.15

Se consideră bara curbă încărată ca în figură . Se cunosc: P =10 kN; R = 1 m; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; σ_a=150MPa; poziția axei neutre $r=\dfrac{d^2}{4(2R-\sqrt{4R^2-d^2})}$ Se cere:

1. Să se traseze diagramele N, T şi M şi să se determine momentul maxim
2. Să se verifice tensiunea σ_{max} dacă secțiunea barei este circulară cu d=150 mm
3. Să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a capătului liber al barei

REZULTATE

1. Diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M au forma din fig.5.15. b,c,d

$$N=-P\sin\theta;$$

$$T=-P\cos\theta;$$

$$M(\theta)=PR\,(1-\sin\theta).$$

Din aceste diagrame rezultă următoarele:

Diagrama N admite un maxim pentru $\theta=90^0$ Valoarea maximă a efortului axial: $N_{max}=P$ şi M admite un maxim pentru $\theta=180^0$:

$$M_{max}=PR.$$

2. Deoarece $M_{max}=PR$ pentru $\theta=180^0$ relația de verificare a tensiunii maxime este:

$$\sigma_{max}=\frac{PR}{\pi d^2(R-r)}\cdot\frac{d-2e}{2R-d}$$

Deplasările δ_V , δ_H (forțele unitare au sensul axelor Ox şi Oy):

$$m_V(\theta)=R\,(1-\cos\theta);$$

$$m_H(\theta)=-R\sin\theta$$

$$\delta_V=\int\frac{m_V M^o}{EI}ds=(-2+\pi)\frac{PR^3}{EI}$$

$$\delta_H=\int\frac{m_H M^o}{EI}ds=\frac{\pi-4}{2}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\varphi_A=\int\frac{m_A M^o}{EI}ds=(2-\pi)\frac{PR^2}{EI}$$

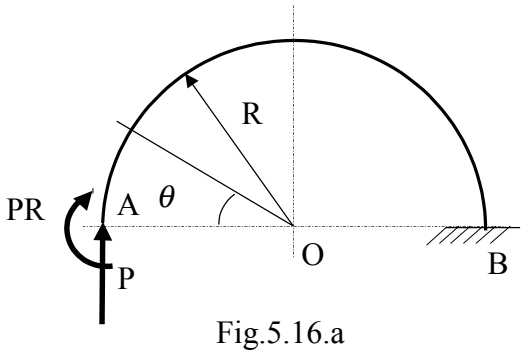


Fig.5.16.a

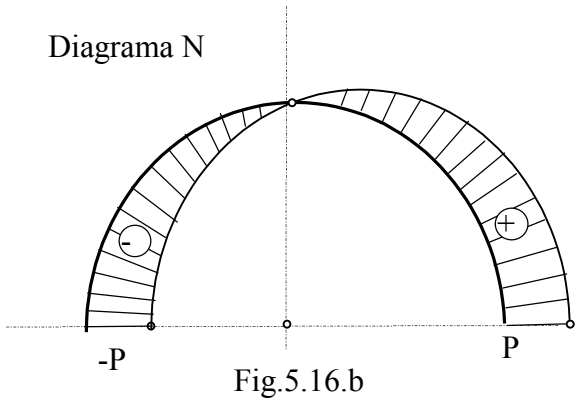


Fig.5.16.b

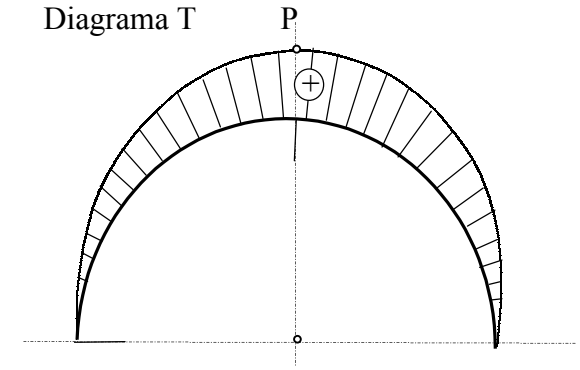


Fig.5.16.c

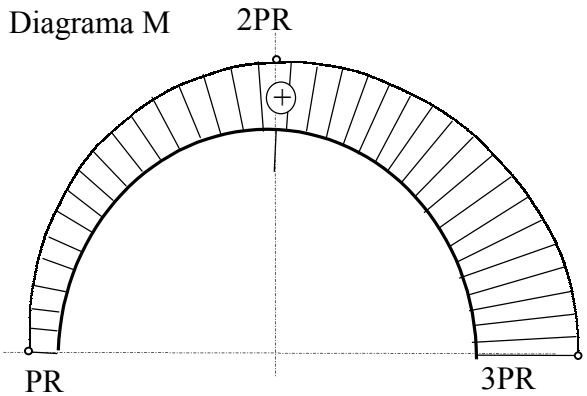


Fig.5.16.d

Problema 5.16

Se consideră bara curbă încărată ca în figură . Se cunosc: P =10 kN; R = 1 m; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; σ_a=150MPa; poziția axei neutre $r=\dfrac{d^2}{4(2R-\sqrt{4R^2-d^2})}$. Se cere:

1. Să se traseze diagramele N, T şi M şi să se determine momentul maxim
2. Să se verifice tensiunea σ_{max} dacă secțiunea barei este circulară cu d=150 mm
3. Să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a capătului liber al barei

REZULTATE

1. Diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M au forma din fig.5.16. b,c,d

$$N=-P\cos\theta;$$

$$T=P\sin\theta;$$

$$M(\theta)=PR\,(2-\cos\theta).$$

Din aceste diagrame rezultă următoarele:

Diagramele *N* şi M admit câte un maxim pentru $\theta=180^0$ Valoarea maximă a efortului axial: $N_{max}=P$ şi a ef. încovoietor $M_{max}=3\,PR$.

2. Deoarece M_{max} şi N_{max} au acelaşi semn pentru $\theta=180^0$ relația de verificare a tensiunii maxime este:

$$\sigma_{max}=\frac{P}{\pi d^2}+\frac{3PR}{\pi d^2(R-r)}\cdot\frac{d-2e}{2R-d}$$

Deplasările δ_V , δ_H (forțele unitare au sensul axelor Ox şi Oy):

$$m_V(\theta)=R\,(1-\cos\theta);$$

$$m_H(\theta)=-R\,\sin\theta$$

$$\delta_V=\int\frac{m_V M^o}{EI}ds=\frac{5\pi}{2}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\delta_H=\int\frac{m_H M^o}{EI}ds=-4\frac{PR^3}{EI}$$

$$\varphi_A=\int\frac{m_A M^o}{EI}ds=-2\pi\frac{PR^2}{EI}$$

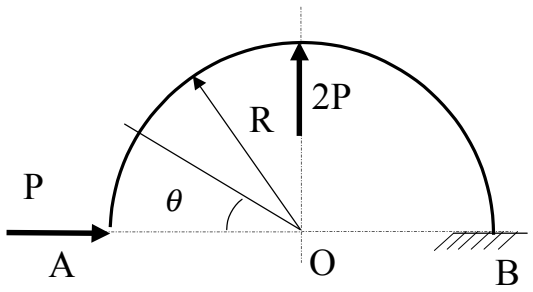


Fig.5.17.a

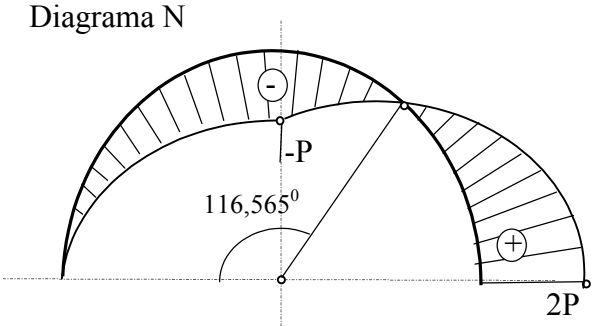


Fig.5.17.b

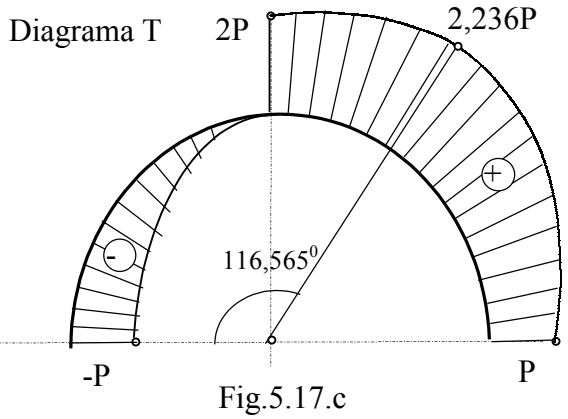


Fig.5.17.c

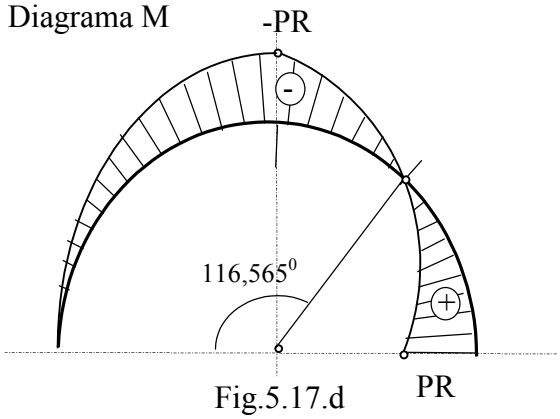


Fig.5.17.d

Problema 5.17

Se consideră bara curbă încărată ca în figură . Se cunosc: P =10 kN; R = 1 m; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; σ_a=150MPa; poziția axei neutre $r=\dfrac{d^2}{4(2R-\sqrt{4R^2-d^2})}$ Se cere:

1. Să se traseze diagramele N, T şi M şi să se determine momentul maxim
2. Să se verifice tensiunea σ_{max} dacă secțiunea barei este circulară cu d=150 mm
3. Să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a capătului liber al barei

REZULTATE

1. Diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M au forma din fig.5.17.

b,c,d	
$\theta\in[0;\pi/2]$	$\theta\in[\pi/2;\pi]$
$N=-P\sin\theta;$	$N=-P(\sin\theta+2\cos\theta);$
$T=-P\cos\theta;$	$T=-P(\cos\theta-2\sin\theta);$
$M=-PR\sin\theta$	$M=-PR(\sin\theta+\cos\theta).$

Din aceste diagrame rezultă următoarele:

Diagrama N admite un maxim pentru $\theta=180^0$ Valoarea maximă a efortului axial: $N_{max}=2P$ şi M admite un maxim pentru $\theta=180^0$

$M_{max}=PR.$

2. Deoarece M_{max} şi N_{max} au acelaşi semn pentru $\theta=180^0$ relația de verificare a tensiunii maxime este:

$$\sigma_{max}=\frac{2P}{\pi d^2}+\frac{PR}{\pi d^2(R-r)}\cdot\frac{d-2e}{2R-d}$$

Deplasările δ_V , δ_H (forțele unitare au sensul axelor Ox şi Oy):

$m_V(\theta)=R(1-\cos\theta);$

$m_H(\theta)=-R\sin\theta$

$$\delta_V=\int\frac{m_V M^o}{EI}ds=\frac{\pi}{2}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\delta_H=\int\frac{m_H M^o}{EI}ds=\frac{\pi-2}{2}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\varphi_A=\int\frac{m_A M^o}{EI}ds=0$$

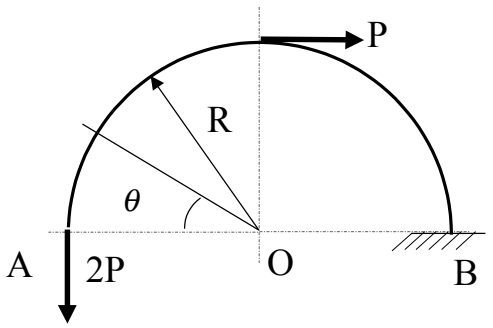


Fig.5.18

Problema 5.18

Se consideră bara curbă încărată ca în figură . Se cunosc: P =10 kN; R = 1 m; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; σ_a=150MPa; poziția axei neutre $r=\dfrac{d^2}{4(2R-\sqrt{4R^2-d^2})}$ Se cere:

1. Să se traseze diagramele N, T şi M şi să se determine momentul maxim
2. Să se verifice tensiunea σ_{max} dacă secțiunea barei este circulară cu d=150 mm
3. Să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a capătului liber al barei

REZULTATE

1. Diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M au forma din fig.5.18.

$\theta\in[0;\pi/2]$

$N=2P\cos\theta;$

$T=-2P\sin\theta;$

$M=-2PR(1-\cos\theta).$

$\theta\in[\pi/2;\pi]$

$N=P(-\sin\theta+2\cos\theta);$

$T=-P(\cos\theta+2\sin\theta);$

$M=PR(-\sin\theta+2\cos\theta-1).$

Din aceste diagrame rezultă următoarele:

Diagramele *N* şi *M* admit câte un maxim pentru $\theta=153{,}435^0$ Valoarea maximă a efortului axial: $N_{max}=2{,}236P$ şi a efortului încovoietor $M_{max}=3{,}236PR$.

2. Deoarece M_{max} şi N_{max} au acelaşi semn pentru $\theta=153{,}435^0$ relația de verificare a tensiunii maxime este:

$$\sigma_{max}=\frac{2{,}236P}{\pi d^2}+\frac{3{,}236PR}{\pi d^2(R-r)}\cdot\frac{d-2e}{2R-d}$$

$m_V(\theta)=R\,(1-\cos\theta);$

$m_H(\theta)=-R\,\sin\theta$

$$\delta_V=\int\frac{m_V M^o}{EI}ds=-\frac{5\pi+1}{2}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\delta_H=\int\frac{m_H M^o}{EI}ds=\frac{12+\pi}{4}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\varphi_A=\int\frac{m_A M^o}{EI}ds=\frac{2+3\pi}{2}\frac{PR^2}{EI}$$

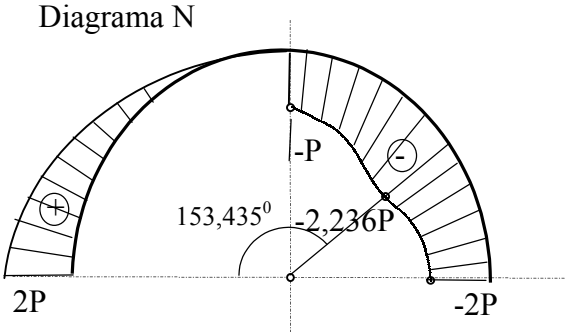


Fig.5.18.b

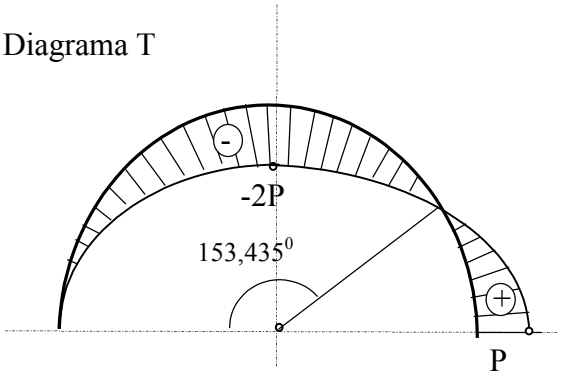


Fig.5.18.c

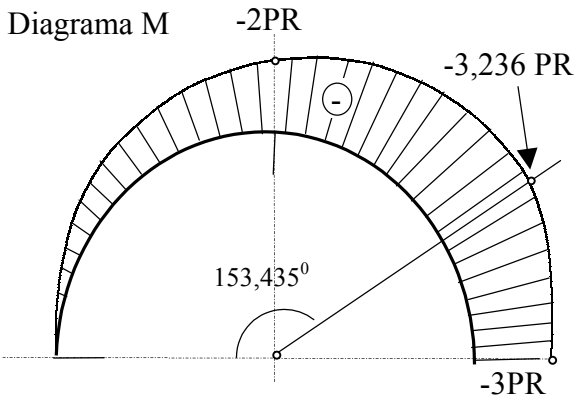


Fig.5.18.d

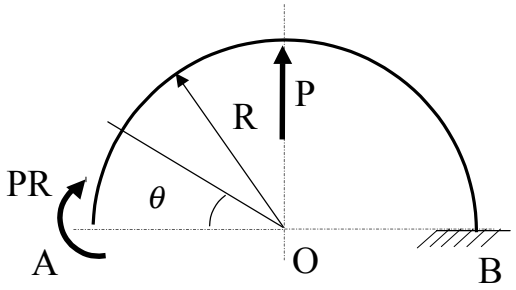


Fig.5.19

Problema 5.19

Se consideră bara curbă încărată ca în figură . Se cunosc: P =10 kN; R = 1 m; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; σ_a=150MPa; poziția axei neutre $r=\dfrac{d^2}{4(2R-\sqrt{4R^2-d^2})}$ Se cere:

1. Să se traseze diagramele N, T şi M şi să se determine momentul maxim
2. Să se verifice tensiunea σ_{max} dacă secțiunea barei este circulară cu d=150 mm
3. Să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a capătului liber al barei

REZULTATE

1. Diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M au forma din fig.5.19.

$\theta\in[0;\pi/2]$

$N=0 \qquad T=0$

$M=PR$

$\theta\in[\pi/2;\pi]$

$N=-P\cos\theta;$

$T=P\sin\theta;$

$M=PR\,(1-\cos\theta).$

Din aceste diagrame rezultă următoarele:

Diagramele *N* şi *M* admit câte un maxim pentru $\theta=180^0$ Valoarea maximă a efortului axial: $N_{max}=2P$ şi a efortului încovoietor $M_{max}=2\,PR$.

2. Deoarece M_{max} şi N_{max} au acelaşi semn pentru $\theta=180^0$ relația de verificare a tensiunii maxime este:

$$\sigma_{max}=\frac{P}{\pi d^2}+\frac{2PR}{\pi d^2(R-r)}\cdot\frac{d-2e}{2R-d}$$

$m_V(\theta)=R\,(1-\cos\theta);$

$m_H(\theta)=-R\,\sin\theta$

$$\delta_V=\int\frac{m_V M^o}{EI}ds=\frac{5\pi+4}{4}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\delta_H=\int\frac{m_H M^o}{EI}ds=-\frac{5}{2}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\varphi_A=\int\frac{m_A M^o}{EI}ds=-(1+\pi)\frac{PR^2}{EI}$$

Diagrama N

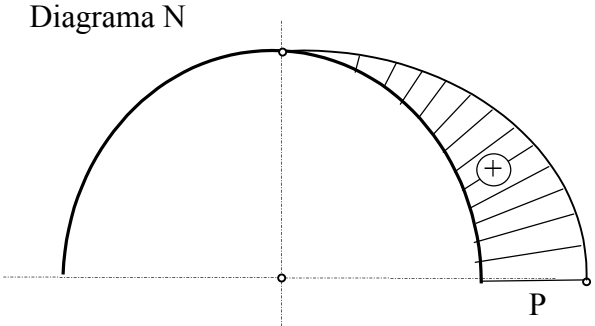


Fig.5.19.b

Diagrama T P

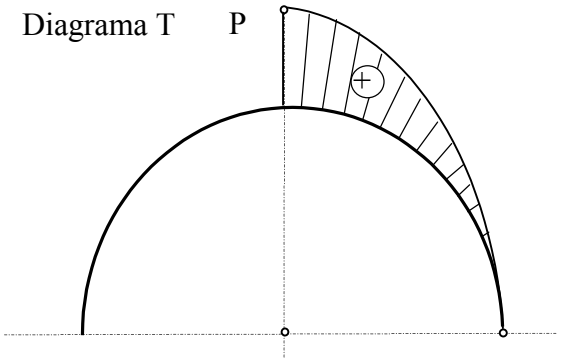


Fig.5.19.c

Diagrama M

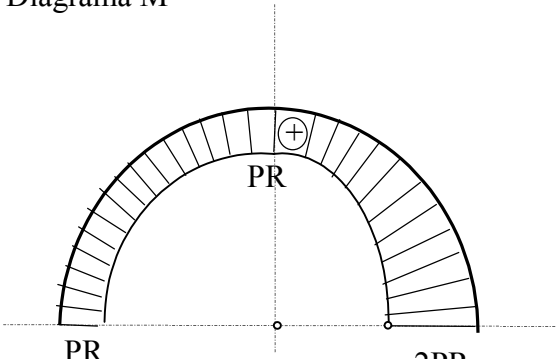


Fig.5.19.d

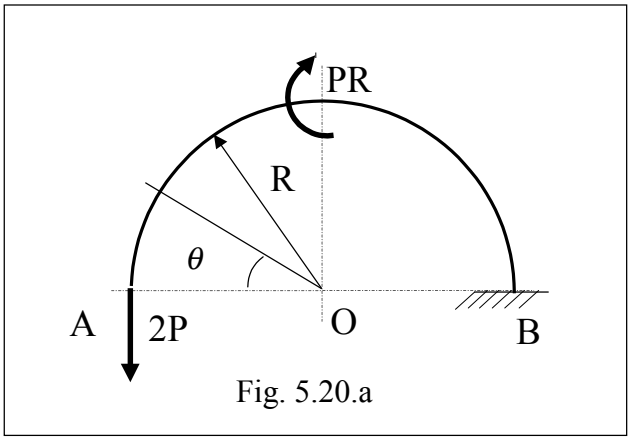


Fig. 5.20.a

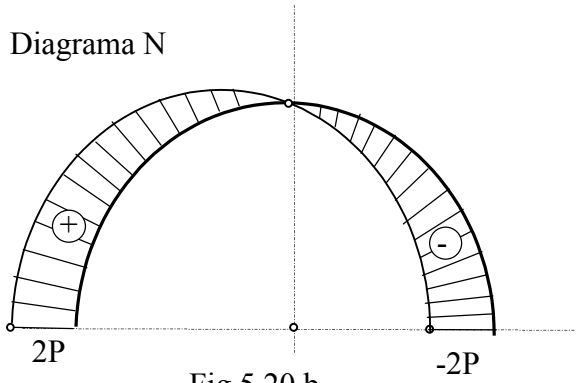


Fig.5.20.b

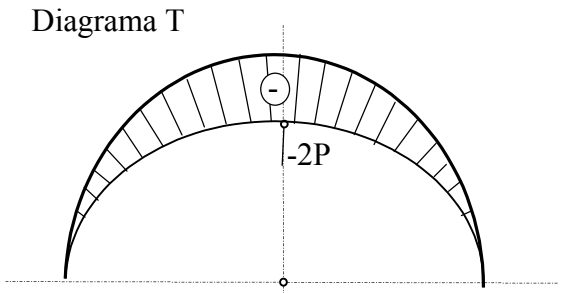


Fig.5.20.c

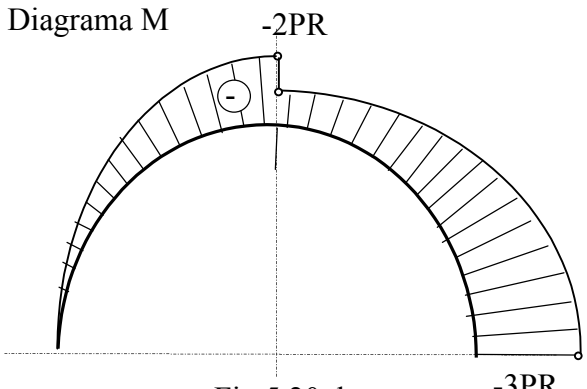


Fig.5.20.d

Problema 5.20

Se consideră bara curbă încărată ca în figură . Se cunosc: P =10 kN; R = 1 m; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; σ_a=150MPa; poziția axei neutre $r=\dfrac{d^2}{4(2R-\sqrt{4R^2-d^2})}$ Se cere:

1. Să se traseze diagramele N, T şi M şi să se determine momentul maxim
2. Să se verifice tensiunea σ_{max} dacă secțiunea barei este circulară cu d=150 mm
3. Să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a capătului liber al barei

REZULTATE

1. Diagramele de eforturi axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M au forma din fig.5.20. b,c,d

$\theta\in[0;\pi/2]$

$N=2P\cos\theta;$

$T=-2P\sin\theta;$

$M=-2PR(1-\cos\theta).$

$\theta\in[\pi/2;\pi]$

$N=2P\cos\theta;$

$T=-2P\sin\theta;$

$M=PR(2\cos\theta-1).$

Diagramele *N* şi *M* admit câte un maxim pentru $\theta=180^0$ Valoarea maximă a efortului axial: $N_{max}=2P$ şi a efortului încovoietor $M_{max}=3PR$.

2. Deoarece M_{max} şi N_{max} au acelaşi semn pentru $\theta=180^0$ relația de verificare a tensiunii maxime este:

$$\sigma_{max}=\frac{2P}{\pi d^2}+\frac{3PR}{\pi d^2(R-r)}\cdot\frac{d-2e}{2R-d}$$

$m_V(\theta)=R(1-\cos\theta);$

$m_H(\theta)=-R\sin\theta$

$$\delta_V=\int\frac{m_V M^o}{EI}ds=\frac{2-5\pi}{2}\frac{PR^3}{EI}$$

$$\delta_H=\int\frac{m_H M^o}{EI}ds=3\frac{PR^3}{EI}$$

$$\varphi_A=\int\frac{m_A M^o}{EI}ds=\frac{3\pi}{2}\frac{PR^2}{EI}$$

ANEXA 1a ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE ÎN CONSOLĂ

Nr.	b	c	d	e	L	lamda	P	q	N		V0	M0	Mmax	Zc/a	Iy/a**4	Wy/a**3	NR.VAR.
	m	m	m	m	m	-	kN	kN/m	kN*m		kN	kN	kNm	-	-	-	-
1	2	2	6	6	8	3	-10	1.5	10		-4.000	6.000	10.000	1.500	8.500	3.400	1
2	1	0	1.5	1.8	1.8	2	-15	4	15		-9.000	25.500	25.500	1.100	3.617	1.904	2
3	3	1.5	4.5	1.2	4.5	3	12	3	-8		21.000	-71.000	71.000	1.500	8.500	3.400	3
4	8	2	8	5	8	4	-10	2	-12		2.000	8.000	21.000	1.929	16.298	5.306	4
5	2	0.4	2.4	2.4	2.4	5	10	-3	2		4.000	-9.600	9.600	2.375	27.542	7.598	5
6	1.3	0.7	1.9	0.7	1.9	1	-12	5	-10		-6.000	-2.200	6.400	0.750	1.083	0.867	6
7	2.5	0	1.5	1.5	2.5	2	20	-15	4		-2.500	-29.125	29.333	1.100	3.617	1.904	7
8	2	0	2.5	1.5	2.5	3	-12.8	6.4	6.4		3.200	12.000	12.800	1.500	8.500	3.400	8
9	1	1	5	4	5	4	-30	10	50		10.000	-40.000	45.000	1.929	16.298	5.306	9
10	1.5	0.5	1.5	0.5	0.3	5	-12	20	10		8.000	8.000	12.000	2.375	27.542	7.598	10
11	2.4	0	2.7	2.7	2.7	1	-9.6	6.4	24		7.680	23.712	28.317	0.750	1.083	0.867	11
12	2	0	2	2.5	2.5	2	5	12	-18		29.000	-52.000	52.000	1.100	3.617	1.904	12
13	1.2	0	1	1.4	1.4	3	-2	3	4		1.000	4.900	5.066	1.500	8.500	3.400	13
14	1.2	1.8	3	3	3	4	-10	20	40		14.000	-5.600	40.000	1.929	16.298	5.306	14
15	2.5	1.1	4.4	3.3	4.4	5	-19.4	8.2	6.2		7.660	-19.715	19.715	2.375	27.542	7.598	15
16	2.5	0	1.5	0.4	2.5	1	30	-20	40		0.000	-12.500	50.900	0.750	1.083	0.867	16
17	1.2	0	2.4	1.2	2.4	2	10	-10	5		-14.000	21.800	21.800	1.100	3.617	1.904	17
18	6	2	8	2	8	3	-8	1.2	-8		-0.800	4.000	10.400	1.500	8.500	3.400	18
19	1.8	0	2.4	2.4	2.4	4	-8	3	-7		-0.800	-1.240	7.540	1.929	16.298	5.306	19
20	5	2	4	4	5	5	6	-4	7		-2.000	1.000	6.000	2.375	27.542	7.598	20
21	1	0	0.9	1	1	1	-10	10	5		-1.000	10.950	10.950	0.750	1.083	0.867	21
22	3	2	6	6	6	2	-5	3	10		7.000	-23.000	23.000	1.100	3.617	1.904	22
23	0.8	0	0.4	1.2	1.2	3	-2.5	8	10		0.700	11.360	11.390	1.500	8.500	3.400	23
24	1.5	0.5	1	0.5	1.5	4	-7.5	5.5	10		-4.750	19.188	19.188	1.929	16.298	5.306	24
25	2	0.4	1.6	1.6	2	5	-8	12	5.6		6.400	7.200	11.466	2.375	27.542	7.598	25
26	0.75	1.5	2	2	2	1	-8	10	16		-3.000	13.250	16.000	0.750	1.083	0.867	26
27	1.8	1.2	1.8	1.8	1.8	2	-10	4	-15		-7.600	-0.600	9.720	1.100	3.617	1.904	27
28	2	0	2	1	2	3	10	-6.4	18.5		-2.800	11.300	11.700	1.500	8.500	3.400	28
29	2	0	2	2	2	4	10	-3.5	10		3.000	-3.000	10.000	1.929	16.298	5.306	29
30	0.8	0	1.8	1.8	1.8	5	-5	3	15		0.400	14.140	15.000	2.375	27.542	7.598	30

NR.VAR	a	a	Izefectiv	Fl(L)	Fl'(L)	w3	fi3	Tmax	S	tau max		
-	mm	mm	mm4	kNm3	kNm3	mm	grade	kN	mm**3	Mpa		
1.	26.966	27	4517249	-130.667	-48.000	-137.744	-2.898	6.000	61509	3.026		
2.	44.699	45	14830594	-32.094	-32.250	-10.305	-0.593	13.000	164481	3.204		
3.	51.828	52	62148736	373.253	107.475	28.599	0.472	21.000	439400	2.855		
4.	29.770	30	13201071	-372.667	-92.000	-134.429	-1.901	10.000	127355	3.216		
5.	20.347	21	5356331	16.539	8.320	14.703	0.424	8.800	60848	4.760		
6.	36.650	37	2030341	3.630	2.290	8.514	0.308	9.000	9497	1.138		
7.	46.835	47	17648180	75.737	48.063	20.436	0.743	20.000	187401	4.519		
8.	29.278	30	6885000	-32.483	-18.533	-22.467	-0.734	9.600	84375	3.922		
9.	38.381	39	37703580	103.333	-8.333	13.051	-0.060	40.000	279798	7.611		
10.	21.918	22	6451801	1.533	-7.667	1.132	-0.324	12.000	69961	5.915		
11.	60.168	61	14999661	-97.496	-71.453	-30.952	-1.299	7.860	42559	0.366		
12.	56.683	57	38177537	106.583	71.000	13.294	0.507	29.000	334273	4.455		
13.	21.496	22	1991176	-4.785	-6.540	-11.443	-0.896	2.000	33275	1.519		
14.	36.903	37	30544362	-45.792	-56.640	-7.139	-0.506	24.000	238922	5.074		
15.	25.863	26	12585881	104.182	33.514	39.418	0.726	15.580	115480	5.498		
16.	73.157	74	32485457	95.544	66.500	14.005	0.558	30.000	75980	0.948		
17.	42.423	43	12364664	-37.872	-21.840	-14.585	-0.482	14.000	143510	3.779		
18.	27.320	28	5224576	-149.600	-27.200	-136.352	-1.420	5.600	68600	2.626		
19.	21.159	22	3817815	9.274	10.752	11.567	0.768	6.200	50225	3.707		
20.	17.396	18	2891214	19.333	9.667	31.843	0.912	6.000	38318	4.418		
21.	43.835	44	4060437	-4.892	-8.785	-5.737	-0.590	10.000	15972	0.894		
22.	43.188	44	13555614	171.500	21.500	60.246	0.433	9.000	153757	2.320		
23.	28.161	29	6011889	-7.853	-12.715	-6.220	-0.577	2.500	76216	1.093		
24.	28.888	29	11526996	-13.699	-12.635	-5.659	-0.299	7.500	115039	2.581		
25.	21.588	22	6451801	-19.221	-16.896	-14.187	-0.714	8.000	69961	3.943		
26.	49.742	50	6770833	-25.078	-26.542	-17.637	-1.069	5.000	23438	0.346		
27.	32.410	33	4289081	8.381	13.536	9.305	0.861	10.000	64866	4.583		
28.	28.414	29	6011889	-13.883	-7.033	-10.997	-0.319	10.000	76216	4.372		
29.	23.247	24	5407159	-0.333	-4.667	-0.294	-0.235	10.000	65206	5.025		
30.	23.611	24	9137664	-22.817	-25.684	-11.890	-0.767	3.000	90828	1.242		

ANEXA 1b ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE FĂRĂ CONSOLE PE DOUĂ REAZEME

a	b	c	d	L	P	q	lamda	V1	V2	Mmax	zc/s	Iy/s**4	Wy/s**3	s	nr.
m	m	m	m	m	kN	kN/m	-	kN	kN	kNm	-	-	-	mm	-
2	2	6	7	8	-10	1.5	1.5	-4.500	0.500	9.000	0.995	0.10260	0.1031	89.951	1
3	1.5	3.5	3.5	4	10	2.5	2	4.375	10.625	10.313	1.327	0.24320	0.1832	77.701	2
3.5	0.5	2.5	3.5	4	18	2	1.25	4.750	17.250	8.625	0.830	0.05938	0.0716	100.145	3
1	1	3	4	5	10	2	1.75	10.400	3.600	10.440	1.161	0.16293	0.1403	85.282	4
1	2	3	2.5	4	15	2	1.4	12.000	5.000	12.000	0.929	0.08342	0.0898	103.664	5
1	2	3	1.5	4	12	3	1.8	10.125	4.875	10.125	1.194	0.17729	0.1484	82.845	6
1.5	1	3	1.5	4	22	3	1.3	16.750	11.250	24.750	0.863	0.06679	0.0774	138.637	7
1.5	1	3	3	4	4	3	1.4	5.500	4.500	5.875	0.929	0.08342	0.0898	81.702	8
2.5	1	3	2.5	4	8	6	1.6	9.000	11.000	15.750	1.062	0.12452	0.1172	103.832	9
3	1	2	2.5	4	6	3	1.5	3.375	5.625	5.625	0.995	0.10260	0.1031	76.907	10
3	1	2	2.5	4	12	2	1.2	4.250	9.750	9.750	0.796	0.05253	0.0660	107.201	11
3	1	2	2.5	4	6	-3	1.5	-0.375	3.375	3.375	0.995	0.10260	0.1031	64.866	12
4	1	4	5	6	20	5	2.25	15.417	19.583	39.166	1.493	0.34628	0.2319	112.073	13
2	0	4	5	6	15	5	2.5	23.333	11.667	36.666	1.659	0.47500	0.2863	102.199	14
6	4	8	7	8	16	2	2.75	6.000	18.000	32.000	1.825	0.63223	0.3464	91.653	15
5	2	5.5	5.5	6	12	1	3	3.313	12.188	12.065	1.991	0.82080	0.4122	62.481	16
1	2	3	2	3	6	2	1.5	4.333	3.667	4.333	0.995	0.10260	0.1031	70.500	17
2	0	4	4.5	5	10	2	1	10.800	7.200	17.600	0.664	0.03040	0.0458	147.397	18
2	4	6	5	6	6	2	1	4.667	5.333	9.334	0.664	0.03040	0.0458	119.309	19
4	0	4	6	8	16	2	1	14.000	10.000	40.000	0.664	0.03040	0.0458	193.793	20
6	0	6	7	8	20	1.5	1.5	10.625	18.375	36.750	0.995	0.10260	0.1031	143.773	21
2	2	4	5	6	9	1.5	1.5	7.500	4.500	15.000	0.995	0.10260	0.1031	106.648	22
2	0	4	5	6	12	2	2	13.333	6.667	22.666	1.327	0.24320	0.1832	101.024	23
4	0	2	5	6	6	3	2	7.000	5.000	10.000	1.327	0.24320	0.1832	76.907	24
3	1	5	4	8	20	4	1.5	22.500	13.500	59.500	0.995	0.10260	0.1031	168.822	25
1	1	3	4	6	30	2	1.5	27.667	6.333	27.667	0.995	0.10260	0.1031	130.791	26
2	1	3	4	8	25	8	1.5	30.750	10.250	57.500	0.995	0.10260	0.1031	166.909	27
2	0	3	4	6	20	5	2.5	24.583	10.417	39.166	1.659	0.47500	0.2863	104.471	28
1	0	3	3	5	30	5	2	34.500	10.500	32.000	1.327	0.24320	0.1832	113.331	29
1.5	0	3	3	4	20	8	2	27.500	16.500	32.250	1.327	0.24320	0.1832	113.625	30
1.5	0	3	3	4	20	-10	2.2	-6.250	-3.750	4.453	1.460	0.32370	0.2217	55.113	31

nr.	s	Izefectiv	FI2	FI6	FI6'	w6	fi0	fi6	Tmax	b	S*	tau max
-	mm	mm4	kNm3	kNm3	kNm2	mm	grade	grade	kN	mm	mm**3	MPa
1	90	6731586	104.000	87.917	16.250	-2.181	-0.527	0.132	5.500	33.120	88574	2.185
2	78	9002062	-40.938	-29.388	-22.214	3.403	0.310	-0.363	10.625	28.704	102503	4.215
3	101	6178586	-38.208	-27.276	-20.427	4.745	0.422	-0.480	17.250	37.168	86932	6.530
4	86	8912130	-90.000	-59.267	-29.533	6.804	0.551	-0.353	10.400	31.648	105188	3.879
5	104	9758679	-59.250	-22.807	-20.583	6.941	0.414	-0.161	12.000	38.272	119056	3.825
6	83	8414019	-52.125	-5.445	-9.891	7.981	0.423	0.102	10.125	30.544	100040	3.941
7	139	24932329	-111.375	-9.414	-18.781	6.179	0.305	0.099	16.750	51.152	245090	3.219
8	82	3771491	-38.250	-20.500	-16.250	10.338	0.692	-0.484	5.500	30.176	58357	2.820
9	104	14566892	-71.500	-22.172	-24.750	7.360	0.335	-0.129	11.000	38.272	155501	3.068
10	77	3606702	-26.875	-8.164	-8.922	11.398	0.508	-0.167	5.625	28.336	55469	3.053
11	108	7146812	-37.917	-10.651	-12.198	8.693	0.362	-0.104	9.750	39.744	97955	3.362
12	65	1831474	-3.125	0.352	-0.453	5.992	0.116	0.049	3.375	23.920	33367	2.571
13	113	56459225	-401.458	-264.722	-130.208	5.889	0.323	-0.306	19.583	41.584	394452	3.290
14	103	53461668	-413.333	-288.611	-120.833	4.973	0.352	-0.265	23.333	37.904	368795	4.247
15	92	45292154	-469.333	-333.583	-130.000	8.104	0.353	-0.430	18.000	33.856	317997	3.733
16	63	12930030	-106.586	-85.350	-41.456	4.550	0.375	-0.500	12.188	23.184	121523	4.941
17	71	2607238	-11.417	-4.778	-5.667	5.175	0.398	-0.195	4.333	26.128	43486	2.766
18	148	14585471	-128.000	-103.817	-47.767	3.716	0.479	-0.415	10.800	54.464	175057	2.380
19	120	6303744	-102.667	-70.139	-31.000	11.646	0.741	-0.601	5.333	44.160	93312	1.788
20	194	43060642	-704.000	-376.000	-150.667	16.809	0.558	-0.397	14.000	71.392	394275	1.796
21	144	44116122	-625.000	-454.063	-164.813	10.018	0.483	-0.536	18.375	52.992	362797	2.852
22	107	13448767	-159.000	-110.750	-46.750	7.701	0.538	-0.411	7.500	39.376	148843	2.108
23	102	26324750	-245.333	-171.778	-71.333	5.909	0.424	-0.316	13.333	37.536	229221	3.093
24	77	8549220	-114.000	-76.833	-35.500	10.119	0.606	-0.527	7.000	28.336	98611	2.849
25	169	83693972	-1116.667	-223.167	-152.000	19.070	0.455	-0.040	22.500	62.192	586457	2.535
26	131	30215692	-325.667	-153.444	-77.667	10.034	0.490	-0.211	27.667	48.208	273143	5.188
27	167	79801903	-1132.000	-268.000	-161.333	17.782	0.484	-0.068	30.750	61.456	565882	3.548
28	105	57736547	-418.542	-182.431	-104.167	7.967	0.330	-0.163	24.583	38.640	390698	4.305
29	114	41075511	-271.875	-98.375	-72.750	7.507	0.361	-0.122	34.500	41.952	320014	6.407
30	114	41075511	-156.250	-85.500	-65.250	3.674	0.259	-0.174	27.500	41.952	320014	5.107
31	56	3183418	12.500	5.625	5.625	-5.609	-0.268	0.214	11.250	20.608	45899	7.871

ANEXA 1c ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A UNEI BARE DREPTE CU CONSOLE PE DOUĂ REAZEME PUNCTUALE

a	b	c	d	e	f	g	lamda	P	q	N	V1	V2	Mmax	zc/s	Iy/s**4	Wy/s**3	NR.VAR
m	m	m	m	m	m	m		kN	kN/m	kN*m	kN	kN	kNm	-	-	-	-
2	3	1	6	0	5	0	1	2	1	5	5.167	1.833	7.000	1.700	3.615	2.008	1
1.5	1	1.8	0	1.5	4.3	1.5	2	-15	4	15	-26.980	23.180	22.500	2.397	7.870	3.284	2
0	3	1.5	4.5	1.2	3	1.2	3	12	3	-8	-7.047	24.447	18.000	3.045	15.327	5.033	3
0	8	2	2	0	10	6	4	-30	2	-2	-15.250	5.250	34.500	3.662	26.621	7.269	4
0	2	0.4	2.4	0.6	2.4	0.6	5	-2	3	2	2.750	0.650	1.650	4.256	42.338	9.948	5
0	1.3	0.7	0.7	1	2	1	1	-12	5	-10	-14.000	7.000	10.400	1.700	3.615	2.008	6
0	2.5	1.8	1.5	2.5	4.3	1.5	2	20	15	4	-0.120	47.120	24.300	2.397	7.870	3.284	7
1.5	2	0	0	1.5	3.5	2.5	3	-12.8	6.4	6.4	-12.800	12.800	19.200	3.045	15.327	5.033	8
0	4	1	5	0	4	1	4	20	10	10	17.500	42.500	20.000	3.662	26.621	7.269	9
0.3	1.5	0.5	1.2	0	2.3	0.3	5	-12	20	-4	12.467	21.533	4.145	4.256	42.338	9.948	10
1.5	2.4	0	2.7	0	1.5	1.5	1	9.6	6.4	-24	7.400	11.800	16.800	1.700	3.615	2.008	11
0.7	2	0	0.4	0	1.9	1.9	2	5	12	-18	16.700	11.100	9.120	2.397	7.870	3.284	12
0.6	1.2	0	1	0	1	1.3	3	-2	3	-4	-1.417	2.417	2.792	3.045	15.327	5.033	13
0	1.2	1.8	3	0	1.2	3	4	-10	20	-20	10.333	3.667	20.000	3.662	26.621	7.269	14
0.75	2.55	1.16	4.46	0	1.85	3.3	5	19.4	8.2	6.2	7.735	26.835	22.504	4.256	42.338	9.948	15
0.4	2.5	0	0	0.4	1.6	2.2	1	30	20	40	69.040	-15.040	29.472	1.700	3.615	2.008	16
1.2	2	0	0	0.8	2.2	2.2	2	-10	15	-20	-8.150	19.150	19.150	2.397	7.870	3.284	17
0	6	2	8	0	6	4	3	2	1	-8	1.000	7.000	4.000	3.045	15.327	5.033	18
1.2	1.8	0	2.4	0	1.6	1.6	4	-8	3	-7	-0.689	-2.511	4.115	3.662	26.621	7.269	19
1	5	2	4	0	4	8	5	6	10	-7	33.000	13.000	21.450	4.256	42.338	9.948	20
0.4	1	0	0.9	0	0.4	0.9	1	10	20	-15	-0.400	18.400	9.200	1.700	3.615	2.008	21
1	3	2	6	1	4	0	2	-5	3	-10	4.500	-0.500	13.375	2.397	7.870	3.284	22
1.2	1.2	0	0.4	1.2	2.4	0	3	-2.5	8	-10	-7.700	14.800	12.000	3.045	15.327	5.033	23
0	1.5	0.4	0.6	0	1.2	1.9	4	-7.5	5.5	10	6.127	-7.027	10.000	3.662	26.621	7.269	24
0	1.5	0.4	0.4	0.4	1.9	0	5	8	-2	-5.6	1.433	3.567	6.173	4.256	42.338	9.948	25
2	1.5	1.5	0	2	5	2	1	-8	10	16	-8.000	30.000	16.000	1.700	3.615	2.008	26
1.5	1	1.8	0	2.5	4.3	1.5	2	10	4	15	33.520	-16.320	30.000	2.397	7.870	3.284	27

1	2	0	0	0	3	1	3	-10	6.4	18.5	8.650	0.550	11.700	3.045	15.327	5.033	28

NR.	s	s	Iyef	Fl1	Fl2	Fl6	Fl6'	w0	fio	w6	fi6	Tmax	S	tau max
-	mm	mm	mm4	kNm3	kNm3	kNm3	kNm2	mm	grade	mm	grade	kN	mm3	MPa
1	30.740	31	3338144	10.667	65.292	33.971	18.833	36.733	-1.488	-5.717	0.051	3.166	35749.2	1.094
2	38.506	39	18207545	-8.438	-26.899	-17.553	-19.044	-5.036	0.277	0.030	-0.009	15.980	165684.1	3.729
3	31.005	32	16071215	0.000	20.062	3.605	5.541	0.000	-0.114	-1.904	-0.019	12.447	151924.4	3.677
4	34.071	35	39948648	0.000	558.667	144.000	83.333	0.000	-0.477	-16.132	0.092	19.250	287507.6	3.958
5	11.139	12	877924	0.000	-1.226	-0.295	-0.543	0.000	0.191	1.725	0.022	2.750	15650.8	4.085
6	35.077	36	6071112	0.000	4.246	0.641	2.958	0.000	-0.147	-1.163	-0.014	14.000	55987.2	3.586
7	39.507	40	20148046	0.000	5.646	0.039	0.094	0.000	-0.031	-0.658	-0.029	27.000	178758.6	5.989
8	31.679	32	16071215	-7.200	-66.933	-30.933	-32.533	-11.141	0.507	1.817	-0.045	12.800	151924.4	3.781
9	28.409	29	18828768	0.000	-35.000	-11.667	-11.667	0.000	0.127	1.475	-0.042	22.500	163545.7	6.739
10	15.143	16	2774674	0.007	-3.197	-0.989	-2.648	-1.111	0.210	1.040	-0.050	11.533	37098.2	9.637
11	41.157	42	11247485	1.350	-30.560	-5.792	-14.976	-9.015	0.323	3.731	-0.041	11.800	88905.6	2.221
12	28.497	29	5566535	0.143	8.480	3.224	5.701	2.374	-0.204	-0.930	0.075	13.400	68121.0	5.655
13	16.659	17	1280102	0.016	0.998	0.307	1.075	1.766	-0.174	-0.744	0.055	4.417	22778.5	4.623
14	28.409	29	18828768	0.000	-1.248	-0.264	-1.140	0.000	0.015	0.091	-0.001	13.667	163545.7	4.093
15	26.615	27	22500234	0.108	17.632	3.073	5.054	1.068	-0.083	-1.227	-0.022	19.400	178272.5	5.693
16	49.638	50	22591146	0.320	-17.875	2.021	-6.590	-0.681	0.088	2.276	0.008	39.040	150000.0	5.184
17	36.492	37	14750266	-2.864	-33.636	-13.987	-13.265	-5.036	0.285	1.376	0.039	19.150	141479.1	4.964
18	18.780	19	1997391	0.000	2.000	-1.125	0.000	0.000	-0.046	-5.066	-0.046	5.000	31800.8	4.190
19	16.771	17	2223441	0.259	3.166	1.632	1.347	3.596	-0.198	-0.173	-0.033	5.489	32945.2	4.784
20	26.192	27	22500234	0.417	-146.167	-23.411	-31.667	-6.293	0.355	10.468	-0.028	23.000	178272.5	6.749
21	33.672	34	4830298	0.021	0.768	0.503	2.063	0.273	-0.042	0.107	0.074	18.400	47164.8	5.284
22	32.377	33	9333590	-5.000	-90.125	-33.148	-28.375	-11.926	0.829	7.354	0.000	5.000	100375.8	1.629
23	27.085	28	9420651	-7.413	-29.225	-17.023	-18.776	-7.278	0.526	0.655	-0.017	14.800	101777.5	5.711
24	22.548	23	7449742	0.000	-3.199	-0.362	-1.421	0.000	0.078	0.791	0.026	10.327	81588.4	4.917
25	17.293	18	4444491	0.000	-5.454	-1.620	-4.127	0.000	0.223	1.186	-0.030	6.567	52821.5	4.336
26	40.493	41	10213949	-10.667	-32.557	-22.535	-15.297	-8.635	0.390	-0.430	-0.019	15.000	82705.2	2.962
27	42.382	43	26907094	5.625	27.955	14.510	23.310	4.932	-0.226	-0.404	0.010	23.520	222071.3	4.514
28	26.858	27	8145239	-1.400	2.067	-1.258	2.708	1.832	-0.058	-0.931	0.033	12.250	91257.5	5.083

ANEXA 2a GRINDA CONTINUĂ PE TREI REAZEME PUNCTUALE RIGIDE SITUATE LA ACELAŞI NIVEL

Nr	a	b2	b3	c	d1	P1	d2	P2	e1	f1	q1	e2	f2	q2	g1	N1	g2	N2	Fl1s	Fl2s	Fl3s	A2s	Ys	Nr.
-	m	m	m	m	m	kN	m	kN	m	m	kN/m	m	m	kN/m	m	kNm	m	kNm	kNm^3	kNm^3	kNm^3	kNm^3	kN	-
1	1	2	2	1	2	20	6	30	3	5	20	0	0	0	0	10	0	0	5.000	48.333	228.333	273.333	90	1
2	1	2	2	1	2	20	0	0	0	2	10	3	5	30	6	10	0	0	0.417	36.667	336.667	527.500	100	2
3	1	2	2	1	0	20	6	30	3	5	20	0	0	0	2	10	0	0	3.333	95.000	475.000	576.667	90	3
4	1	2	2	1	0	20	6	30	3	6	20	0	0	0	2	10	0	0	3.333	95.000	475.000	576.667	110	4
5	1	3	2	1	0	10	7	20	1	4	10	0	0	0	0	0	0	0	1.667	140.417	613.750	1142.500	60	5
6	1	3	2	1	5	20	7	-30	1	4	10	0	0	0	0	15	0	0	7.500	153.750	527.083	827.500	20	6
7	1	6	6	1	4	60	14	30	7	13	3.333	0	0	0	4	-180	0	0	0.000	-540.000	180.000	7559.999	110	7
8	1	6	6	1	0	30	14	80	7	13	10	0	0	0	4	100	0	0	5.000	2165.000	15575.00	67500.000	170	8
9	1	6	6	1	0	30	14	80	7	13	10	0	0	0	4	-100	0	0	5.000	1265.000	7475.000	29700.000	170	9
10	1	6	6	2	0	30	15	20	1	7	30	0	0	0	10	50	0	0	5.000	3335.000	35510.00	173070.000	230	10
11	1	6	6	2	0	20	4	30	7	13	25	0	0	0	4	-20	15	10	3.333	1188.333	11508.33	54810.000	200	11
12	1	6	6	2	3	30	15	20	7	13	20	0	0	0	0	0	0	0	0.000	320.000	6080.000	32640.000	170	12
13	1	6	4	2	3	20	13	20	7	11	20	0	0	0	0	0	0	0	0.000	213.333	1920.000	9386.667	120	13
14	1	4	2	3	6	10	10	20	1	5	30	0	0	0	6	-30	0	0	0.000	320.000	1586.667	4426.667	150	14
15	1	4	2	3	3	30	10	-20	3	7	20	0	0	0	0	-10	7	40	-5.000	-71.667	288.333	1573.333	90	15
16	1	4	2	3	6	20	10	40	0	5	20	0	0	0	3	40	0	0	0.833	600.833	2310.833	5640.000	160	16
17	1	3	2	1	5	-10	0	0	1	5	10	0	0	0	0	-15	7	20	-7.500	-86.250	-11.667	381.250	30	17
18	1	6	6	2	10	-30	15	20	1	7	-10	7	13	20	0	10	0	0	5.000	-295	-6310	-34290.000	50	18
19	1	6	6	2	0	30	10	-20	1	7	30	7	13	50	15	20	0	0	5.000	3335	37895	187380.000	490	19
20	1	6	4	2	3	-20	13	50	7	11	20	0	0	0	0	-10	0	0	-5.000	-458.333	-2098.333	-8026.667	110	20
21	1	6	4	2	3	20	13	-20	3	11	10	0	0	0	0	-20	0	0	-10.000	-170.000	2203.333	14880.000	80	21
22	1	6	4	2	0	30	13	20	7	13	10	0	0	0	3	-50	0	0	5.000	1315.000	5161.667	17840.000	110	22
23	1	6	6	1	4	30	14	20	7	13	20	0	0	0	0	0	0	0	0.000	135.000	4725.000	26730.000	170	23
24	1	6	6	1	4	-20	14	30	7	13	10	0	0	0	0	-10	0	0	-5.000	-335.000	-2735.000	-12420.000	70	24
25	1	6	6	2	0	20	10	-20	1	7	10	7	13	-10	15	20	0	0	3.333	1683.333	14793.33	68580.000	0	25
26	1	4	2	3	3	30	10	-20	3	7	20	0	0	0	0	10	10	40	5.000	178.333	778.333	2053.333	90	26
27	1	6	6	2	0	30	15	-20	1	7	30	7	13	-30	15	20	0	0	5.000	3335	33665	162000.000	10	27
28	1	6	6	2	0	30	15	20	1	7	-10	7	13	-20	0	10	0	0	10.000	1420.000	2650.000	-1080.000	-130	28
29	1	6	4	2	3	40	13	50	1	11	10	0	0	0	0	-10	13	10	-5.000	721.667	6975.000	34613.333	190	29
30	1	6	4	2	3	20	13	-20	0	11	10	0	0	0	0	-20	0	0	-9.583	723.750	6597.083	32306.667	110	30
31	1	6	4	2	0	20	13	-20	0	11	10	0	0	0	3	20	0	0	3.750	2303.750	11177.08	44040.000	110	31

Nr.	M3s	V1	V2	V3	Elfio	Elvo	Mmax	d	d ef	Izef	vo	fi0	T max	tau max
-	kN*m	kN	kN	kN	kNm^2	kNm^3	kNm	mm	mm	mm^4	mm	grade	kN	MPa
1	80	15.625	8.750	65.625	-11.250	6.250	30.000	45.473	46	14286127	0.208	-0.021	36.250	8.501
2	210	23.203	58.594	18.203	-2.656	2.240	15.522	36.505	37	5979847	0.178	-0.012	41.797	15.151
3	120	39.063	-18.125	69.063	-19.792	16.458	30.000	45.473	46	14286127	0.549	-0.038	39.062	9.161
4	110	40.313	-25.625	95.313	-18.958	15.625	40.000	50.049	51	21585587	0.345	-0.024	50.000	9.539
5	145	28.417	1.458	30.125	-3.625	1.958	20.000	39.724	40	8168139	0.114	-0.012	20.000	6.203
6	170	16.250	44.375	-40.625	-24.375	16.875	30.000	45.473	46	14286127	0.562	-0.047	30.625	7.182
7	390	-7.500	80.000	37.500	45.000	-45.000	157.500	79.032	80	130690227	-0.164	0.009	67.500	5.234
8	590	53.542	-8.750	125.208	-38.750	33.750	80.000	63.058	64	53530717	0.300	-0.020	80.000	9.692
9	390	18.125	28.750	123.125	-101.250	96.250	80.000	63.058	64	53530717	0.856	-0.052	80.000	9.692
10	2020	116.146	104.375	9.479	141.875	-146.875	93.685	66.466	67	64295766	-1.088	0.060	93.854	10.375
11	970	23.021	115.625	61.354	-59.375	56.042	85.286	64.417	65	56955621	0.469	-0.028	88.646	10.412
12	620	11.944	79.444	78.611	18.333	-18.333	48.336	53.309	54	27130525	-0.322	0.018	61.388	10.447
13	280	10.222	44.444	65.333	25.778	-25.778	40.000	50.049	51	21585587	-0.569	0.033	45.333	8.649
14	400	52.500	42.500	55.000	60.000	-60.000	60.000	57.292	58	36107310	-0.791	0.045	67.500	9.957
15	370	9.167	157.500	-76.667	41.111	-36.111	100.000	67.927	68	68221115	-0.252	0.016	96.666	10.374
16	390	71.875	-20.625	108.750	41.667	-42.500	120.000	72.183	73	90609682	-0.223	0.013	68.750	6.402
17	115	5.042	44.896	-19.938	33.813	-26.313	20.000	39.724	40	8168139	-1.534	0.113	24.958	7.741
18	-300	-27.188	4.375	72.813	-113.125	108.125	46.959	52.798	53	25175995	2.045	-0.123	52.812	9.330
19	2870	97.292	283.750	108.958	28.750	-33.750	166.248	80.469	81	137348285	-0.117	0.006	171.042	12.937
20	-110	-13.056	5.139	117.917	-2.778	7.778	100.000	67.927	68	68221115	0.054	-0.001	67.917	7.289
21	500	14.333	89.167	-23.500	112.667	-102.667	54.000	55.315	56	31378724	-1.558	0.098	45.667	7.226
22	300	27.167	7.083	75.750	-55.333	50.333	60.000	57.292	58	36107310	0.664	-0.042	40.000	5.901
23	610	5.521	90.625	73.854	10.625	-10.625	56.874	56.279	57	33680815	-0.150	0.009	66.146	10.103
24	-40	-12.708	18.750	63.958	-21.250	26.250	30.000	45.473	46	14286127	0.875	-0.041	33.958	7.964
25	580	55.208	-13.750	-41.458	51.250	-54.583	59.378	57.093	58	36107310	-0.720	0.039	41.458	6.116
26	390	15.833	147.500	-73.333	-1.111	-3.889	100.000	67.927	68	68221115	-0.027	0.000	93.333	10.016
27	1530	123.750	7.500	-121.25	187.500	-192.500	116.484	71.471	72	85745858	-1.069	0.060	101.250	9.692
28	-540	21.250	-132.50	-18.750	-107.500	97.500	87.500	64.970	65	56955621	0.815	-0.051	81.250	9.543
29	720	48.111	59.722	82.167	167.556	-162.556	90.000	65.583	66	60542299	-1.279	0.076	51.889	5.911
30	785	41.139	93.403	-24.542	124.611	-115.028	58.166	56.702	57	33680815	-1.626	0.101	48.861	7.463
31	885	62.250	65.625	-17.875	-9.833	6.083	40.178	50.123	51	21585587	0.134	-0.012	48.861	9.322

ANEXA 3a SISTEM PLAN FORMAT DIN DOUĂ BARE DREPTE SUDATE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINAT

Nr.	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8
1	-1.000	-1.000																
2	-1.000											1.000						
3	0.667	-2.000																
4												1.000						
5	-0.500	-1.000																
6	-2.000											1.000						
7	-2.000	-4.000																
8												1.000						
9	-2.000	-0.500																
10	-0.500											1.000						
11	-2.000																	
12		-2.000																
13																		
14	-2.000											2.000						
15	1.000										2.000							
16		-2.000									1.000							
17			2.000	-2.000								1.000						
18					3.000	-3.000					1.000							
19							4.000	-4.000				2.000						
20									4.000	-4.000	2.000							
21													2.000	-2.000				
22															-2.000	2.000		
23																	3.000	
24		-2.000																3.000
25																		
26																		
27																	3.000	
28				3.000														
29			3.000															
30						3.000												
31					-2.000													
32																		

q9	q10	q11	q12	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	N11	N12	delta10	delta20	delta11	delta12	delta22	X1	X2
																0.72917	-0.35417	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.339	0.554
																0.77083	-0.37500	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.357	0.589
																-0.15277	-0.04167	1.3333	-0.5000	0.3333	0.369	0.679
					2.000											-2.58333	0.87500	1.3333	-0.5000	0.3333	2.179	0.643
																0.42708	-0.22917	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.143	0.473
																1.37500	-0.62500	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.750	0.750
																1.70833	-0.91667	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.571	1.893
					-1.000											1.54167	-0.62500	1.3333	-0.5000	0.3333	-1.036	0.321
																1.27083	-0.55208	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.759	0.518
																0.46875	-0.25000	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.161	0.509
							2.000									0.20833	0.25000	1.3333	-0.5000	0.3333	-1.000	-2.250
					1.000											-1.12500	0.29167	1.3333	-0.5000	0.3333	1.179	0.893
					2.000		2.000									-3.75000	1.75000	1.3333	-0.5000	0.3333	1.929	-2.357
					1.000											0.16667	-0.25000	1.3333	-0.5000	0.3333	0.357	1.286
							2.000									-0.35417	0.50000	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.679	-2.518
					-1.000											2.25000	-0.95833	1.3333	-0.5000	0.3333	-1.393	0.786
																-0.74691	0.20833	1.3333	-0.5000	0.3333	0.745	0.492
																0.12500	0.12037	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.524	-1.147
																-2.39583	0.75000	1.3333	-0.5000	0.3333	2.179	1.018
																0.25000	0.22917	1.3333	-0.5000	0.3333	-1.018	-2.214
																0.68750	-0.25000	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.536	-0.054
																-0.25000	0.17708	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.027	-0.571
-3.0																0.90123	-0.33333	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.688	-0.032
																0.85648	-0.45833	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.290	0.940
	3.000		3.000													0.37037	-0.26852	1.3333	-0.5000	0.3333	0.008	0.762
		3.000		2.000												-2.87037	0.89352	1.3333	-0.5000	0.3333	2.623	1.254
						2.000										-0.91512	0.58333	1.3333	-0.5000	0.3333	0.069	-1.647
								1.000								-2.59259	1.00000	1.3333	-0.5000	0.3333	1.873	-0.190
									1.000							-3.79630	1.50000	1.3333	-0.5000	0.3333	2.651	-0.524
										1.000						-0.83333	0.59259	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.095	-1.921
											1.000					0.11111	-0.06790	1.3333	-0.5000	0.3333	-0.016	0.180
												2.000	1.000			-4.15625	1.50000	1.3333	-0.5000	0.3333	3.268	0.402

ANEXA 3b SISTEM PLAN FORMAT DIN DOUĂ BARE DREPTE SUDATE DE TREI ORI STATIC NEDETERMINAT

Nr.	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9	q10	q11	q12	N1	N2	N3	N4
1								2.000	1.000																	
2																							-2.000		-2.000	
3			1.000										2.000													
4													1.000												1.000	
5														-1.000					1.000							
6			-2.000																				-1.000			
7	2.000											-1.000														
8												1.000														
9	2.000											1.000														
10			4.000								1.000															
11	-2.000												1.000													
12		-2.000											1.000													
13	1.000																4.000									
14		2.000										1.000														
15	1.000	2.000																								
16	-3.000		2.000																							
17			1.000									2.000														
18	1.000		2.000									1.000														
19											1.000														1.000	
20	-4.000												1.000													
21	1.000												1.000											-1.000		
22								3.000	3.000																	
23						2.000	-4.000																			
24									3.000							1.000										
25													1.000												3.000	
26																							-1.000		2.000	
27								2.000					4.000													
28														-2.000				1.000								
29	4.000																	2.000								
30			-1.000																				-2.000			

N5	N6	N7	N8	N9	N10	N11	N12	delta10	delta20	delta30	Delta 11	Delta 12	Delta 13	Delta 22	Delta 23	Delta 33	DET	DET1	DET2	DET3	X1	X2	X3
								-0.83854	0.46094	0.84375	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.02321	-0.05272	0.00716	0.418	-0.949	0.129
								5.00000	-2.00000	-6.00000	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.08330	0.08330	0.08328	-1.500	1.500	1.500
								0.12924	-0.04167	-0.15278	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.00524	-0.00222	0.00087	-0.094	-0.040	0.016
								-0.51563	0.31250	0.47917	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.01692	-0.04122	0.00969	0.305	-0.742	0.174
								-0.07941	0.03472	0.08410	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.00338	-0.00162	0.00061	0.061	-0.029	0.011
								3.17901	-1.16667	-3.77778	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.08845	0.00616	0.03701	-1.593	0.111	0.666
								-1.37500	0.62500	1.41667	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.06248	-0.03470	0.01620	1.125	-0.625	0.292
								0.16667	-0.12500	-0.16667	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.00347	0.02430	0.00116	0.063	0.438	0.021
								-1.04167	0.37500	1.08333	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.06943	0.01390	0.01852	1.250	0.250	0.334
								-2.73302	1.08333	2.88889	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.14567	-0.00885	0.03126	2.623	-0.159	0.563
								1.69271	-0.68750	-1.77083	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.09069	0.01083	-0.02156	-1.633	0.195	-0.388
								0.73438	-0.39583	-0.77083	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.01431	0.04556	-0.00072	-0.258	0.820	-0.013
								0.84234	-0.30556	-0.95525	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.03576	-0.00367	0.00062	-0.644	-0.066	0.011
								-0.08333	0.08333	0.08333	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.00695	-0.02083	-0.00232	-0.125	-0.375	-0.042
								-0.85417	0.45833	0.87500	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.02256	-0.05033	0.00521	0.406	-0.906	0.094
								0.13349	-0.08333	-0.09722	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.01048	0.00945	-0.00752	-0.189	0.170	-0.135
								-0.50617	0.08333	0.55556	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.05118	0.04552	0.01158	0.922	0.820	0.209
								-2.11651	0.79167	2.23611	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.12491	0.01294	0.02836	2.249	0.233	0.511
								-0.37500	0.25000	0.33333	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.01041	-0.03818	0.00810	0.187	-0.688	0.146
								2.90104	-1.18750	-3.02083	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.15664	0.02124	-0.03892	-2.821	0.382	-0.701
								1.25521	-0.43750	-1.39583	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.06466	-0.01520	-0.00594	-1.164	-0.274	-0.107
								-1.67969	1.00781	1.68750	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.02601	-0.14059	0.00781	0.468	-2.532	0.141
								3.73264	-1.40123	-4.01389	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.20144	-0.01485	-0.03592	-3.628	-0.267	-0.647
								-0.82292	0.61458	0.82292	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.01651	-0.11890	-0.00550	-0.297	-2.141	-0.099
								-2.51563	1.31250	2.47917	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.10022	-0.12452	0.03746	1.805	-2.242	0.675
								-0.50000	0.50000	0.00000	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.08330	-0.08330	0.08330	1.500	-1.500	1.500
								1.38021	-0.50000	-1.52083	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.06986	-0.00999	-0.00767	-1.258	-0.180	-0.138
								-0.07909	0.04167	0.08488	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.00132	-0.00466	-0.00020	0.024	-0.084	-0.004
								-2.01235	0.83333	2.08642	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	0.10851	-0.01798	0.02795	1.954	-0.324	0.503
								3.83951	-1.33333	-4.88889	1.3333	-0.50	-1.50	0.3333	0.50	2	0.05553	-0.04423	0.00308	0.10179	-0.796	0.055	1.833

ANEXA 3c SISTEM PLAN FORMAT DIN TREI BARE DREPTE SUDATE DE DOUĂ ORI STATIC NEDETERMINAT

Nr.	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9	N1
1						6.000	-6.000												
2								1.000	2.000										
3																18.000			
4																			-2.000
5			2.000									1.000							
6												2.000							
7	2.000											2.000							
8													-2.000					2.000	
9			-2.000																-2.000
10	1.000																		
11											2.000								
12												1.000							
13												3.000							
14		-2.000																	
15		2.000									1.000								
16	2.000															4.000			
17	2.000	2.000																	
18	-1.000		2.000																
19	2.000		2.000								2.000								
20		2.000																	1.000
21			2.000								1.000								
22										2.000									
23	-2.000											2.000							
24	2.000											1.000							
25				3.000	-3.000														
26														4.000			2.000		
27					3.000								3.000						
28				1.000															
29						6.000												4.000	
30		2.000																	
31			4.000																
32											2.000								

N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	N11	N12	delta10	delta20	delta11	delta12	delta22	X1	X2	Nr.
										2.0000	2.7407	1.6666	1.0000	1.3333	0.061	-2.101	**1**
										0.0617	0.3333	1.6666	1.0000	1.3333	0.205	-0.404	**2**
										-1.5000	-2.5781	1.6666	1.0000	1.3333	-0.473	2.288	**3**
-1.000										-3.8750	-3.5000	1.6666	1.0000	1.3333	1.364	1.602	**4**
										0.0000	0.0833	1.6666	1.0000	1.3333	0.068	-0.114	**5**
1.000										0.0417	0.1667	1.6666	1.0000	1.3333	0.091	-0.193	**6**
										1.2917	0.1667	1.6666	1.0000	1.3333	-1.273	0.830	**7**
										1.1667	0.5833	1.6666	1.0000	1.3333	-0.796	0.159	**8**
										-3.7917	-3.2500	1.6666	1.0000	1.3333	1.477	1.330	**9**
										0.6875	0.2500	1.6666	1.0000	1.3333	-0.546	0.222	**10**
										-0.8333	-1.2500	1.6666	1.0000	1.3333	-0.114	1.023	**11**
										-0.0417	-0.1667	1.6666	1.0000	1.3333	-0.091	0.193	**12**
										-0.1250	-0.5000	1.6666	1.0000	1.3333	-0.273	0.580	**13**
										-0.7500	-1.2083	1.6666	1.0000	1.3333	-0.170	1.034	**14**
										0.3333	0.5833	1.6666	1.0000	1.3333	0.114	-0.523	**15**
										1.0417	-0.0729	1.6666	1.0000	1.3333	-1.196	0.952	**16**
										2.1250	1.7083	1.6666	1.0000	1.3333	-0.921	-0.591	**17**
										-0.6458	0.0000	1.6666	1.0000	1.3333	0.705	-0.528	**18**
										0.5833	-0.5000	1.6666	1.0000	1.3333	-1.046	1.159	**19**
-1.000										2.5000	2.2083	1.6666	1.0000	1.3333	-0.920	-0.966	**20**
										-0.3750	-0.3750	1.6666	1.0000	1.3333	0.102	0.205	**21**
1.000										-1.2917	0.0000	1.6666	1.0000	1.3333	1.409	-1.057	**22**
										-1.4583	-0.8333	1.6666	1.0000	1.3333	0.909	-0.057	**23**
										0.3333	-1.0417	1.6666	1.0000	1.3333	-1.216	1.693	**24**
										1.8704	1.5000	1.6666	1.0000	1.3333	-0.813	-0.515	**25**
										-0.5677	-0.0417	1.6666	1.0000	1.3333	0.585	-0.408	**26**
										-0.6097	-0.9375	1.6666	1.0000	1.3333	-0.102	0.780	**27**
	2.000									5.0062	3.5000	1.6666	1.0000	1.3333	-2.598	-0.677	**28**
										3.3229	4.9537	1.6666	1.0000	1.3333	0.428	-4.037	**29**
					2.000	4.000				6.4167	9.2083	1.6666	1.0000	1.3333	0.534	-7.307	**30**
							1.000			0.5833	1.5000	1.6666	1.0000	1.3333	0.591	-1.568	**31**
		2.000	-1.000							1.2778	0.2500	1.6666	1.0000	1.3333	-1.189	0.705	**32**

ANEXA 3d SISTEM PLAN FORMAT DIN TREI BARE DREPTE SUDATE DE TREI ORI STATIC NEDETERMINAT

Nr.	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9	N1	N2	N3	N4	N5	N6
1								2.000	1.000															
2																			-2.000		-2.000			
3			1.000									2.000												
4												1.000									1.000			
5													-1.000					1.000						
6			-2.000																-1.000					
7	2.000										-1.000													
8											1.000													
9	2.000										1.000													
10			4.000							1.000														
11	-2.000											1.000												
12		-2.000										1.000												
13	1.000															4.000								
14		2.000									1.000													
15	1.000	2.000																						
16	-3.000		2.000																					
17			1.000								2.000													
18	1.000		2.000								1.000													
19										1.000											1.000			
20	-4.000											1.000												
21	1.000											1.000								-1.000				
22								3.000	3.000															
23						2.000	-4.000																	
24									3.000						1.000									
25												1.000									3.000			
26																			-1.000		2.000			
27								2.000				4.000												
28													-2.000				1.000							
29	4.000																2.000							
30			-1.000																-2.000					
31			-4.000								2.000													
32												1.000			-4.000									

N7	N8	N9	N10	N11	N12	delta10	delta20	delta30	delta11	delta12	delta13	delta22	delta23	delta33	DET	DET1	DET2	DET3	X1	X2	X3
						0.10494	0.50000	0.50000	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.39967	-0.24995	-0.23867	0.685	-0.429	-0.409
						-4.00000	-4.00000	-6.00000	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.00000	0.99980	0.66647	0.000	1.714	1.143
						-0.06250	-0.20833	-0.20833	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.13367	0.10415	0.07754	-0.229	0.179	0.133
						0.08333	0.33333	0.33333	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.24304	-0.16663	-0.14351	0.417	-0.286	-0.246
						0.58333	0.29167	0.62500	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.29165	0.02083	0.06252	-0.500	0.036	0.107
						-1.91667	-1.75000	-2.75000	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.14582	0.37492	0.24991	0.250	0.643	0.429
						1.79167	1.12500	1.91667	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.89925	-0.16663	0.31023	-1.542	-0.286	0.532
						-0.41667	-0.62500	-0.66667	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.04861	0.29161	0.01620	-0.083	0.500	0.028
						0.95833	-0.12500	0.58333	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.99647	0.41658	0.34263	-1.709	0.714	0.588
						-0.62500	0.25000	-0.16667	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.89925	-0.33327	-0.40047	1.542	-0.571	-0.687
						-1.41667	-0.66667	-1.41667	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.82634	-0.04166	-0.25467	1.417	-0.071	-0.437
						-0.79167	-1.37500	-1.41667	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.26735	0.66653	0.12036	-0.458	1.143	0.206
						0.35417	-0.32292	0.04167	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.57115	0.34368	0.20082	-0.979	0.589	0.344
						0.33333	0.58333	0.58333	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.09722	-0.29161	-0.03240	0.167	-0.500	-0.056
						1.43750	1.45833	1.87500	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.32811	-0.52073	0.11461	-0.563	-0.893	0.197
						-2.02083	-0.50000	-1.62500	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	1.64053	-0.31244	-0.62158	2.813	-0.536	-1.066
						-0.81250	-1.12500	-1.20833	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.01215	0.52073	-0.03357	0.021	0.893	-0.058
						0.31250	-0.12500	0.20833	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.30380	0.22912	0.04748	-0.521	0.393	0.081
						-0.58333	0.25000	-0.16667	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.82634	-0.33327	-0.35186	1.417	-0.571	-0.603
						-2.79167	-1.16667	-2.66667	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	1.77420	-0.16663	-0.58110	3.042	-0.286	-0.996
						-0.35417	-1.29167	-1.04167	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.59545	0.77068	0.21412	-1.021	1.322	0.367
						0.16667	0.83333	0.83333	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.68052	-0.41658	-0.40738	1.167	-0.714	-0.699
						0.22222	0.14815	0.22222	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.12962	-0.03703	0.06173	-0.222	-0.063	0.106
						-0.31481	-0.31510	-0.35417	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.13772	0.13799	-0.09196	0.236	0.237	-0.158
						0.33333	1.33333	1.33333	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.97217	-0.66653	-0.57404	1.667	-1.143	-0.984
						-1.62500	-0.50000	-1.50000	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	1.09369	-0.24995	-0.31256	1.875	-0.429	-0.536
						-0.06790	-0.22222	-0.22222	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.14042	0.11109	0.08127	-0.241	0.190	0.139
						1.13281	0.47917	1.14583	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.64558	0.09373	0.16078	-1.107	0.161	0.276
						2.67188	0.70833	2.20833	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-2.09927	0.39575	0.77235	-3.600	0.679	1.324
						-3.77083	-3.12500	-5.12500	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	0.61976	0.56239	0.30191	1.063	0.964	0.518
						-0.91667	-1.75000	-1.83333	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.53469	0.83317	0.29627	-0.917	1.429	0.508
						1.29167	1.76042	1.91667	1.6666	1	2	1.3333	1.5	3	0.58318	-0.02430	-0.80192	0.04457	-0.042	-1.375	0.076

ANEXA 5. BARA CURBĂ PLANĂ CU AXAGEOMETRICĂ UN ARC DE CERC

NR.	P1/P	P2/P	P3/P	P4/P	M1/PR	M2/PR	N(0)	N(45)	N(90)s	N(90)d	N(135)	N(180)	T(0)	T(45)	T(90)s	T(90)d	T(135)	T(180)
1	-1	-1	0	0	0	-2	1.000	1.414	1.000	1.000	0.000	-1.000	1.000	0.000	-1.000	-1.000	-1.414	-1.000
2	-1	-1	0	0	0	0	1.000	1.414	1.000	1.000	0.000	-1.000	1.000	0.000	-1.000	-1.000	-1.414	-1.000
3	0	-1	0	0	0	0	1.000	0.707	0.000	0.000	-0.707	-1.000	0.000	-0.707	-1.000	-1.000	-0.707	0.000
4	1	0	0	0	0	0	0.000	-0.707	-1.000	-1.000	-0.707	0.000	-1.000	-0.707	0.000	0.000	0.707	1.000
5	1	0	0	0	-1	0	0.000	-0.707	-1.000	-1.000	-0.707	0.000	-1.000	-0.707	0.000	0.000	0.707	1.000
6	0	1	0	0	-1	0	-1.000	-0.707	0.000	0.000	0.707	1.000	0.000	0.707	1.000	1.000	0.707	0.000
7	1	0	0	2	0	0	0.000	-0.707	-1.000	-1.000	0.707	2.000	-1.000	-0.707	0.000	2.000	2.121	1.000
8	0	-2	1	0	0	0	2.000	1.414	0.000	-1.000	-2.121	-2.000	0.000	-1.414	-2.000	-2.000	-0.707	1.000
9	0	0	0	1	-1	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.707	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.707	0.000
10	0	-2	0	0	0	-1	2.000	1.414	0.000	0.000	-1.414	-2.000	0.000	-1.414	-2.000	-2.000	-1.414	0.000
11	2	-1	0	0	0	0	1.000	-0.707	-2.000	-2.000	-2.121	-1.000	-2.000	-2.121	-1.000	-1.000	0.707	2.000
12	-2	-2	0	0	-1	0	2.000	2.828	2.000	2.000	0.000	-2.000	2.000	0.000	-2.000	-2.000	-2.828	-2.000
13	0	-1	0	-2	0	0	1.000	0.707	0.000	0.000	-2.121	-3.000	0.000	-0.707	-1.000	-3.000	-2.121	0.000
14	1	0	2	0	0	0	0.000	-0.707	-1.000	-3.000	-2.121	0.000	-1.000	-0.707	0.000	0.000	2.121	3.000
15	-2	0	0	0	-1	0	0.000	1.414	2.000	2.000	1.414	0.000	2.000	1.414	0.000	0.000	-1.414	-2.000
16	0	-2	0	0	-2	0	2.000	1.414	0.000	0.000	-1.414	-2.000	0.000	-1.414	-2.000	-2.000	-1.414	0.000
17	2	-1	0	0	0	-1	1.000	-0.707	-2.000	-2.000	-2.121	-1.000	-2.000	-2.121	-1.000	-1.000	0.707	2.000
18	0	1	2	0	0	0	-1.000	-0.707	0.000	-2.000	-0.707	1.000	0.000	0.707	1.000	1.000	2.121	2.000
19	0	1	0	2	0	1	-1.000	-0.707	0.000	0.000	2.121	3.000	0.000	0.707	1.000	3.000	2.121	0.000
20	1	2	0	0	-1	0	-2.000	-2.121	-1.000	-1.000	0.707	2.000	-1.000	0.707	2.000	2.000	2.121	1.000
21	0	0	1	-2	-2	0	0.000	0.000	0.000	-1.000	-2.121	-2.000	0.000	0.000	0.000	-2.000	-0.707	1.000
22	0	0	-2	1	-1	0	0.000	0.000	0.000	2.000	2.121	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000	-0.707	-2.000
23	3	-1	0	0	0	1	1.000	-1.414	-3.000	-3.000	-2.828	-1.000	-3.000	-2.828	-1.000	-1.000	1.414	3.000
24	-3	1	0	0	0	-1	-1.000	1.414	3.000	3.000	2.828	1.000	3.000	2.828	1.000	1.000	-1.414	-3.000
25	1	-3	0	0	0	-2	3.000	1.414	-1.000	-1.000	-2.828	-3.000	-1.000	-2.828	-3.000	-3.000	-1.414	1.000
26	-1	3	0	0	0	1	-3.000	-1.414	1.000	1.000	2.828	3.000	1.000	2.828	3.000	3.000	1.414	-1.000
27	0	0	3	1	-2	0	0.000	0.000	0.000	-3.000	-1.414	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000	2.828	3.000
28	0	0	-3	1	-2	0	0.000	0.000	0.000	3.000	2.828	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000	-1.414	-3.000
29	0	0	-3	-2	-1	0	0.000	0.000	0.000	3.000	0.707	-2.000	0.000	0.000	0.000	-2.000	-3.536	-3.000
30	0	0	3	-2	2	0	0.000	0.000	0.000	-3.000	-3.536	-2.000	0.000	0.000	0.000	-2.000	0.707	3.000
31	0	2	0	-3	-2	0	-2.000	-1.414	0.000	0.000	-0.707	-1.000	0.000	1.414	2.000	-1.000	-0.707	0.000
32	0	-2	0	3	-1	0	2.000	1.414	0.000	0.000	0.707	1.000	0.000	-1.414	-2.000	1.000	0.707	0.000

M(0)	M(45)	M(90)s	M(90)d	M(135)	M(180)	M max	Nmax	sigma	deltahA	deltavA	fiA	deltaA	hA	vA	fiA
0	0.414	0.000	2.000	1.000	0.000	2.000	1.000	64.889	-1.5708	2.4292	-2.0000	2.8928	-0.3010	0.4655	-0.0220
0	0.414	0.000	0.000	-1.000	-2.000	2.828	2.000	92.097	0.4292	-2.7124	1.1416	2.7461	0.0822	-0.5198	0.0125
0	-0.293	-1.000	-1.000	-1.707	-2.000	2.000	1.000	64.889	2.0000	-4.7124	3.1416	5.1192	0.3832	-0.9030	0.0345
0	-0.707	-1.000	-1.000	-0.707	0.000	1.000	1.000	32.727	1.5708	-2.0000	2.0000	2.5431	0.3010	-0.3832	0.0220
1	0.293	0.000	0.000	0.293	1.000	1.000	1.000	32.727	-0.4292	1.1416	-1.1416	1.2196	-0.0822	0.2188	-0.0125
1	1.293	2.000	2.000	2.707	3.000	3.000	1.000	97.050	-4.0000	7.8540	-6.2832	8.8139	-0.7665	1.5050	-0.0690
0	-0.707	-1.000	-1.000	0.707	2.000	1.000	2.000	33.293	0.5708	1.5708	0.0000	1.6713	0.1094	0.3010	0.0000
0	-0.586	-2.000	-2.000	-3.121	-3.000	3.236	2.236	105.340	3.7854	-8.3540	5.7124	9.1716	0.7254	-1.6008	0.0627
1	1.000	1.000	1.000	1.707	2.000	2.000	2.000	65.455	-2.5000	4.9270	-4.1416	5.5250	-0.4791	0.9441	-0.0455
0	-0.586	-2.000	-1.000	-2.414	-3.000	3.000	2.000	97.616	3.0000	-6.8540	4.7124	7.4818	0.5749	-1.3134	0.0517
0	-1.707	-3.000	-3.000	-3.121	-2.000	3.000	2.000	97.616	5.1416	-8.7124	7.1416	10.1164	0.9852	-1.6695	0.0784
1	1.828	1.000	1.000	-1.000	-3.000	3.000	2.000	97.616	-1.1416	-2.2832	-0.8584	2.5527	-0.2188	-0.4375	-0.0094
0	-0.293	-1.000	-1.000	-3.121	-4.000	4.000	3.000	130.343	3.0000	-8.2832	5.1416	8.8097	0.5749	-1.5872	0.0565
0	-0.707	-1.000	-1.000	-0.121	2.000	2.000	0.000	64.323	1.1416	0.1416	0.8584	1.1503	0.2188	0.0271	0.0094
1	2.414	3.000	3.000	2.414	1.000	3.000	2.000	97.616	-5.1416	7.1416	-7.1416	8.7999	-0.9852	1.3685	-0.0784
2	1.414	0.000	0.000	-1.414	-2.000	2.000	2.000	65.455	0.0000	-3.1416	0.0000	3.1416	0.0000	-0.6020	0.0000
0	-1.707	-3.000	-2.000	-2.121	-1.000	3.000	2.000	97.616	4.1416	-6.1416	5.5708	7.4076	0.7936	-1.1769	0.0612
0	0.293	1.000	1.000	2.293	4.000	4.000	1.000	129.211	-2.4292	6.8540	-4.2832	7.2717	-0.4655	1.3134	-0.0470
0	0.293	1.000	0.000	2.121	3.000	3.000	3.000	98.182	-2.0000	5.7124	-3.5708	6.0524	-0.3832	1.0946	-0.0392
1	0.879	2.000	2.000	3.707	5.000	5.000	2.000	161.939	-4.4292	10.5664	-7.4248	11.4572	-0.8487	2.0248	-0.0815
2	2.000	2.000	2.000	0.879	1.000	2.000	1.000	64.889	-3.2146	3.7832	-4.8540	4.9645	-0.6160	0.7249	-0.0533
1	1.000	1.000	1.000	1.121	0.000	1.121	2.121	37.253	-2.0708	2.7854	-3.0000	3.4708	-0.3968	0.5337	-0.0329
0	-2.414	-4.000	-5.000	-4.828	-3.000	5.000	3.000	162.505	7.7124	-13.2832	10.7124	15.3598	1.4779	-2.5453	0.1176
0	2.414	4.000	5.000	4.828	3.000	5.000	3.000	162.505	-7.7124	13.2832	-10.7124	15.3598	-1.4779	2.5453	-0.1176
0	-1.586	-4.000	-2.000	-3.828	-4.000	4.000	3.000	130.343	5.5708	-10.9956	8.2832	12.3263	1.0675	-2.1070	0.0909
0	1.586	4.000	3.000	4.828	5.000	5.000	3.000	162.505	-6.5708	13.5664	-9.8540	15.0739	-1.2591	2.5996	-0.1082
2	2.000	2.000	2.000	3.586	6.000	6.000	1.000	193.534	-5.1438	11.2810	-8.9956	12.3984	-0.9857	2.1617	-0.0988
2	2.000	2.000	2.000	1.828	0.000	2.000	3.000	66.020	-3.8562	4.8562	-5.5708	6.2010	-0.7389	0.9306	-0.0612
1	1.000	1.000	1.000	-1.293	-4.000	4.000	2.000	129.777	-0.3562	-3.6416	0.5708	3.6590	-0.0683	-0.6978	0.0063
-2	-2.000	-2.000	-2.000	-2.536	-1.000	2.536	3.536	83.562	4.3562	-6.6416	6.5708	7.9428	0.8347	-1.2727	0.0721
2	2.586	4.000	4.000	3.293	3.000	4.000	0.000	128.646	-6.5000	10.3518	-9.5664	12.2233	-1.2455	1.9836	-0.1050
1	0.414	-1.000	-1.000	-0.293	0.000	1.000	0.000	32.161	0.5000	-0.9270	0.1416	1.0532	0.0958	-0.1776	0.0016

BIBLIOGRAFIE

1. Atanasiu, M.- Metode analitice noi în Rezistența materialelor. Ed. U.P.B. 1994
2. Buzdugan, Gh. - Rezistența materialelor. Ed.Academiei, Bucureşti 1986
3. Buzdugan, Gh. s.a. - Culegere de probleme din Rezistența Materialelor E.D.P. Bucureşti 1979
4. Drobotă, V. - Rezistența materialelor. Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1982
5. Deutsch, I.s.a. - Probleme din Rezistența materialelor. Ed. Did. şi Pedagogică Bucureşti 1986
6. Iliescu, N., Jiga, G. , Hadar A.- Teste grilă de Rezistența materialelor. Ed. Printech, Bucureşti 2000
7. Mirolioubov, I, et coll, - Problemes de Rezistance des materiaux, Ed. Mir Moscou, 1977
8. Petrescu, Gh., Marin, M.- Rezistența materialelor. Ed.Certi Craiova 1994
9. Posea, N. s.a. - Rezistența materialelor. Probleme. Ed. Ştiințifică şi Enciclopedică Bucureşti 1986
10. Stepine, P.- Rezistance des materiaux, Ed. Mir Moscou, 1986
11. Tudose I., s.a - Rezistența materialelor. Aplicații. Ed. Tehnică, Bucureşti 1990